Otevřené úlohy Posloupnosti a řady

a) Způsoby zadání posloupností, graf, limita posloupnosti

1) Určete vzorec pro n-tý člen posloupnosti, zadané výčtem prvků:
   a) 4, 8, 12, 16, 20, …. b) 1, 4, 9, 16, 25, ….c) -1, 1, -1, 1, -1, …. Řešení : a) $a_n = 4n$ b) $a_N = n^2$
   c) $a_n = (-1)^n$

2) Zapište vzorcem pro n-tý člen : a) posloupnost všech přirozených sudých čísel
   b) posloupnost všech přirozených lichých čísel
   c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných jedenácti
   Řešení : a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n - 1$ c) $a_n = 11n$

3) Posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen. Napište prvních pět členů posloupnosti a načrtněte graf:
   a) $a_n = 2n + 1$ b) $a_n = n.2^{-n}$ c) $a_n = (n-1).n$
   d) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ e) $a_n = n^2 - 5$ f) $a_n = n.(-1)^{n+1}$
   Řešení : a)3,5,7,9,11 b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}$ c) 0,2,6,12,20 d) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ e) –4,-1,4,11,20 f) 1,-2,3,-4,5

4) Posloupnost je dána rekurentně. Určete prvních šest členů posloupnosti a určete vzorec pro n-tý člen:
   a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = (-1)^{2n+1}.a_n + 2$
   Řešení: a) 5,9,13,17,21,25 $a_n = 4n + 1$ b) 1,4,9,16,25,36 $a_n = n^2$ c) -1,3,-1,3,-1,3 $a_n = 1 + (-1)^n.2$

5) Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní a v kladném případě určete jejich limitu
   a) $\left(\dfrac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $(7)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\dfrac{4n}{3n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left((-1)^n.\dfrac{1}{5n}\right)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(3^n\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\dfrac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$
   Řešení : a) 0 b) 7 c) $\frac{4}{3}$ d) 0 e) divergentní f) $\frac{1}{2}$

b) Aritmetická posloupnost

1) Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, určete diferenci :
   a) log 16; log 8; log 4 b) $\frac{1999}{2000}; \frac{2999}{2000}; \frac{3999}{2000}$ c) sin 60°; sin 0°; sin(-60°)
   d) $a^2 - 2; (a+1)^2; (a+2)^2, a \in R$
   Řešení : a) d = $\log \frac{1}{2}$ b) d=$\frac{1}{2}$ c) d=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) d =2a+3

2) Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna je 24 cm. Stanovte jeho obvod a obsah. Řešení : o = 72 cm, S=216 cm ^{2}

3) Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti mají součet 60 a součin 7500. Určete tato čísla. Řešení : 15,20,25

4) V aritmetické posloupnosti je a_1=3 , d=4. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250? Řešení : alespoň 11 členů

5) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočtěte délky stran. Řešení : 24 cm, 32 cm, 40 cm

6) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte 4 čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest Následujících členů aritmetické posloupnosti.
   Řešení : 2; 3,2; 4,4; 5,6; 6,8; 8 nebo sestupně.

7) V aritmetické posloupnosti známe první člen $a_1=18$ a diferenci d=-5. Určete $n\in N$ tak, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$ Řešení : n=22

8) Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí :

a) $\begin{array}{l} a_3 + a_5 = 8 \\ a_3^2 - a_5^2 = 32 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10 \\ a_{21} : a_1 = 2 \end{array}$ Řešení : a) $a_1=10$, d= -2 b) $a_1=2$, d=0,1

c) Geometrická posloupnost

1) V geometrické posloupnosti je $a_2 = 12; a_7 = -\frac{4}{81}$. Vypočtěte a_1 a q a zapište posloupnost rekurentně.
Řešení : $a_1 = -36; q = -\frac{1}{3}; a_{n+1} = -\frac{1}{3} a_n$

2) Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů je $\frac{304}{27}$.
Určete $a_1; q$. Řešení : $a_1 = 18; q = \frac{2}{3}$

3) Tři racionální čísla tvoří geometrickou posloupnost. Jejich součet je 21 a součin krajních čísel je 36. Určete tato čísla. Řešení : hledaná čísla jsou 3, 6, 12.

4) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte 4 čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů geometrické posloupnosti.
Řešení : $2; 2\sqrt[5]{4}; 2\sqrt[5]{16}; 4\sqrt[5]{2}; 4\sqrt[5]{8}; 8$ nebo sestupně.

5) Přičteme-li k číslům –6; 2; 26 reálné číslo x, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. určete toto číslo, Dále a_1,q. Řešení : x = 10, $a_1 = 4; q = 3$

1) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Součet délek všech hran je 84 cm. Vypočtěte povrch kvádru, víte-li , že jeho objem je 64 cm^3. Řešení : 1 cm, 4 cm, 16 cm S= 168 cm^2

2) Součet tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 9. První číslo necháme, druhé zvětšíme o 12 a třetí zmenšíme o 3. Dostaneme tak tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete původní trojici čísel. Řešení : 3, -6, 12 nebo 12, -6, 3

d) Nekonečná geometrická řada

1) Určete n – tý člen a součet řady $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - ...$ Řešení : $S_n = \frac{3}{5};\quad a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2) Řešte v R rovnici $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + ...$ Řešení : IxI>3; x ≠ -10; x=- 6; x = 4

3) Řešte v R rovnici $\sum_{n=1}^{\infty} (4-3x)^n = -\frac{1}{2x}$ Řešení : x = $\frac{3}{2}$

6) U daných nekonečných geometrických řad určete první člen a kvocient. Rozhodněte, které řady jsou konvergentní a které divergentní. V případě, že se jedná o konvergentní řadu, určete její součet.

a) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - ...$ b) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + ...$ c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + ...$

Řešení : a) $a_1 = -\frac{1}{3}; q = -\frac{1}{2}; konv.; S = -\frac{2}{9}$

b) $a_1 = 1 + \sqrt{2}; q = \frac{1}{2}; nebo: a_1 = \sqrt{2}; q = \frac{\sqrt{2}}{\check{e}}; konv.: S = 2 + 2\sqrt{2}$ c) $a_1 = 2; q = \frac{3}{2}; divergentní$

5) Stanovte hodnotu součinu $y = 3.\sqrt{3}.\sqrt[4]{3}.\sqrt[8]{3}....$ Řešení : y = 9

6) Řešte v R rovnici $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[\check{c}]{x} + \log\sqrt[8]{x} + ... = 2$ Řešení : x=10

7) Řešte v R rovnici $1 + 3x + 9x^2 + ... = 10$ Řešení : x = $\frac{3}{10}$

8) Vypočtěte $\frac{n+\frac{n}{3}+\frac{n}{9}+\frac{n}{27}+....}{1+2+3+...+n}$ kde $n\in N$ Řešení : $\frac{3}{1+n}$

Posloupnosti a řady - souhrn

1. Napište prvních pět členů posloupnosti, pro jejíž členy platí

   a) $a_1 = 3 \quad a_{n+1} = 4a_n$ b) $a_1 = 3{,}5 \quad a_{n+1} = a_n - 1{,}5$ c) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \quad a_1 = -3,\ a_2 = -6$

2. Posloupnost je dána vzorcem pro n- tý člen. Napište prvních 5 členů posloupnosti a načrtněte graf:

   a) $a_n = n.(-1)^{n+1}$ b) $a_n = n^2 - 5$

3. V aritmetické posloupnosti je dáno $a_1 = 450$, d=-24, $a_n = 210$. Vypočtěte a, s_n.

4. Čtvrtý člen aritmetické posloupnosti je 16, osmý 24. Kolik členů je třeba sečíst, aby jejich součet byl 90 ?

5. Určete a_1, d v aritmetické posloupnosti ve které platí: $a_2 + a_5 - a_3 = 10 \qquad a_1 + a_6 = 17$

6. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna je 12 cm. Vypočtěte obvod a obsah trojúhelníka.

7. Teplota Země přibývá o 1^o C na 33m. Jak je velká teplota v šachtě hluboké 1015m, je-li v hloubce 25m stálá teplota $+9^o$ C?

8. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak,aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo 6 následujících členů a) aritmetické posloupnosti b) geometrické posloupnosti

9. Určete a_1,q geometrické posloupnosti ve které platí: $a_1 + a_4 = 14 \qquad a_3 + a_2 = -4$

10. V geometrické posloupnosti je $a_2 = 12, a_7 = -\dfrac{4}{81}$. Vypočtěte a_1, q.

    Zapište posloupnost vzorcem pro n- tý člena rekurentně.

11. Přičteme-li k číslům 2,7,17 totéž číslo,vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.Určete je

12. Součet prvních tří členů GP je 38, součet následujících tří členů této posloupnosti je $\dfrac{304}{27}$. Určete a_1, q.

13. Podnikatel si vypůjčil v KB 200 000Kč na 5 let s 15% ročním úrokem. Jak velkou částkou splatí dluh po 5-ti letech?

14. Tlak vzduchu ubývá se stoupající výškou (při stálé teplotě) asi o 1,2% na 100 m.

    Určete: a) tlak na vrcholu Sněžky, je-li normální atmosférický tlak na hladině moře $10^5\, N.m^{-2}$

    b) o kolik % klesne tlak vzduchu, vystoupíme-li do výšky 1 000 m.

15. Do banky uložíme 10 000Kč. Kolik peněz budeme mít po 1 roce, jestliže nám úroky připisují

    a) ročně b) čtvrtletně c) měsíčně

    (Zdanění úroků je 15%, úrokovací rok = 360 dnů, úrokovací měsíc = 30 dnů)

16. U daných nekonečných geometrických řad určete $a_1 q$, rozhodněte o konvergentnosti a divergentnosti, pokud bude řada konvergentní, určete její součet

    a) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16} + \ldots\ldots..$ b) $\sqrt{2} + 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} + \ldots\ldots$

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{5}\right)^{-n}$

17. Určete pro která $x \in R$ jsou dané geometrické řady konvergentní. Potom určete jejich součet.

a) $2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + ...$ b) $x + 4 + (x+4)^2 + (x+4)^3 + ...$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2x)^n$

18. Vypočtěte: $\dfrac{1+2+3+..............+n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + ... \frac{n}{2^{n-1}} + ...}$

19. Do čtverce o délce strany d je vepsána kružnice, do ní je znovu vepsán čtverec, atd.
Vypočtěte součet obsahů všech takto získaných a) čtverců b) kružnic

20. Řešte rovnice:

a) $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + ...$ b) $\dfrac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + ...$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (4-3x)^n = -\dfrac{1}{2x}$ d) $1 + \log x + (1+\log x)^2 + (1+\log x)^3 + ... = -6\log x$

Řešení:

1. a) 3,12,48,192,768 b) 3,5; 2; 0,5; -1; -2.5 c) $-3,-6,2,-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}$ **2.** a) 1,-2,3,-4,5 b)-4,-1,4,11,20

3. n=11, $s_n = 3630$ **4.** 6 **5.** $a_1 = 1, d = 3$ **6.** O=36cm,s=54 cm^2 **7.** $39^0 C$

8. a) 2; 3,2; 4,4; 5,6; 6,8; 8 nebo opačně b) $2, 2\sqrt[5]{4}, 2\sqrt[5]{16}, 4\sqrt[5]{2}, 4\sqrt[5]{8}, 8$ nebo opačně

9. $a_1 = 16, q = -\frac{1}{2}; a_1 = -2, q = -2$ **10.** $a_1 = -36, q = -\frac{1}{3}$, $a_n = 108.\left(-\frac{1}{3}\right)^n, a_1 = -36 a_{n+1} = \left(-\frac{1}{3} a_n\right)$

11. 5,10,20 **12.** $a_1 = 18, q = \frac{2}{3} s_6 = \frac{1330}{27}$ **13.** 402 271,40 Kč

14. a) $8{,}24.10^4\, N.m^{-2}$ b) asi o 11,37% **15.** a) 10765 Kč b) 10 787,20 Kč c) 10 792,40 Kč

16. a) konverg. $a_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}, s = 3$ b) $a_1 1 + \sqrt{2}, q = \frac{1}{2}$ divergentní

c) $a_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$ konverg. S=$\frac{2}{3}$ d) $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, q = \frac{\sqrt{5}}{5}$ konverg. S= $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

17. a) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ S=$\frac{2}{1-2x}$ b) $x \in (-5,-3)$ S=$-\frac{x+4}{x+3}$ c) $x \in (0,1)$ S=$\frac{1-2x}{2x}$

18. $\frac{1}{4}(n+1)$ **19.** a) $2d^2$ b) $\frac{1}{2}\pi d^2$

20. a) $|x| \succ 3, x \neq -10$, $x = -6, x = 4$ b) $|x| \prec 1, x = \frac{1}{2}, x = -\frac{5}{7}$ c) $\frac{3}{2}$ d) x=$\frac{\sqrt[3]{100}}{10}$