

Souřadnice vektoru, hodnost matice, Frobeniova věta

1. Jsou dány vektory $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Rozhodněte, zda vektory u , v , w tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^3 , je-li $u = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $v = e_2 + 2e_3$, $w = e_1 - e_2 + 7e_3$.
2. Nechť vektory u , v , w tvoří bázi vektorového prostoru V . Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru V :
 - a) $u + v$, $v - w$, $u + w$,
 - b) $2u + v + 3w$, $v + 2w$, $u - v + 7w$.
3. Ukažte, že vektory u_1 , u_2 , u_3 tvoří bázi a spočítejte souřadnice vektoru x v této bázi.
 - a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$
 - b) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 2)$, $x = (3, 4, 7)$
 - c) $u_1 = (2, 1, -3)$, $u_2 = (3, 2, -5)$, $u_3 = (1, -1, 1)$, $x = (6, 2, -7)$
4. Mějme vektorový prostor P_2 polynomů stupně maximálně 2. Nalezněte souřadnice polynomu $p(x) = 2x^2 + 5x + 7$ v uspořádané bázi $B = ((x + 2)^2, x + 2, 1)$.
5. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Ověřte, že množina M všech řešení této soustavy je vektorový podprostor prostoru \mathbb{R}^3 . Určete $\dim M$ a najděte alespoň jednu bázi vektorového prostoru M .

6. Jsou dány homogenní soustavy nad \mathbb{R} . Určete bázi a dimenzi podprostoru řešení těchto soustav.
 - a) $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
 $x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0$
 $-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$
 - b) $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$
 $3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$
 $4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$

7. Najděte bázi a dimenzi vektorového prostoru \mathcal{V} , kde

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

Výsledky

1. ano,
2. a) ne, b) ano,
3. a) $x = (1, 2, 3)$, b) $x = (1, 0, 2)$, c) $x = (1, 1, 1)$
4. $p = (2, -3, 5)$

5. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(-5, 4, 3)$
6. a) dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(-7, -5, 1)$,
b) dimenze je 2, bázi tvoří např. vektory $(2, 0, -5, 7)$, $(2, 1, 0, 0)$
7. dimenze je 1, bázi tvoří např. vektor $(0, 1, 1)$.