Kapitola:	3 MATICE

V této kapitole se seznámíte s pojmem matice, s některými vlastnostmi matic a se základními operacemi, které lze s maticemi provádět. Uvedeme jen ty poznatky, které jsou nezbytné, abyste mohli s pochopením číst další části tohoto textu a abyste dokázali uspět s jejich používáním při studiu dalších aplikovaných matematických či ekonomických disciplín.

To, co se zde dovíte o maticovém počtu, je jen nepatrnou částí jinak velmi rozsáhlé disciplíny s širokou aplikabilitou.

Modul:	3.1 Pojem matice

Cílem tohoto modulu je

- zvládnout pojem matice a základní maticovou terminologii,
- naučit se poznávat jednotlivé druhy matic.

Učební jednotka:	3.1.1 Matice a podmatice

Příklad 11.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ je matice typu 2x3, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je matice typu 3x2,

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ je matice typu 1x5.

Úloha 9.

Napište libovolné matice $\mathbf{D}_{3x3}, \mathbf{E}_{3x1}, \mathbf{F}_{1x1}$.

Úloha 10.

V matici **A** určete prvky $a_{11}, a_{21}, a_{13}, a_{33}$, hlavní a vedlejší diagonálu a vektory $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4$:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Řešení:

a) $a_{11}=2, a_{21}=0, a_{13}=-1, a_{33}=1$, hlavní diagonála: 2, 0, 1, vedlejší diagonála: -1, 0, -2,

$\mathbf{r}_2=(0,0,0)$, $\mathbf{r}_3=(-2,10,1), \mathbf{s}_1=(2,0,-2)$, $\mathbf{s}_4$ neexistuje;

b) $a_{11}=1, a_{21}=7, a_{13}, a_{33}$ neexistují, hlavní i vedlejší diagonála: 1

$\mathbf{r}_2=(7), \mathbf{r}_3=(-3), \mathbf{s}_1=(1,7,-3,4)$, $\mathbf{s}_1$ neexistuje.

Příklad 12.

Mějme matici

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vynecháním 1. řádku a 3. a 4. sloupce vznikne podmatice $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ typu 3x3.

Dále je např. $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ podmatice, která vznikne z matice **A** vynecháním 3.řádku a 2. sloupce.

Úloha 11.

V matici **A** z předchozího příkladu určete tyto podmatice včetně jejich typů:

a) **D**, která vznikne vynecháním 2. a 3. řádku a 1. a 5. sloupce;

b) **F**, která vznikne vynecháním prvních tří řádků a prvních čtyř sloupců;

c) **G,** která vznikne vynecháním 2. řádku a 4. sloupce.

Řešení:

a) $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ typu 2x3; b) $\mathbf{F}=[0]$ typu 1x1;

c) $\mathbf{G}=\begin{bmatrix}7 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -2 & 0\end{bmatrix}$ typu 3x4.

Příklad 13.

Matice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2{,}5\\ 0{,}2 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{2}\\ \frac{2}{10} & 0\end{bmatrix}$$

jsou-li si rovny, protože je splněna podmínka rovnosti matic $\left(2{,}5=\frac{5}{2};\quad 0{,}2=\frac{2}{10}\right)$.

Úloha 12.

Zjistěte, zda pro matice **A,B** platí **A**=**B**, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 8 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2^3\\ \sqrt{64} & 2\end{bmatrix}$; d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & \frac{2\pi}{\pi}\\ \sqrt{12} & (-1)^2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{9}{3} & 2\\ 2\sqrt{3} & \frac{3}{3}\end{bmatrix}$;

e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\sin(\alpha+2\pi) & \sin(-\beta)\\ \cos(\alpha+2\pi) & \cos(-\beta)\end{bmatrix}$.

Řešení:

a) $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$; b) $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$; c) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$; d) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$; e) $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$.

Úloha 13.

Určete čísla *x,y,z* tak, aby platilo $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2x+5y & 4\\ 9 & 2y+1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}12x+9 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2x+3 & 4 & 6 & 8\\ 8 & 12 & 6 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}10x+1 & 2y+3 & 6 & 8\\ 8 & 6z+2 & 3t & 4\end{bmatrix}$.

Řešení:

a) $x=-\frac{2}{5}, y=1;$ b) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{5}{3}, t=2$.

Učební jednotka:	**3.1.2 Druhy matic**

Úloha 14.

Určete, které z následujících matic jsou jednotkové a které nulové:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha\\ (i)^2 & 2^2\end{bmatrix},$$

kde i je imaginární jednotka,

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha & 0\\ 0 & \sin^2\beta+\cos^2\beta\end{bmatrix}.$$

Řešení: **B,F** jsou jednotkové, **C,E** jsou nulové.

Úloha 15.

Z následujících matic vyberte diagonální matice:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Řešení: **A, B, C** jsou diagonální.

Příklad 14.

Vraťme se k maticím uvedeným v úloze 4. V případě a) platí $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T, \mathbf{B}=\mathbf{A}^T$, matice **A,B** jsou tedy vzájemně transponované. V případě b) platí o maticích **A,B** totéž. V případě c) platí $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}, \mathbf{B}^T=\mathbf{B}$ a zároveň $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, jde tedy o jedinou symetrickou matici.

Úloha 16.

Určete transponované matice k maticím:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -6 & 9\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}13 & -6 & 7\\ -6 & 0 & 3\\ 7 & 3 & -5\end{bmatrix}.$$

Řešení: Pro jednoduchost neuvádíme.

Úloha 17.

Určete *x,y* tak, aby matice **A** byla transponovaná k matici **B**, je-li

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2x+2y\\ 3x-5y & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 13 & 2\end{bmatrix}.$$

Řešení: $x=1, y=-2.$

Příklad 15.

Podle této definice jsou trojúhelníkovými maticemi např.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matice

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

nejsou trojúhelníkové.

TEST 5

A. Teoretická část

Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá či nepravdivá.

1. Každá jednotková matice je zároveň diagonální maticí. (ano – ne)
2. Transponovaná matice k nulové matici je opět nulová. (ano – ne)
3. Všechny nulové matice jsou si rovny. (ano – ne)

4. Všechny jednotkové matice jsou si rovny. (ano – ne)
5. Symetrická matice nemusí být vždy čtvercová. (ano – ne)
6. Diagonální matice může být i obdélníková. (ano – ne)
7. Nulová matice je vždy čtvercová. (ano – ne)
8. Rovné matice musí mít stejný typ. (ano – ne)
9. Transponovaná matice je vždy rovna původní matici. (ano – ne)
10. Hlavní diagonála matice „končí“ vždy prvkem v posledním řádku a v posledním sloupci. (ano – ne)

B. Praktická část

1. Určete druh a typ matice **A**, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. K matici **A** určete matici transponovanou.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Rozhodněte, zda platí $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha} & \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \cos(-\alpha) \\ 1+\mathrm{tg}^2\,\alpha & \mathrm{tg}\,\alpha \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} & \sin\pi \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Určete x,y tak, aby pro matice

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \log(x-y) & 2 \\ \log(x+y+1) & 3 \end{bmatrix}$ platilo $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

5. Určete x tak, aby matice **A** byla symetrická, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3x+10 \\ x^2 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & \dfrac{1}{16} \\ 2^x & 4 \end{bmatrix}$.

Správné odpovědi

A. 1. ano 2. ano 3. ano 4. ne 5. ne 6. ne 7. ne 8. ano 9. ne 10. ne

B. 1. a) trojúhelníková obdélníková matice typu 3x4; 1. b) nulová matice řádu 2;

2. a) $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; 2. b) $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

3. a) **A**=**B**; 3. b) $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$; 4. $x = 5$; $y = -5$; 5. a) $x_1 = 5, x_2 = -2$;

5. b) $x = -4$.

Pokud jste nesprávně zodpověděli některou otázku v části ***A***, vraťte se v modulu k příslušnému pojmu a pozorně jej prostudujte znovu. Totéž platí v případě nesprávného vyřešení příkladů v části ***B***. V příkladech 3, 4, 5 navíc potřebujete některé poznatky ze středoškolské matematiky z oblasti goniometrie a některých typů rovnic. V případě potíží vás odkazujeme na skriptum ***OM***, strany 92-104. Můžete se také pokusit vyřešit další doporučené úlohy (viz níže).

Doporučené úlohy pro procvičování:

Sbírka úloh ***S1***, př. 24, 25, 26, str. 17.

Modul:	**3.2 Základní operace s maticemi**

Cílem tohoto modulu je

- naučit se matice sčítat, odčítat a násobit reálnými čísly,
- seznámit se s některými vlastnostmi těchto operací,
- uvědomit si úzkou souvislost mezi množinami matic a vektorovými prostory.

Učební jednotka:	**3.2.1 Početní operace s maticemi**

Příklad 16.

Pro transponování matic platí

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T .$$

Ukažme to na maticích

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Úloha 18.

Stejně jako v předchozím příkladě ukažte, že platí

$$(r.\mathbf{A})^T = r.\mathbf{A}^T ,$$

kde r je libovolné reálné číslo. Použijte matici **A** nebo **B** z předchozího příkladu 6.

Řešení: Pro jednoduchost neuvádíme.

Úloha 19.

Vypočtěte matici $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$, kde **E** je jednotková matice, je-li

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = -1$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \lambda = 3$.

Řešení:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Úloha 20.

Určete x,y tak, aby matice $\mathbf{A} = 2.\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}$ byla nulová.

Řešení: $x = 2, y = 5$.

Učební jednotka:	**3.2.2 Pravidla pro počítání s maticemi**

Úloha 21.

Ověřte platnost zákonů 1.-8. v ***LA***, str. 36-37. Zvolte

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $r = 2, s = -3$.

Řešení: Není pro jednoduchost uvedeno.

Učební jednotka:	**3.2.3 Vektorový prostor matic**

Úloha 22.

Zjistěte, zda matice **A,B** jsou lineárně závislé, je-li

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Řešení: a) ne; b) ano.

Úloha 23.

Zjistěte, zda matice **A,B,C,D** mohou tvořit bázi ve V_{2x2}, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: ano.

TEST 6

A. Teoretická část

V následujících tvrzeních rozhodněte o jejich pravdivosti či nepravdivosti.

1. Sečíst můžeme libovolné dvě matice. (ano-ne)

2. Libovolnou matici můžeme vynásobit libovolným reálným číslem. (ano-ne)

3. Sčítání matic je komutativní. (ano-ne)

4. Sčítání matic není asociativní. (ano-ne)

5. Dimenze vektorového prostoru V_{2x3} je rovna 6. (ano-ne)

B. Praktická část

1. Je dáno

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Určete

a) matici $\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$;

b) matici $\mathbf{E}=3\mathbf{A}-4\mathbf{B}+\mathbf{C}$;

c) matice, které jsou lineárně závislé.

Správné odpovědi

A. 1. ne 2. ano 3. ano 4. ne 5. ano

B. 1. a) $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\-1 & 0 & 2\end{bmatrix}$; 1. b) $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 10 & 15\\4 & 9 & -8\end{bmatrix}$; 1. c) $\mathbf{A},\mathbf{C}$.

V případě nesprávné odpovědi na některý z úkolů v části ***A*** nebo ***B*** testu se vraťte k příslušné učební jednotce a znovu ji prostudujte.

Doporučené úlohy pro procvičování:

S1, př. 27-31, str. 18-19.

Modul:	**3.3 Hodnost matice**

Cílem tohoto modulu je

- porozumět pojmu hodnost matice,

- naučit se určovat hodnost libovolné matice.

Učební jednotka:	**3.3.1 Definice hodnosti matice**

Příklad 17.

V jednoduchých případech lze hodnost matice určit ihned.

a) Je-li $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, pak přímo podle poznámky 3.8 b) platí $h(\mathbf{A})=0$.

b) Je-li $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$, pak podle téže poznámky a) je $h(\mathbf{A})=1$, protože vektory $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ jsou lineárně závislé (a tedy maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů je roven jedné).

c) Z téhož důvodu pro matici $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 0 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$ platí $h(\mathbf{A})=1$.

d) Hodnost matice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ určíme podle věty 3.3. Platí $h(\mathbf{A})=3$.

Učební jednotka:	**3.3.2 Určování hodnosti matice**

Příklad 18.

Vypočtěte hodnost matice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Postupujeme podle příkladu 3.7. Nuly v prvním sloupci pod prvkem a_{11} dostaneme pomocí postupných úprav zapsaných jako $\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1$. Potom je

$$\mathbf{A}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 10 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 8 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Nyní vytvoříme nulové prvky ve 2. sloupci pod hlavní diagonálou. Provedeme postupně úpravy $\mathbf{r}_3 + 4\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_4 + 3\mathbf{r}_2$. Pak je

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 38 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 38 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nyní provedeme úpravu $\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3$ a máme

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 38 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud je $h(\mathbf{A}) = 3$.

Úloha 24.

Určete hodnosti následujících matic

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 9 & -5 \end{bmatrix}.$$

Řešení: $h(\mathbf{A}) = 3, h(\mathbf{B}) = 2, h(\mathbf{C}) = 2$.

Příklad 19.

Matice **A** z příkladu 7a) je singulární. Matice **A** z příkladu 7d) a z úlohy 16 jsou regulární.

Úloha 25.

Vyšetřete regulárnost, příp. singulárnost následujících matic:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: **A,B** jsou singulární, **C** je regulární.

Příklad 20.

Je dána matice **A** s parametrem $\lambda \in R$ tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vyšetříme, jak její hodnost závisí na parametru λ. Úpravou na trojúhelníkový tvar dostaneme postupně

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda+3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda+3 \\ 0 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix}.$$

Je-li $\lambda = -5$, pak je $h(\mathbf{A}) = 2$. V opačném případě je $h(\mathbf{A}) = 3$.

TEST 7

A. Teoretická část

Vyberte správnou odpověď ano-ne.

1. Neexistují matice s nulovou hodností. (ano-ne)
2. Matice typu 3x4 má hodnost nejvýše 3. (ano-ne)
3. Ekvivalentní matice jsou si vždy rovny. (ano-ne)
4. Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice je roven maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých sloupců. (ano-ne)
5. Každou matici lze upravit na trojúhelníkový tvar. (ano-ne)
6. Existuje matice typu 3x5, která je regulární. (ano-ne)
7. Má-li čtvercová matice dva řádky stejné, je singulární. (ano-ne)

B. Praktická část

1. Určete hodnost matice **A,** je-li

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Vypočtěte hodnost matice **A**, je-li

$$\text{a) } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & -3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 0 & 4\\ 7 & -4 & 0 & 4\end{bmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{bmatrix}.$$

3. Vyšetřete regulárnost, příp. singulárnost, matice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}12 & -7 & 15\\ 10 & 3 & 10\\ -1 & 7 & 1\end{bmatrix}$.

4. Určete, jak na parametrech $x, y \in R$ závisí hodnost, příp. regulárnost matice **A**, kde

$$\text{a) } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ x & x+5\end{bmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ y & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Správné odpovědi

A. 1. ne 2. ano 3. ne 4. ano 5. ano 6. ne 7. ano

B. 1.a) $h(\mathbf{A})=1$; 1.b) $h(\mathbf{A})=3$; 2.a) $h(\mathbf{A})=2$; 2.b) $h(\mathbf{A})=4$; 3. **A** je regulární;

4.a) pro $x = 5$ je $h(\mathbf{A}) = 1$ a matice **A** je singulární; pro $x \neq 5$ je $h(\mathbf{A}) = 2$ a matice **A** je regulární;

4.b) pro $y=-\frac{3}{2}$ je $h(\mathbf{A}) = 2$ a matice **A** je singulární pro $y \neq -\frac{3}{2}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$ a **A** je regulární.

Doporučené úlohy pro procvičování:

Modul:	**3.4 Násobení matic**

Cílem tohoto modulu je

- zvládnout operaci násobení matic,
- seznámit se s vlastnostmi operace násobení matic.

Učební jednotka:	**3.4.1 Součin matic**

Příklad 21.

Vypočtěme součiny **AB** a **BA** matic $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

Matice **A** je typu *2x3*, matice **B** je typu *2x2*. Protože počet sloupců matice **A** není roven počtu řádků matice **B**, není součin **AB** definován.

Součinem matic **BA** je matice typu 2x3, přičemž platí

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & -7\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3)2+5.1 & (-3).3+5.0 & (-3)(-7)+5.4\\ 1.2+2.1 & 1.3+2.0 & 1(-7)+2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -9 & 41\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Úloha 26.

Jsou dány matice **A** typu *2x3*, matice **B** typu *4x2* a matice **C** typu *3x4*. Rozhodněte, které ze šesti možných součinů těchto matic jsou definovány a určete typ výsledné matice.

Řešení: Jsou definovány součiny **AC** typu *2x4*, **BA** typu *4x3* a **CB** typu *3x2*.

Úloha 27.

Vypočtěte součin matic **AB**, je-li

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 7\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}3 & 11\\ 8 & 4\\ 32 & -4\end{bmatrix}$.

Učební jednotka:	**3.4.2 Vlastnosti operace násobení matic**

Úloha 28.

Pro dané matice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

spočtěte výrazy **A(BC)**, **(AB)C**, **A(B+C)**, **AB**+**BC** a výsledky

Řešení: $\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)C} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 66 & -24 \end{bmatrix}.$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 33 & -9 \end{bmatrix}.$$

TEST 8

A. Teoretická část

Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá či nepravdivá:

1. Součin **AB** matic **A** a **B** lze spočítat pro libovolné matice **A**,**B**. (ano-ne)
2. Násobení matic je komutativní operace. (ano-ne)
3. Ke každé čtvercové matici **A** existuje matice **X** tak, že platí **AX** = **A**. (ano-ne)
4. Pro matice **A**,**B** stejného typu a pro libovolné reálné číslo r platí
   $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$. (ano-ne)
5. Pro čtvercové matice **A**,**B**,**C** řádu n vždy platí
   $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$. (ano-ne)

B. Praktická část

1. Vypočtěte součin matic $\begin{bmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$
2. Pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ vypočtěte $\mathbf{A}^4$.
3. Vypočtěte součin matic (**AB**)**C** pro matice
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
4. Vypočtěte matici **A**(**B**+**C**), je-li
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Určete hodnoty x,y tak, aby platila rovnost matic

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Správné odpovědi

A. 1. ne 2. ne 3. ano 4. ano 5. ano

B. 1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$ 2. $\mathbf{A}^4=\begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $x=3, y=-1$

Doporučené úlohy pro procvičování:

S1, př. 34,35,36 na str. 20-22.

CVIČENÍ 2

Test TAA obsahuje příklady, jejichž řešení zašlete v dohodnutém termínu svému tutorovi. Správné a včasné vyřešení testu je podmínkou pro udělení zápočtu.

1. Napište matici $\mathbf{A}=(a_{ij})$ typu 3x3, pro jejíž prvky platí

   $a_{ij}=0$ pro $i=j$,

   $a_{ij}=-1$ pro $i<j$,

   $a_{ij}=1$ pro $i>j$.

2. Rozhodněte platí-li **A** = **B**, je-li

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sin^2+\cos^2\alpha & \sin 2\pi \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos(-\pi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin 2\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Určete x,y tak, aby matice **A** byla transponovaná k matici **B**, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x-5y \\ 2x+3y & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. Určete matici **C** = 2**A** – 3**B** + 4**E**, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 7 \\ 16 & -12 & 5 \\ 7 & -8 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -17 & 13 & 25 \\ -9 & 0 & -12 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

a **E** je jednotková matice řádu 3.

5. Určete hodnost matice **A**, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -8 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 8 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

6. Rozhodněte, zda je matice **A** regulární nebo singulární, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

7. Rozhodněte, zda matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tvoří bázi v prostoru všech čtvercových matic řádu 2 (tj. v prostoru V_{2x2}).

8. Vypočtěte součin matic **AB**, je-li $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

9. Pro matice **A**, **B**, **C** vypočtěte součiny (**AB**)**C** a **A**(**BC**)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Určete matici 7**A** – 3**B** + 2**C** pro matice **A**,B,**C** z předchozího příkladu.

DODATKY KE KAPITOLE 3

Klíčová slova:

matice, řádkový vektor, sloupcový vektor, hlavní a vedlejší diagonála;
druhy matic: nulová, čtvercová, obdélníková, jednotková, diagonální, transponovaná, symetrická, trojúhelníková;
početní operace s maticemi: rovnost, součet, rozdíl, násobení matice reálným číslem, součin matic;
hodnost matice, regulární a singulární matice, zaměnitelnost matice

Doporučená literatura pro hlubší studium:

DOLANSKÝ, P. a kol. *Matematika pro distanční studium.* 1. vyd. Plzeň: ZUČ, 2000, 196 s., ISBN 80-7082-643-6, strany 50-60.