Cvičení č. 7

Lineární závislost a nezávislost. Lineární kombinace. Báze.

Lineární závislost a nezávislost

Definice:
Konečná množina vektorů $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ z vektorového prostoru V se nazývá lineárně nezávislá jestliže rovnice

$$\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k=0$$

má jediné řešení $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$. V opačném případě se nazývá lineárně závislá.

Příklad:
Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$v_1=[1,2,0], v_2=[-1,-2,1], v_3=[1,1,1]$

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0$

$\alpha_1[1,2,0]+\alpha_2[-1,-2,1]+\alpha_3[1,1,1]=[0,0,0]$

$[\alpha_1,2\alpha_1,0]+[-\alpha_2,-2\alpha_2,\alpha_2]+[\alpha_3,\alpha_3,\alpha_3]=[0,0,0]$

$[\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3]=[0,0,0]$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) r_2 \leftrightarrow r_3 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{array}$$

Žádné jiné řešení soustava nemá tudíž vektory v_1,v_2,v_3 jsou lineárně nezávislé. ♦

Příklad:
Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$v_1=[1,2,0], v_2=[-1,-2,1], v_3=[1,1,1], v_4=[1,2,2]$

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4=0$

$\alpha_1[1,2,0]+\alpha_2[-1,-2,1]+\alpha_3[1,1,1]+\alpha_4[1,2,2]=[0,0,0]$

$[\alpha_1,2\alpha_1,0]+[-\alpha_2,-2\alpha_2,\alpha_2]+[\alpha_3,\alpha_3,\alpha_3]+[\alpha_4,2\alpha_4,2\alpha_4]=[0,0,0]$

$[\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4,\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4]=[0,0,0]$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu 3 rovnic o 4 neznámých:

$$\begin{array}{rrrrcl} \alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & +\alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & +2\alpha_4 & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & +2\alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) r_2 \leftrightarrow r_3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení a tudíž i nenulové. Např. zvolíme-li v řešení $\alpha_4 = t, \alpha_3 = 0, \alpha_2 = -2t, \alpha_1 = -3t$, t=1 dostáváme řešení

$\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1.$

Vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou tedy lineárně závislé. ♦

Příklad:
Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů
$p_1(x) = x^2 - x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^2 + 2$

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = o$

$\alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3(x^2 + 2) = 0, \qquad \forall x \in R,$

$\alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x^2 + 2\alpha_3 = 0, \qquad \forall x \in R,$

$(\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)x + (+\alpha_2 + 2\alpha_3) = 0, \qquad \forall x \in R.$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin x dostáváme z poslední rovnice soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Rovnice má tedy právě jedno nulové řešení a tudíž vektory p_1, p_2, p_3 jsou lineárně nezávislé. ♦

<u>Lineární kombinace</u>

Definice:
Vektor v vektorového prostoru V je lineární kombinací vektorů $v_1, ..., v_k \in V$ jestliže existují skaláry $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tak, že $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektor $v = [2,1,-3] \in R^3$ je lineární kombinací vektorů
$v_1 = [1,1,0], v_2 = [0,1,1], v_3 = [1,0,1]$.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$
$$[2,1,-3] = \alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1]$$
$$[2,1,-3] = [\alpha_1, \alpha_1, 0] + [0, \alpha_2, \alpha_2] + [\alpha_3, 0, \alpha_3]$$
$$[2,1,-3] = [\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3]$$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 2 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 1 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = -1 \end{array}$$

$v = 3v_1 - 2v_2 - v_3$ a v je tedy lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3. ♦

Příklad:
Rozhodněte zda-li mnohočlen $p(x) = x^2 + 2$ je lineární kombinací mnohočlenů $p_1(x) = x^2 - x, p_2(x) = x + 1$

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$$
$$x^2 + 2 = \alpha_1 (x^2 - x) + \alpha_2 (x + 1), \qquad \forall x \in R,$$
$$x^2 + 2 = \alpha_1 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 x + \alpha_2, \qquad \forall x \in R,$$
$$x^2 + 2 = \alpha_1 x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2) x + \alpha_2, \qquad \forall x \in R.$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin x dostáváme z poslední rovnice soustavu 3 rovnic o 2 neznámých:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & & = & 1 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & = & 0 \\ & \alpha_2 & = & 2 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rovnice nemá řešení a tudíž vektor p není lineární kombinací vektorů p_1, p_2. ♦

<u>Báze</u>

Definice:
Množina vektorů $S = \{v_1, ..., v_k\}$ z vektorového prostoru V se nazývá bází vektorového prostoru V, jestliže

1. S je lineárně nezávislá

2. Libovolný vektor prostoru *V* se dá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů množiny *S*.

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektory $E = \{e_1, e_2, e_3\}, e_1 = [1,0,0], e_2 = [0,1,0], e_3 = [0,0,1]$ tvoří bázi R^3.

1. Množina *E* musí být lineárně nezávislá

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$$
$$\alpha_1 [1,0,0] + \alpha_2 [0,1,0] + \alpha_3 [0,0,1] = [0,0,0]$$
$$[\alpha_1, 0, 0] + [0, \alpha_2, 0] + [0, 0, \alpha_3] = [0,0,0]$$
$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [0,0,0]$$

Odtud je zřejmé, že rovnice má pouze jedno řešení a to $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a množina *E* je tedy lineárně nezávislá.

2. Libovolný vektor $v = [v_1, v_2, v_3] \in R^3$ musí být možné vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z *E*.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = v$$
$$\alpha_1 [1,0,0] + \alpha_2 [0,1,0] + \alpha_3 [0,0,1] = [v_1, v_2, v_3]$$
$$[\alpha_1, 0, 0] + [0, \alpha_2, 0] + [0, 0, \alpha_3] = [v_1, v_2, v_3]$$
$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [v_1, v_2, v_3]$$

Poslední rovnice má právě jedeno řešení $\alpha_1 = v_1, \alpha_2 = v_2, \alpha_3 = v_3$ a tedy vektor v je lineární kombinací vektorů *E*.

Jelikož jsou splněny obě podmínky 1. a 2. množina *E* tvoří bázi R^3. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektory $B = \{v_1, v_2, v_3\}, v_1 = [1,1,0], v_2 = [0,1,1], v_3 = [1,0,1]$ tvoří bázi R^3.

1. Lineární nezávislost *B*.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = o$$
$$\alpha_1 [1,1,0] + \alpha_2 [0,1,1] + \alpha_3 [1,0,1] = [0,0,0]$$
$$[\alpha_1, \alpha_1, 0] + [0, \alpha_2, \alpha_2] + [\alpha_3, 0, \alpha_3] = [0,0,0]$$
$$[\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [0,0,0]$$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

2. Lib. vektor $v = [v_1, v_2, v_3] \in R^3$ je lineární kombinací vektorů z *B*.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$

$\alpha_1 [1,1,0] + \alpha_2 [0,1,1] + \alpha_3 [1,0,1] = [v_1, v_2, v_3]$

$[\alpha_1, \alpha_1, 0] + [0, \alpha_2, \alpha_2] + [\alpha_3, 0, \alpha_3] = [v_1, v_2, v_3]$

$[\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [v_1, v_2, v_3]$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & v_1 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & v_2 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = & v_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & 1 & v_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & -1 & v_2 - v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & -1 & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & 2 & v_3 - v_2 + v_1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2}(-v_3 + v_2 + v_1) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(v_3 + v_2 - v_1) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(v_3 - v_2 + v_1) \end{array}$$

Soustava má tedy řešení a tudíž libovolný vektor v se dá vyjádřit jako kombinace vektorů z množiny *B*.

Z bodů 1. a 2. tedy vyplývá, že množina *B* je báze R^3. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektory $E = \{p_1, p_2, p_3\}$, $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ tvoří bázi P_3.

1. Množina *E* musí být lineárně nezávislá

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = o$

$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = o(x), \qquad \forall x \in R$

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0, \qquad \forall x \in R$

Dva mnohočleny se sobě rovnají jestliže mají stejné koeficienty u stejných mocnin *x*. Odtud je zřejmé, že rovnice má pouze jedno řešení a to $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a množina *E* je tedy lineárně nezávislá.

2. Libovolný mnohočlen $p \in P_3$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, musí být možné vyjádřit jako lineární kombinaci mnohočlenů z *E*.

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = p$

$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = p(x), \qquad \forall x \in R$

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in R$

Poslední rovnice má právě jedno řešení $\alpha_1 = c, \alpha_2 = b, \alpha_3 = a$ a tedy mnohočlen *p* je lineární kombinací vektorů *E*.

Jelikož jsou splněny obě podmínky 1. a 2. množina *E* tvoří bázi P_3. ♦

Příklad:
Rozhodněte, zda-li vektory $F = \{p_1, p_2\}, p_1(x) = x^2 + 1, p_2(x) = x^2 + x$ tvoří bázi P_3.

1. Množina *F* musí být lineárně nezávislá.

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = o$$
$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = o(x), \qquad \forall x \in R$$
$$\alpha_1 \cdot (x^2+1) + \alpha_2 \cdot (x^2 + x) = 0, \quad \forall x \in R$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1 = 0, \qquad \forall x \in R$$

Dva mnohočleny se sobě rovnají jestliže mají stejné koeficienty u stejných mocnin *x*. Odtud soustavu 3 rovnic o 2 neznámých:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & +\alpha_2 & = & 0 \\ & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & & = & 0 \end{array}$$

Na první pohled je zřejmé, že tato soustava má pouze jedno řešení a to $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ a množina *F* je tedy lineárně nezávislá.

2. Libovolný mnohočlen $p \in P_3$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, musí být možné vyjádřit jako lineární kombinaci mnohočlenů z *F*.

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = p$$
$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = p(x), \qquad \forall x \in R$$
$$\alpha_1 \cdot (x^2+1) + \alpha_2 \cdot (x^2 + x) = ax^2 + bx + c, \qquad \forall x \in R$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1 = ax^2 + bx + c, \qquad \forall x \in R$$

Porovnáním koeficientů mnohočlenů v poslední rovnici dostáváme soustavu 3 rovnic o 2 neznámých:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & +\alpha_2 & = & a \\ & \alpha_2 & = & b \\ \alpha_1 & & = & c \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & c-a \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a+b \end{array}\right)$$

Poslední rovnice má tvar $0 = -a + b + c$ a odtud dostáváme, že sosutava má řešení $\alpha_1 = a - b, \alpha_2 = b$ pouze za předpokladu, že $-a + b + c = 0$. Z tohoto vyplývá, že ty mnohočleny, pro něž je $-a + b + c \neq 0$ nelze vyjádřit jako lineární kombinace mnohočlenů $p_1(x) = x^2 + 1, p_2(x) = x^2 + x$ a tudíž množina F není bází P_3. ♦

Příklad:
Určete bázi podprostoru $U = \{p \in P_3, p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : a_0 - a_2 = 0\}$ vektorového prostoru P_3.

Koeficienty mnohočlenů patřících do množiny *U* musí splňovat podmínku $a_0 - a_2 = 0$ což představuje rovnici o třech neznámých a_0, a_1, a_2 jejíž řešením je $a_0 = t, a_1 = s, a_2 = t$ pro libovolné parametry $t, s \in R$. Pak pro $\forall p \in U$ existují $t, s \in R$ takové, že
$p(x) = tx^2 + sx + t = tx^2 + t + sx = t(x^2 + 1) + sx, \forall x \in R$ a odtud
$U = \{t(x^2 + 1) + sx, \forall t, s \in R\} = \langle x^2 + 1, x \rangle$.
Je zřejmé, že mnohočleny $x^2 + 1$ a x jsou lineárně nezávislé a libovolný mnohočlen z *U*, lze vyjádřit jako kombinaci těchto mnohočlenů. Proto mnohočleny $x^2 + 1$ a x tvoří bázi podprostoru *U*. ♦