Cvičení 5-6- PS
Derivace funkce

2. listopadu 2006

Příklady z textu J. Dočkal : Matematika I- řešené příklady - učební text kombinovaného studia FSI VUT Brno - www.fme.vutbr.cz/opory/ na str. 36 - 39.

Otázky a úlohy

1. Uveďte přesnou definici derivace funkce.
2. Co jsou tečna a normála ke grafu funkce? Odvoďte jejich rovnice.
3. Co jsou jednostranné derivace?
4. Co je nevlastní derivace?
5. Uveďte vzorce pro derivování součtu a rozdílu funkcí.
6. Uveďte větu pro derivování složené funkce.
7. Uveďte větu pro derivování inverzní funkce.
8. Co je logaritmická derivace a k čemu slouží?
9. Uveďte větu o ryze monotónní funkci v bodě.
10. Uveďte Rolle‘ovu větu.
11. Uveďte Cauchy‘ovu větu o střední hodnotě.
12. Uveďte Lagrange‘ovu větu o střední hodnotě.
13. Uveďte větu o monotónní funkci na intervalu.

14. Co jsou vyšší derivace?
15. Uveďte Leibnitzův vzorec pro n-tou derivaci.
16. Uveďte l‘Hospitalovo pravidlo.
17. Vysvětlete postup při výpočtu limit neurčitých výrazů typu $0 \cdot \infty$ a $\infty - \infty$.
18. Vysvětlete postup při výpočtu limit neurčitých výrazů typu $0^0, 1^\infty, \infty^0$.
19. Co je střed oscilační kružnice grafu funkce a jak se odvodí vzorce pro výpočet jeho souřadnic?
20. Jak se definuje pojem křivka v rovině a co jsou její parametrické rovnice?
21. Odvoďte rovnice tečny a normály ke křivce dané parametricky.
22. Jak se odvozují rovnice tečny a normály k polárnímu grafu funkce?
23. Co je směrový úhel tečny polárního grafu funkce a jak se odvodí?
24. Co je polární subtangenta, polární subnormály, délka polární tečny, délka polární norály a jak se odvodí vzorce pro jejich velikost?
25. Odvoďte vzorce pro poloměr křivosti polárního grafu funkce.
26. Jak se odvozují parametrické rovnice evoluty?
27. Co je cykloida a jak se odvodí její parametrická rovnice?
28. Co je evolventa a jak se odvodí její parametrická rovnice?
29. Co je Archimedova, hyperbolická a logaritmická spirála a jaké jsou jejich základní vlastnosti?
30. Definujte pojem derivace vektorové funkce jedné reálné proměnné.
31. Odvoďte vztah pro derivování skalárního součinu dvou vektorových funkcí.
32. Odvoďte vztah pro derivování velikosti vektorové funkce.
33. Odvoďte vztah pro derivování vektorového součinu dvou vektorových funkcí.

Cvičení

1. Vypočítejte přímo podle definice derivaci f' funkce f v bodě α.

   (a) $f(x) = -5x^2 + 6x + 3, \alpha = x,$

   $$[f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(x+h)^2+6(x+h)+3-(-5x^2+6x+3)}{h} = -10x + 6]$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}, \alpha = 2u,$

   $$[f'(2u) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{(2u+h)^2+3}-\sqrt{4u^2+3}\right)\left(\sqrt{(2u+h)^2+3}+\sqrt{4u^2+3}\right)}{h\left(\sqrt{(2u+h)^2+3}+\sqrt{4u^2+3}\right)} =$$

   $$= \frac{2u}{\sqrt{(4u^2+3)}}]$$

   (c) $f(x) = x^3 \sin(x - \frac{\pi}{4}), \alpha = \frac{\pi}{4},,$

   $$[f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{\pi}{4}+h\right)^3 \sin h - \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \sin 0}{h} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3]$$

   (d) $f(x) = (x - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \alpha = 1.$

   $$[f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{h \arcsin \sqrt{\frac{1+h}{2+h}}}{h} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}]$$

2. Vypočítejte derivaci f' funkce f a určete její definiční obor.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}},$ $\quad [f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\ ,\ x \neq 0]$

   (b) $f(x) = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}},$ $\quad [f'(x) = \frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}\ ,\ x > 0]$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}},$

   $$[f'(x) = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \sin^2 x\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \sin x \cos x,\ \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}]$$

   (d) $f(x) = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}.$ $\quad [f'(x) = -\frac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}},\ \mathcal{D}(f') = \mathbb{R}]$

3. Vypočítejte derivaci f' funkce f.

   (a) $f(x) = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$ $\quad [\frac{e^{3x} \cdot \cos \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}{(1+e^{6x}) \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}} \cdot \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}}]$

   (b) $f(x) = f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2 + 2x}}$ $\quad [\frac{x+1}{8 \cdot \sqrt[4]{(\arcsin \sqrt{x^2+2x})^3} \cdot \sqrt{1-x^2-2x} \cdot \sqrt{x^2+2x}}]$

   (c) $f(x) = f(x) = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$ $\quad [\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}} \cdot (2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)} \cdot (ax^2+bx+c)}]$

   (d) $f(x) = f(x) = \arcsin^2(\ln(a^3 + x^3))$ $\quad [\frac{6x^2 \arcsin\left[\ln\left(a^3+x^3\right)\right]}{(a^3+x^3) \cdot \sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}]$

4. Nechť je dána funkce f. S použitím logaritmického derivování nalezněte funkci v.

   (a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad v(x) = x^2 f'(x) - x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x),$
   $[f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x}\ln x\right)', \; v(x) = 0]$

   (b) $f(x) = x^{\sin x}, \quad v(x) = \frac{f'(x)}{x^{\sin x}} - \cos x \ln x,$
   $[\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]' = (\sin x \ln x)', \; v(x) = \frac{\sin x}{x}]$

   (c) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x, \quad v(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x f'(x) - \ln \frac{x}{x+1}.$
   $[\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]' = \left[x \ln \frac{x+1}{x}\right]', \; v(x) = \frac{1}{x+1}]$

5. Určete intervaly, v nichž je funkce f ryze monotonní.

   (a) $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$, [roste $(0,1)$, (e^2, ∞), klesá $(1, e^2)$]

   (b) $f(x) = e^{2x} + 2e^{3-x}$, [roste $(1, \infty)$, klesá $(-\infty, 1)$]

   (c) $f(x) = 2x \operatorname{arccotg} x + \ln(1 + x^2) - \pi x$,
   [roste $(-\infty, 0)$, klesá $(0, \infty)$]

   (d) $f(x) = x(1 - \ln x)^2$. [roste $\left(0, \frac{1}{e}\right), (e, \infty)$, klesá $\left(\frac{1}{e}, e\right)$]

6. Určete intervaly v nichž je funkce f monotónní.

   (a) $f(x) = x - e^x$, [roste $(-\infty, 0)$, klesá $(0, -\infty)$]

   (b) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, [roste $(-\infty, -1), (1, \infty)$, klesá $(-1, 1)$]

   (c) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, [roste $(-\infty, \infty)$]

   (d) $f(x) = x\sqrt{ax - x^2}, a > 0$. [roste $\left(0, \frac{3}{4}a\right)$, klesá $\left(\frac{3}{4}a, a\right)$]

7. Dokažte správnost nerovností. (Ve všech případech použijte větu o monotonní funkci na intervalu.)

   (a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad (x > 1)$, $[f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}, f(1) = 0; \; f'(x) =$
   $= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} > 0$ pro $x > 1 \Rightarrow f$ roste v $(1, \infty)$ a tedy $f(x) > f(0)]$

   (b) $e^x > 1 + x, \quad (x \neq 0)$, $[f(x) = e^x - 1 - x, f(0) = 0;$
   $f'(x) = e^x - 1 = 0$; klesá v $(-\infty, 0)$ a roste v $(0, \infty) \Rightarrow$
   $f(x) > 0$ pro $x > 0$ a $f(0) < f(x)$ pro $x > 0]$

   (c) $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$,
   $[f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$, $f(0) = 0$; klesá v $(-\infty, 0)$,
   roste v $(0, \infty) \Rightarrow f(x) > 0$ pro $x < 0$ a $f(0) < f(x)$ pro $x > 0]$

(d) $x > \ln(1+x), \quad (x > 0).$ $\quad [f(x) = x - \ln(1+x),\ f(0) = 0;$
$f'(x) = \frac{x}{1+x} > 0$ pro $x > 0 \Rightarrow f$ roste v $(0, \infty)]$

8. Nalezněte n-tou derivaci $f^{(n)}$ funkce f, kde

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad [f^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^{-n+\frac{1}{2}}]$

(b) $f(x) = e^{ax+b}$, $\quad [f^{(n)} = a^n e^{ax+b}]$

(c) $f(x) = \sin^2 x$, $\quad [f^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)]$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$, $\quad [f^{(n)} = (-1)^n \cdot n\,!\,[(x-2)^{-n-1} + (x-1)^{-n-1}]]$

(e) $f(x) = xe^x$, $\quad [f^{(n)} = (n+x)e^x]$

(f) $f(x) = x \ln x$, $\quad [f^{(n)} = (-1)^n (n-2)\,!\frac{1}{x^{n-1}}$, pro $n \geq 2]$

(g) $f(x) = e^{ax}$, $\quad [f^{(n)} = a^n e^{ax}]$

(h) $f(x) = \log_a x$, $\quad [f^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)\,! \cdot \frac{1}{\ln a \cdot x^n}]$

(i) $f(x) = e^{-x}$, $\quad [f^{(n)} = (-1)^n e^{-x}]$

(j) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. $\quad [f^{(n)} = \frac{2(-1)^n n\,!}{(1+x)^{n+1}}]$

9. Pomocí Leibnizovy formule formule vypočítejte $f^{(k)}$, kde

(a) $f(x) = e^x \cos x,\ k = 5$, $\quad [4e^x(\sin x - \cos x)]$

(b) $f(x) = x^3 \ln x,\ k = 4$, $\quad [\frac{6}{x}]$

(c) $f(x) = x^4 e^{2x},\ k = 6$, $\quad [32e^{2x}\,(2x^4 + 24x^3 + 90x^2 + 120x + 45)]$

(d) $f(x) = (x^2+1)\sin x,\ k = 20$. $\quad [-379 \sin x - 40x \cos x + x^2 \sin x]$

10. Nalezněte první a druhou derivaci v bodě (α, β) funkce $y(x)$ dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, kde

(a) $F(x, y) = y^3 + x^3 - 3axy,\ (\alpha, \beta) = \left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$,
$[y'\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{-3x^2+3ay(x)}{3y^2(x)-3ax} = -1,\ y''\left(\frac{3a}{2}\right) = \frac{-6y[y']^2-6x+6ay'}{3y^2-3ax} = -\frac{32}{3a}]$

(b) $F(x, y) = y - 1 - xe^y,\ (\alpha, \beta) = (-1, 0)$, $[y'(-1) = \frac{1}{2},\ y''(-1) = \frac{3}{8}]$

(c) $F(x, y) = e^y + xy - e,\ (\alpha, \beta) = (0, 1)$, $\quad [y'(0) = -\frac{1}{e},\ y''(0) = \frac{1}{e^2}]$

11. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity

(a) $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, $\quad [\frac{1}{3}]$

(b) $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2xe^x - 3e^x + 3 + x}{(e^x - 1)^2}$, $\quad [\frac{1}{2}]$

(c) $l = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 \ln x)$, $[0]$

(d) $l = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$, $[\infty]$

(e) $l = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, $[\frac{1}{2}]$

(f) $l = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{cotg}\pi x}$, $[-4]$

(g) $l = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, $[1]$

(h) $l = \lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$, $[e]$

(i) $l = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$, $[1]$

(j) $l = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$. $[1]$

12. Nalezněte asymptoty funkce f. K výpočtu limit použijte lříslušná l'Hospitalova pravidla.

(a) $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$, $[x = 0,\ y = x + 3]$

(b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$, $[x = 0,\ y = x]$

13. Nalezněte rovnice tečny a normály ke grafu $y = f(x)$ funkce f v bodě $(\alpha, f(\alpha))$.

(a) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$, $\alpha = 0$ $[t : y - 1 = \frac{1}{2}x,\ n : y - 1 = -2x]$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\alpha = -1$

$[t : y + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x + 1),\ n : y + \frac{\pi}{4} = -2(x + 1)]$

14. Určete, ve kterém bodě $(\alpha, f(\alpha))$ má graf funkce f tečnu svírající s osou O_x úhel $\frac{\pi}{4}$.

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $[f'(\alpha) = 1 \Rightarrow (\alpha, f(\alpha)) = (1, 0)]$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[f'(\alpha) = 1 \Rightarrow (\alpha, f(\alpha)) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$

15. Nalezněte normálu ke grafu funkce f dané vztahem $f(x) = x \ln x$ tak, aby byla rovnoběžná s přímkou p danou rovnicí $2x - 2y + 3 = 0$.

$[k_p = 1 = k_n,\ k_n = -\frac{1}{f'(\alpha)} = -\frac{1}{\ln\alpha+1} \Rightarrow \alpha = e^{-2},\ n : y = x - \frac{3}{e^2}]$

16. Nalezněte rovnice tečen k hyperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ kolmých na přímku $p > 2x + 4y - 3 - 0$.

[$k_p = -\frac{1}{2}$, $k_t = 2$; $y'(x) = \frac{7x}{2y(x)}$. Pro body dotyku $(\alpha, f(\alpha))$ musí platit $7\alpha^2 - 2y^2(\alpha) - 14 = 0$, $y'(x) = \frac{7x}{2y(x)} = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 4$. $t_1 : y - 7 = 2(x - 4)$, $t_2 : y + 7 = 2(x + 4)$]

17. Nalezněte úhel, pod kterým se protínají grafy funkcí f, g, kde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 2 - \sqrt{x}$.

[Jedná se o úhel, který svírají tečny obou křivek v průsečíku (α, β). Pro průsečík platí $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 2 - \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha = 1$. $f'(1) = -\frac{1}{2}$, $g'(1) = -\frac{1}{2}$. Grafy se protínají pod nulovým úhlem (jsou tečné).]

18. Vypočítejte délku tečny $|AT|$ a normály $|AN|$ a orientované velikosti s_n, s_t subnormály a subtangenty ke grafu funkce $f(x) = 2^x$ v bodě $A = (1, 2)$.

[$f'(1) = 2\ln 2$, $s_t = \frac{1}{\ln 2}$, $s_n = 4\ln 2$, $|AT| = \frac{1}{\ln 2}\sqrt{1 + 4\ln^2 2}$, $|AN| = 2\sqrt{1 + 4\ln^2 2}$]

19. Vypočítejte součet orientované velikosti subtangenty s_t a velikosti tečny $|AT|$ ke grafu funkce $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ v libovolném bodě $A = (\alpha, \beta)$, kde $\beta = f(\alpha) = \ln(\alpha^2 - 1)$.

[$f'(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}$. Dostáváme $s_t + |AT| = \frac{\beta}{2\alpha}(\alpha^2 - 1) + \sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)^2}} = |\alpha\beta|$ (využili jsme zde skutečnost, že $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ a tudíž $\alpha^2 - 1 > 0$).]

20. Barometrický tlak p se mění s výškou h podle zákona $\ln \frac{p}{p_0} = ch$, kde p_0 je normální tlak. Ve výšce 5540 m tlak dosahuje polovinu normálního tlaku. Udejte rychlost změny barometrického tlaku v závislosti na změně výšky.

[$p(h) \ldots$ závislost tlaku na výšce, hledáme $p'(h)$. Platí $p = p_0 e^{ch} \Rightarrow \frac{1}{2}p_0 = p_0 e^{c \cdot 5540} \Rightarrow c = -\frac{\ln 2}{5540}$; $p = p_0 e^{ch} \Rightarrow p'(h) = c p_0 e^{ch} \Rightarrow p'(h) = -\frac{\ln 2}{5540} p(h) \Rightarrow p'(h) = -\frac{\ln 2}{5540} p_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{h}{5540}} = -\frac{p_0 \ln 2}{5540} 2^{-\frac{h}{5540}}$.]

21. Předpokládáme, že objem kmene je úměrný třetí mocnině jeho průměru a že průměr roste rovnoměrně z roku na rok. Kolikrát je větší rychlost růstu objemu v čase, kdy průměr je 90 cm než v čase, kdy průměr je 18 cm?

[Označení: $d \dots$ průměr, $t \dots$ čas, $t_{90}, t_{18} \dots$ časy, kdy průměr je 90 cm a 18 cm, $k, l \dots$ konstanty úměrnosti, $O(t) \dots$ objem v čase, $v(t) = O'(t) \dots$ rychlost růstu objemu. Platí $O = kd^3$, $d = lt \Rightarrow O = kl^3t^3 \Rightarrow v(t) = 3kl^3t^2$. Hledaná veličina:$v\left(t_{90}\right) : v\left(t_{18}\right) = 25$.]

22. Muž vysoký 1,7 m se vzdaluje rychlostí 6,34 km/h od lampy, která je 3 m nad úrovní ulice. Jakou rychlostí se pohybuje stín hlavy?

[Označení: $a(t) \dots$ dráha muže v závislosti na čase t, $b(t) \dots$ dráha stínu. Hledanou veličinou je zřejmě $b'(t)$. Platí $a(t) = 6,34 \cdot t$. Z podobnosti $\frac{b}{3} = \frac{b-a}{1{,}7} \Rightarrow b = \frac{3}{1{,}3}\, a = \frac{3 \cdot 6{,}34}{1{,}3}\, t \Rightarrow b'(t) = 14,63$ km/h.]

23. Rozklad chemické látky v reakci probíhá podle zákona $m = m_0 e^{-kt}$, kde m je množství (nerozložené) látky v časovém okamžiku t, m_0 je počáteční množství látky, k je kladná konstanta. Nalezněte rychlost v reakce jako funkci množství látky a vysvětlete, co je rychlost reakce.

$v(t) = m'(t) = -km_0e^{-kt} = -km$, okamžitá změna množství— m

24. Síla P působící na hmotný bod je nepřímo úměrná rychlosti v pohybu bodu. Jak závisí kinetická energie E bodu na čase ?

[Označení: $v(t) \dots$ rychlost hmotného bodu o hmotnosti m v čase t, $a(t) \dots$ zrychlení, $k \dots$ konstanta úměrnosti. Platí $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$. $P(t) = m \cdot a(t) = m \cdot v'(t) = \frac{k}{v(t)} \Rightarrow m \cdot v(t)v'(t) = k \Rightarrow$ $m\left[\frac{v^2(t)}{2}\right]' = k \Rightarrow \frac{m \cdot v^2(t)}{2} = kt + c$, kde c je libovolná konstanta. Závislost je tedy lineární.]