

Faktorová analýza je metoda pro určení počtu a povahy základních proměnných, které jsou mezi velkým množstvím údajů měření. Stručněji řečeno – faktorová analýza je metodou pro určení k základních proměnných (faktorů) z n řad údajů měření, přičemž k je menší než n . Lze ji též nazvat metodou extrahování společných faktorových rozptylů z řad údajů měření.

Faktorová analýza je věcí vědecké úspornosti. Obecně řečeno – měří-li dva testy tutéž věc, můžeme skóre z nich získaná sečítat. Jestliže na druhé straně každý test měří něco jiného, nelze jejich skóre sečítat. Faktorová analýza nám skutečně řekne, které testy nebo údaje měření lze sečítat a studovat spíše dohromady než odděleně. Stanoví tak proměnné, jimiž se vědec musí zabývat. Pomáhá také úspěšně vědci postihnout a identifikovat společné nebo podstatné vlastnosti, které jsou v základě testů a údajů měření.

Faktor je konstrukt, hypotetická entita, o níž se předpokládá, že je základem testu a testového výkonu. Bylo zjištěno, že základem inteligence je několik faktorů např. verbální schopnost, početní schopnost, abstraktní úsudek, prostorová představivost, paměť apod. Podobně byly izolovány a identifikovány faktory speciálních schopností, postojů a osobnosti.

SMYŠLENÝ PŘÍKLAD

Předpokládejme, že provedeme šest testů na velkém počtu žáků sedmého ročníku. Předpokládejme, že těchto šest testů neměří šest, ale o něco méně proměnných. Testy jsou: *slovník*, *čtení*, *synonyma*, *počty*, *aritmetika* (standardizovaný test), *aritmetika* (učitelem sestavený test). Názvy těchto testů vyjadřují jejich povahu. Označíme je podle názvů: *SL*, *C*, *S*, *P*, *AS*, *AU*. (Poslední dva testy, ačkoliv jsou oba aritmetické, mají různý obsah a spolehlivost. Máme dobrý důvod, abychom oba zařadili do naší malé testové baterie.) Když tyto testy provedeme a vyhodnotíme, spočítáme koeficienty korelace každého testu s každým. Zaneseme všechna r do korelační matice (obvykle nazývané *R*-matice). Matice je uvedena na tabulce 36.1.

Připomeňme si, že matice je jakékoliv pravoúhlé uspořádání čísel (nebo symbolů). Korelační matice jsou vždy čtvercové a symetrické. Je to proto, že dolní polovina

matice pod úhlopříčkou (jdoucí z levého horního rohu do pravého dolního) je stejná jako horní polovina matice. To znamená, že koeficienty v dolní polovině jsou identické s koeficienty v horní polovině s výjimkou jejich uspořádání. (Všimněte si, že první řádek je stejný jako první sloupec, druhý řádek je stejný jako druhý sloupec atd.)

Tabulka 36.1. *R*-matice: koeficienty korelace mezi šesti testy.

		SL	C	S	P	AS	AT
seskupení I	SL	0,72	0,63	0,09	0,09	0,09	0,00
	C	0,72	0,57	0,15	0,16	0,09	
	S	0,63	0,57	0,14	0,15	0,09	
seskupení II	P	0,09	0,15	0,14	0,57	0,63	
	AS	0,09	0,16	0,15	0,57	0,72	
	AU	0,00	0,09	0,09	0,63	0,72	

Náš problém lze vyjádřit dvěma otázkami: Kolik proměnných nebo faktorů existuje? Co jsou faktory? O faktorech předpokládáme, že jsou základními jednotkami, které postihují testové výkony. Odrážejí se v korelačních koeficientech. Koreluje-li podstatně dva nebo více testů, pak testy obsahují společný rozptyl. Mají tzv. společný faktorový rozptyl (rozptyl společného faktoru). Měří něco společného.

Na první otázku lze v našem příkladě snadno odpovědět. Existují zde dva faktory. Je to znázorněno dvěma seskupeními r_1 a r_2 , které jsou dány do kruhů a označeny čísly I a II v tabulce 36.1. Všimněte si, že *SL* koreluje s *C* 0,72; *SL* se *S* 0,63; *C* se *S* 0,57. Zdá se, že *SL*, *C* a *S* měří něco společného. Podobně *P* koreluje s *AS* 0,57 a s *AU* 0,63; *AS* koreluje s *AU* 0,72. *P*, *AS* a *AU* měří také něco společného. Je nicméně důležité si všimnout, že testy v seskupení I, ačkoliv jsou vzájemně interkorelovány, nekorelují v příliš velkém rozsahu s testy v seskupení II. Podobně *P*, *AS* a *AU*, ačkoliv jsou navzájem interkorelovány, nekorelují podstatně s testy *SL*, *C* a *S*. To, co je měřeno jako společné testy seskupení I, evidentně není totéž jako to, co je měřeno jako společné testy seskupení II. Ukazuje se tedy, že jsou v matici dvě seskupení či faktory.¹

Vyšetřením *R*-matice jsme určili, že za testovými údaji jsou dva faktory, které jsou jejich podkladem. Druhá otázka (co jsou tyto faktory?) je téměř vždy obtížnější. Když

* Anglické „cluster“ zde překládáme jako „seskupení“; v jiných českých publikacích se též vyskytuje překlad slovy „trž“, „shluk“, „skupina“, „chumáč“, někdy i „klastř“.

¹ V tomto podání užíváme jistých zjednodušení a poněkud neskutečných příkladů. Např. *R*-matice tabulky 36.1 je smyšlená. Přestože všechny testy jsou pozitivně korelovány, dají se zde pravděpodobně rozlišit dva faktory. Kromě toho seskupení nejsou totéž co faktory, i když jsou faktorům podobné. Pro jednoduchost a didaktické cíle však připouštíme tyto nesrovnalosti.

se ptáme, co je obsahem faktorů, hledáme pro ně pojmenování. Chceme mít *konstrukty*, jež vysvětlí základní jednotu nebo společný faktorový rozptyl faktorů. Ptáme se, co je společné testům *SI*, *C* a *S* na jedné straně a testům *P*, *AS* a *AU* na straně druhé. *SI*, *C* a *S* jsou testy slovníku, čtení a synonym. Všechny tři se týkají do značné míry operování se slovy. Možná, že faktor, který je v pozadí, je *verbální schopnost*. Nazveme tedy tento faktor *verbální* nebo *V*. Testy *P*, *AS* a *AU* obsahují početní nebo aritmetické operace. Můžeme tedy nazvat tento faktor *aritmetický*. Kolega nás však upozorní, že test *P* ve skutečnosti neobsahuje aritmetické operace, protože převážně spočívá v nearitmetické manipulaci s čísly. Snažíme se tedy znovu údaje prověřit, abychom mohli zjištěnou základní jednotu tří testů pojmenovat. Buď jak buď, nazveme nyní tento faktor *numerickým* nebo *číselným*, tedy *N*. Není zde žádná nedůslednost: všechny tři testy obsahují čísla a číselné manipulace a operace.

Obě otázky jsme zodpověděli: existují zde dva faktory, které jsme nazvali *verbální* (*V*) a *numerický* (*N*). Musíme však rychle a naléhavě zdůraznit, že žádnou otázku nelze tak definitivně zodpovědět ve skutečném výzkumu pomocí faktorové analýzy. Platí to zvláště pro počátky zkoumání dané oblasti. Počet faktorů se může měnit v dalších výzkumech, i když užívají týchž testů. Jeden z testů faktoru *V* může také mít nějaký společný rozptyl s jiným faktorem, řekněme *K*. Jestliže k matici přidáme test měřící *K*, objeví se třetí faktor. Snad ještě závažnější je, že může být nesprávný název faktoru. Další výzkumy užívající testů *V* a jiných testů mohou ukázat, že *V* nyní není společné všem těmto testům. Badatel musí pak najít jiný konstrukt, jiný zdroj společného faktorového rozptylu. Zkratka, názvy faktorů jsou tentativní; jsou to hypotézy, které musí být ověřovány v dalším faktorově analytickém výzkumu a v jiných typech výzkumů.

FAKTOROVÉ MATICE A FAKTOROVÉ NÁBOJE

Jestliže test měří jen jeden faktor, říkáme, že je faktorově „čistý“. Říkáme, že test je *nasyčen* nebo *nabit* faktorem do té míry, nakolik měří daný faktor.* Faktorová analýza ve skutečnosti není ukončena, dokud nevíme, zda test je faktorově čistý, a jak je nasyčený faktorem. Samozřejmě bychom chtěli vědět – není-li test faktorově čistý – jakými jinými faktory je nasyčen. Je-li test nasyčen více než jedním faktorem, říkáme, že je *faktorově komplexní* – nebo prostě – že je to faktorový komplex.

Některé testy a měřítka jsou faktorově dosti komplexní. Dobrymi příklady jsou Stanford-Binetův inteligenční test, Otisovy inteligenční testy a škála *F* (autoritářství). Požadavkem vědeckého výzkumu je, abychom měli čisté míry proměnných. Není-li test numerické schopnosti faktorově čistý, jak můžeme mít důvěru, že vztah mezi numerickou schopností a školním výkonem je skutečně tím vztahem, jaký máme na

* Termín „nasyčen“ je překladem anglického „saturated“; „nabit“ je překladem anglického výrazu „loaded“.

mysli? Jestliže test měří jak numerickou schopnost, tak verbální úsudek, pak vztahy objevené použitím testu jsou uvedeny v pochybnost.

Abychom měli pomoc k vyřešení těchto a jiných problémů, potřebujeme víc než kontrolní metodu použitou k analýze tabulky 36.1. Faktorové fakty nejsou obvykle tak samozřejmé jako v tomto zjednodušeném příkladě. Potřebujeme objektivní metodu k určení (1) počtu faktorů, (2) testů nasyčených nebo nabitých různými faktory (seskupení) a (3) metodu k určení velikosti nasycení nebo nábojů. Existuje několik faktorově analytických metod, které splňují tyto cíle. Pojďme o některých z nich později v této kapitole.

Tab. 36.2. Faktorová matice dat tabulky 36.1, rotované řešení

testy	A	B	C	h^2
<i>SI</i>	0,86	0,00	0,03	0,74
<i>C</i>	0,83	0,09	0,11	0,71
<i>S</i>	0,75	0,10	-0,09	0,57
<i>P</i>	0,10	0,75	-0,09	0,57
<i>AS</i>	0,09	0,83	0,11	0,71
<i>AU</i>	0,00	0,86	0,03	0,74

Jeden z definitivních výsledků faktorové analýzy se nazývá *faktorová matice*, tj. tabulka koeficientů, která vyjadřuje vztahy mezi testy a faktory, které jsou jejich základem. Na tabulce 36.2 uvádíme faktorovou matici vzniklou na základě faktorové analýzy dat tabulky 36.1 pomocí Thurstonovy centroidní metody, jedné z několika dostupných metod.² Údaje v tabulce se nazývají *faktorové náboje*. Možná je psát a_{ij} , což znamená náboj a testu i faktorem j . 0,83 ve druhé lince je faktorový náboj testu *C* faktorem *A*.³ Ve čtvrté lince 0,75 je faktorový náboj testu *P* faktorem *B*. Test *AS* má následující náboje: 0,09 faktorem *A*, 0,83 faktorem *B* a 0,11 faktorem *C*.

Faktorové náboje (zátěže) není těžké interpretovat. Mají rozpětí od -1,00 přes 0 do +1,00 podobně jako korelační koeficienty. Podobně je též interpretujeme. Zkratka vyjadřují korelace mezi testy a faktory. Např. test *SI* má následující korelace

² L. THURSTONE, *Multiple Factor Analysis*. Chicago, University of Chicago Press 1947, kap. VIII. Ve skutečnosti centroidní metoda a většina jiných faktorově analytických metod neposkytují definitivní řešení tak jako v tabulce 36.2. Poskytují arbitrární řešení, která vyžadují tzv. „rotaci os“. O rotaci bude stručně pojednáno níže.

³ Někteří faktorově analytici označují definitivní řešení symboly I, II, ..., nebo I', II', ... V této kapitole označujeme nerotované faktory I, II, ... a rotované (definitivní řešení) faktory A, B, \dots

s faktory A , B a C : 0,86; 0,00 a 0,03. Je evidentní, že test SI má vysoký náboj A , ale ne B a C .⁴ Testy SI , C a S mají náboj faktoru A , ale ne náboje ostatních faktorů. Testy P , AS a AU mají náboj faktoru B , ale ne ostatních faktorů. Všechny testy jsou „faktorově čisté“.

Údaje v posledním sloupci se nazývají *komunalita* čili h^2 . Jsou to součty čtverců faktorových nábojů. Např. komunalita testu C je $(0,83)^2 + (0,09)^2 + (0,11)^2 = 0,71$. Komunalita testu nebo proměnné je její společný faktorový rozptyl. Objasníme to později v souvislosti s faktorovou teorií.

Tab. 36.3. Původní faktorová matice, z níž byla odvozena R -matice tab. 36.1.

Testy	A	B	h^2
SI	0,90	0,00	0,81
C	0,80	0,10	0,65
S	0,70	0,10	0,50
P	0,10	0,70	0,50
AS	0,10	0,80	0,65
AU	0,00	0,90	0,81

Než půjdeme dále, měli bychom znovu upozornit, že tento příklad je smyšlený. Faktorové matice zřídka dávají tak ostře řezaný obraz. Faktorová matice tabulky 36.2 skutečně byla „známa“. Autor nejdřív napsal matici uvedenou v tabulce 36.3. Jestliže v této matici vynásobíme každý údaj s každým, dostaneme matici R tabulky 36.1 (s hodnotami pod úhlopříčkou). V takovém případě je jen nutné násobit každý řádek každým druhým řádkem, abychom dostali R . Např. násobíme řádek SI řádkem C : $(0,90) \cdot (0,80) + (0,00) \cdot (0,10) = 0,72$; řádek SI řádkem S : $(0,90) \cdot (0,70) + (0,00) \cdot (0,10) = 0,63$; řádek S řádkem AS : $(0,70) \cdot (0,10) + (0,10) \cdot (0,80) = 0,15$ atd. Výsledná R -matice je pak faktorově analyzována.⁵

⁴ Bohužel neexistuje žádná obecně přijímaná výběrová chyba faktorových nábojů. Hrubé pravidlo říká, že lze užít výběrovou chybu r , nebo ještě lépe najít taková r , která jsou průkazná pro N naší studie. Např. pro $N = 200$ je $r = 0,18$ průkazné na 0,01 hladině průkaznosti. Někteří faktoroví analytici se v některých studiích nezabývají náboji menšími než 0,30 nebo dokonce 0,40. Jiní ano. Náboje považované za průkazné v tabulce 36.2 jsou vyznačeny kurzívou.

⁵ Tato operace násobení matic vyplývá z toho, co se nazývá základní rovnice faktorové analýzy: $R = FF'$, která říká stručně v maticové symbolice to, co bylo těžkopádněji řečeno výše. Důkladné pochopení faktorové analýzy vyžaduje dobré porozumění maticové algebře. THURSTONE k tomu napsal vynikající úvod. Viz *ibid.*, kap. II. Jiná poněkud snazší pojednání možno najít v odkazech uvedených ve studijních námětech na konci této kapitoly.

Je poučné srovnat tabulky 36.2 a 36.3 navzájem. Všimněte si rozdílů. Jsou malé. To znamená, že přibližná metoda faktorové analýzy nemůže zcela ukázat „pravou“ faktorovou matici. Je jejím odhadem. V našem případě je podoba velmi velká díky záměrné jednoduchosti problému. Skutečná data nebývají tak příhodná. A co víc, nikdy neznáme „pravou“ faktorovou matici. Kdybychom ji znali, nepotřebovali bychom metodu faktorové analýzy. Vždy jen odhadujeme faktorovou matici z korelační matice. Složitost a zálužnost výzkumných dat obvykle ztěžuje tento odhad.

Z FAKTOROVÉ TEORIE

V kap. 25 jsme uvedli rovnici, která vyjadřuje zdroje rozptylu v nějakém měření (nebo testu).

$$V_t = V_{co} + V_{sp} + V_e \quad (36.1)$$

kde V_t = celkový rozptyl měření; V_{co} = společný faktorový rozptyl, který dvě či více měř sdílí společně; V_{sp} = specifický rozptyl měř, který není společný s nějakou jinou mírou, tj. rozptyl dané míry a žádné jiné; V_e = reziduální rozptyl.*

Společný faktorový rozptyl V_{co} se dělí na dva zdroje rozptylu A a B , čili na dva faktory (viz rovnici 25.11)

$$V_{co} = V_A + V_B \quad (36.2)$$

V_A by mohl být rozptyl verbální schopnosti a V_B rozptyl numerické schopnosti.

Je to pochopitelné, máme-li na mysli součty čtverců faktorových nábojů jakého koliv testu

$$h_i^2 = a_i^2 + b_i^2 + \dots + k_i^2 \quad (36.3)$$

kde a_i^2, b_i^2, \dots jsou čtverce faktorových nábojů i -tého testu, h_i^2 je komunalita testu i . Avšak $h_i^2 = V_{co}$. Proto $V(A) = a^2$ a $V(B) = b^2$; teoretická rovnice 36.2 je tak převedena na reálné operace faktorové analýzy.

Mohou ovšem existovat víc než dva faktory. Zobecněná rovnice proto je

$$V_{co} = V_A + V_B + \dots + V_K \quad (36.4)$$

Dosazením z rovnice 36.1 dostaneme

$$V_t = V_A + V_B + \dots + V_K + V_{sp} + V_e \quad (36.5)$$

* Doslova „error variance“; překládá se i jako náhodný nebo „chybový rozptyl“. Zkratka V je z anglického „variance“.

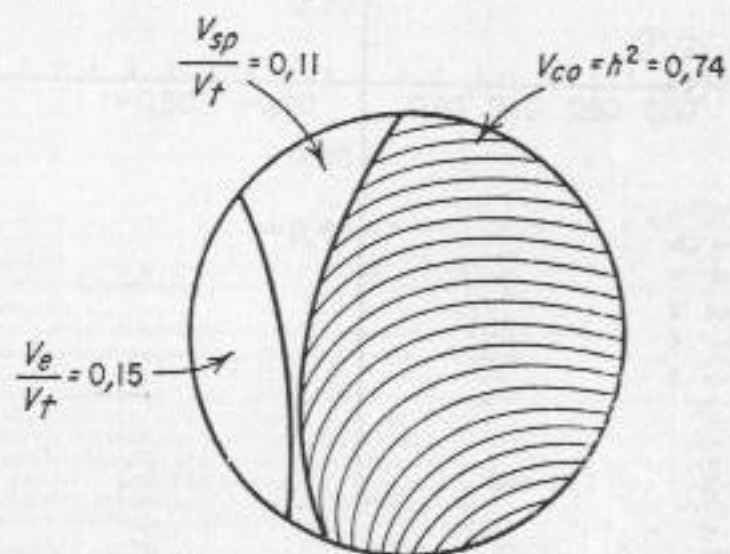
Dělíme-li rovnici výrazem V_t , dostaneme podílové znázornění

$$\frac{V_t}{V_t} = \frac{V_A}{V_t} + \frac{V_B}{V_t} + \dots + \frac{V_K}{V_t} + \frac{V_{sp}}{V_t} + \frac{V_e}{V_t} = 1,00 \quad (36.6)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r_{tt}}$

Části rovnice h^2 a r_{tt} jsou dány do závorek tak jako v kap. 25.

Rovnice spojuje těsně dohromady teorii měření a faktorovou teorii.⁶ h^2 je část celkového rozptylu, který je společným faktorovým rozptylem, r_{tt} je část celkového rozptylu, který je rozptylem spolehlivosti. V_e/V_t je podílem celkového rozptylu, který je reziduálním rozptylem. V kap. 25 nám rovnice podobná této umožnila sjednotit reliabilitu a validitu dohromady. Teď nám ukazuje vztah mezi faktorovou teorií a teorií měření. Zkrátka vidíme, že hlavním problémem faktorové analýzy je určit složky rozptylu celkového společného faktorového rozptylu.



Obr. 36.1

Vezměme test *SI* v tabulce 36.2. Pohled na rovnici 36.6 nám ukazuje mezi jiným, že reliabilita měření je větší nebo rovná komunalitě míry. Reliabilita testu *SI* pak je aspoň 0,74. Stanovme předpoklad, že $r_{tt} = 0,85$. Protože $V_t/V_t = 1,00$, můžeme dosadit do rovnice

$$\frac{V_t}{V_t} = 1,00 = \frac{h^2 = 0,74}{r_{tt} = 0,85} + \frac{V_{sp}}{V_t} + \frac{V_e}{V_t}$$

⁶ Viz GUILFORD, c.d., str. 354–357, a THURNSTONE, c.d., kap. 2.

Test *SI* má tedy vysoký podíl společného faktorového rozptylu a nízký podíl specifického rozptylu.

Podíl lze jasně vidět na kruhovém diagramu. Necht' je plocha kruhu rovná celkovému rozptylem čili 1,00 (100% kruhu) na obr. 36.1. Tři rozptyly jsou označeny výsečemi plochy kruhu. V_{co} čili h^2 je např. 74%, V_{sp} je 11% a V_e je 15% celkového rozptylu.

Faktorové analytické zkoumání zahrnující test *SI* nám něco řeklo jen o V_{co} , tj. o společném faktorovém rozptylem. Dověděli jsme se tedy o celkovém rozptylem testu, který je společným faktorovým rozptylem. Získali jsme tak klíč k povaze společného faktorového rozptylu tím, že jsme se dověděli, které jiné testy se podílejí na téměř společném faktorovém rozptylem a které ne. Obr. 25.1 v kap. 25 nám ukazuje celkový rozptyl dvou testů znázorněný dvěma kruhy. Společný faktorový rozptyl V_{co} je také označen množinovým vyjádřením $V(A \cap B)$. Specifické rozptyly a reziduální rozptyly jsou také označeny v závorkách.

GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ FAKTORŮ A FAKTOROVÝCH NÁBOJŮ

Ten, kdo studuje faktorovou analýzu, se musí naučit myslet prostorově a geometricky, má-li pochopit podstatu faktorového přístupu. Existují na to dva nebo tři dobré způsoby. Korelační tabulka může být znázorněna užitím vektorů a úhlů mezi nimi.⁷ Zde použijeme užitečnější a obecnější metodu. Hrubé údaje faktorové matice bereme jako souřadnice a vyznačíme je v geometrickém prostoru. Na obr. 36.2 jsou vyznačeny údaje faktorové matice tabulky 36.2.

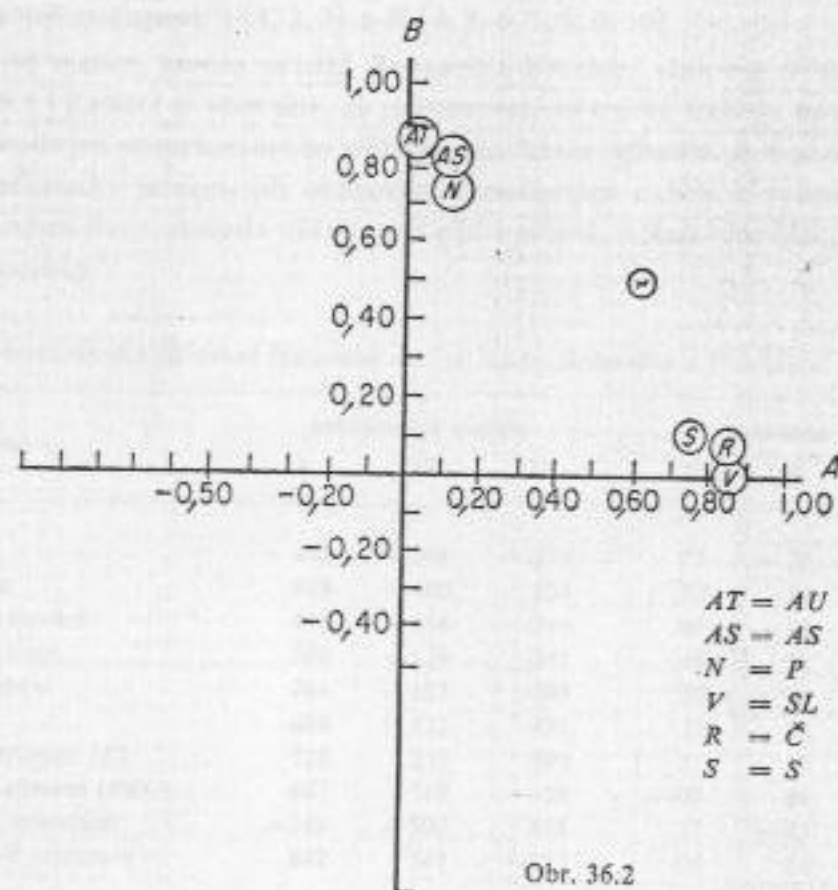
Dva faktory *A* a *B* jsou na sebe položeny kolmo. Nazývají se referenční osy. Patřičné hodnoty faktorových nábojů jsou vyznačeny na každé z těchto os. Pak jsou všechny testové náboje brány jako souřadnice a vyneseny. Např. náboje testu *C* jsou (0,83; 0,09). Vyznačíme souřadnice 0,83 na *A* a 0,09 na *B*. Tento bod je označen na obr. 36.2 zakroužkovaným písmenem označujícím test. Vyznačte podobně souřadnice zbývajících pěti testů.

Faktorovou strukturu lze nyní jasně vidět. Každý test má vysoký náboj v jednom faktoru, ale ne v druhém faktoru. Všechny jsou relativně „čistými“ mírami jim příslušejících faktorů. Sedmý bod je na obr. 36.2 označen zakroužkovaným křížkem k ilustraci předpokládaného testu, který by měřil oba faktory. Jeho souřadnice jsou (0,60; 0,50). To znamená, že test je nabit oběma faktory; faktorem *A* 0,60 a faktorem *B* 0,50. Tento test není „čistý“. Faktorové struktury tak jednoduché a jasné, že jejich faktory jsou ortogonální (osy jsou na sebe kolmé), testové náboje podstatné a „čisté“.

⁷ Vektory jsou zaměřené úsečky dané délkou. Jsou to též uspořádané soubory nebo množiny čísel. Ve dvoudimenzionálním prostoru jsou vektory např. (0,60; 0,20) a (0,10; 0,70). (0,55; 0,20; 0,10) by byl vektor v trojdimenzionálním prostoru. Protože vektory mají uspořádaná čísla, mohou být znázorněny v odpovídajícím prostoru. (0,60; 0,20) může např. být znázorněno nanášením hodnoty 0,60 na osu *X* a 0,20 na osu *Y*, přičemž osy jsou ortogonální čili k sobě kolmé.

jejichž žádný test nemá náboj dvou nebo více faktorů a které mají jen dva faktory, jsou málo běžné.

Většina publikovaných faktorově analytických studií referuje o více než dvou faktorech. Referuje se o čtyřech, pěti, dokonce devíti, desíti a více faktorech. Grafické znázornění takových faktorových struktur není samozřejmě možné v jednom grafu. Faktorová analytika obvykle vyznačují dva faktory najednou, ačkoliv je možné



vyznačit i tři. Je však nutno připustit, že je těžké názorně zobrazit nebo podržet v mysli složité n -dimenzionální struktury. Proto znázorňujeme dvoudimenzionální struktury a zobecňujeme je na n dimenzí algebraicky.

METODY FAKTOROVÉ ANALÝZY

Když stojí badatel před nutností faktorově analyzovat korelační matici, má k dispozici několik metod. Účelem této části je seznámit studenta s třemi nebo čtyřmi obecně používanými hlavními metodami. Za tím účelem stručně popíšeme dvě trsové metody, metodu hlavních faktorů a centroidní metodu. Centroidní metodu budeme ilustrovat jednoduchým příkladem. Pojednání o jiných metodách faktorové analýzy — o dia-

gonální metodě, skupinových metodách, metodách statistického odhadu atd. — přesahuje rámec této knihy. Zainteresovaný čtenář by se měl obrátit na jeden nebo dva odkazy uvedené ve studijních námětech 1 na konci kapitoly.

Je třeba poznamenat, že faktorová analýza prochází důležitým přechodným obdobím. Vznůstající dostupnost vysokorychlostních počítačů a výpočetních programů pro faktorovou analýzu činí některé z metod zastaralými. Thurstoneho velmi známá centroidní metoda bude např. za několik let asi málo používána. Je výpočetním kompromisem, jak řekl Thurstone, odstranit nesmírnou výpočetní práci uspokojivějším řešením.⁸ Není pochyb, že bude po určité době nahrazena metodou hlavních faktorů a jinými matematicky a statisticky uspokojivějšími metodami. Dosud však centroidní metoda zaujímá čestné a cenné místo mezi metodami faktorové analýzy. Bude pravděpodobně i nadále používána při řešeních pomocí ručních počítačů a pro didaktické účely.

Trsové metody. Demonstovaná metoda použitá výše v této kapitole může být nazvána trsová metoda. Trsové metody závisí na identifikaci seskupení a pravděpodobných (předpokládaných) faktorů vyhledáváním vzájemně souvisejících skupin korelačních koeficientů nebo jiných měř vztahu (např. D -měr). V tabulce 36.1 prostá prohlídka identifikuje dvě seskupení. Ve většině R -matic však seskupení nelze tak

Tab. 36.4, R -matice; studie Rokeacha a Fruchtera

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0,65	0,71	0,33	0,17	0,14	0,13	-0,13	0,22	-0,05
2	0,65		0,52	0,41	0,30	0,29	0,20	-0,08	0,31	-0,03
3	0,71	0,52		0,30	0,14	0,07	0,10	-0,14	0,11	-0,02
4	0,33	0,41	0,30		0,64	0,62	0,52	0,23	0,12	0,33
5	0,17	0,30	0,14	0,64		0,69	0,63	0,43	-0,08	0,56
6	0,14	0,29	0,07	0,62	0,69		0,54	0,35	0,02	0,40
7	0,13	0,20	0,10	0,52	0,63	0,54		0,44	-0,22	0,62
8	-0,13	-0,08	-0,14	0,23	0,43	0,35	0,44		-0,39	0,00
9	0,22	0,31	0,11	0,12	-0,08	0,02	-0,22	-0,39		-0,51
10	-0,05	-0,03	-0,02	0,33	0,56	0,40	0,62	0,60	-0,51	

snadno identifikovat. Vezměme R -matici uvedenou v tabulce 36.4. Tuto tabulku korelačních koeficientů uvádějí Rokeach a Fruchter ve faktorově analytické studii o dogmatismu a jiných proměnných.⁹ Ačkoliv je možno poměrně snadno postihnout

⁸ THURSTONE, c.d., str. 178.

⁹ M. ROKEACH and B. FRUCHTER, A Factorial Study of Dogmatism and Related Concepts *Journal of Abnormal and Social Psychology*, LIII (1956), str. 356—360.

seskupení podstatně souvisejících proměnných jako {1, 2, 3}, dostáváme se do nesnází s ostatními proměnnými. Je tedy nutná objektivnější metoda.

Jedna taková objektivní trsová metoda byla doporučena McQuittym.¹⁰ Metoda je rychlá, snadná a někdy plodná. Spočívá v identifikaci seskupení nebo „typů“ tím, že lokalizujeme proměnné nebo testy nejvíce související, nejvíce seskupené dohromady, a to na základě velikosti r . Je-li tato metoda použita tak, jak tomu je s R -maticí tabulky 36.4, dává dvě seskupení: I {1, 2, 3} a II {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Faktorová matice, kterou uvádějí Rokeach a Fruchter však má tři faktory. (Viz tabulku 36.5.) Zvláště si všimněte, že nekvantitativní trsová metoda neukazuje třetí faktor, ačkoliv její propracování by zřejmě tento faktor odhalilo. Jiná potíž metody je v jejím nedostatku jasnosti při ukazování proměnných nabitých dvěma nebo více faktory. Jinými slovy, metoda někdy není příliš přesná, ačkoliv McQuitty poskytuje přesnější metody.¹¹

Tab. 36.5. Nerotované a rotované faktorové matice; studie Rokeacha a Fruchtera*

proměnná	nerotovaná matice			rotovaná matice			h^2
	I	II	III	A	B	C	
1. úzkost	442	-708	173	77	-25	27	727
2. paranoia	468	-600	134	72	-14	26	597
3. sebezavrhování	412	-656	313	69	-29	37	698
4. dogmatismus	708	-139	341	46	21	62	637
5. autoritářství	784	185	297	27	48	66	737
6. rigidita	680	123	421	23	32	71	652
7. etnocentrismus (E)	728	273	099	21	59	47	614
8. konzervatismus (PEC)	487	519	-129	-07	69	19	523
9. levicová orientace	-169	-500	468	17	-63	26	498
10. pravicová orientace	642	549	-227	03	85	19	765

* Desetinné čárky jsou vynechány. Vyšší náboje v rotované matici jsou vylíšeny kurzivou, aby autor usnadnil interpretaci.

Plodná kvantitativní metoda trsové analýzy je hájena Tryonem.¹² Nejprve sepišeme korelace pod sebe podle velikosti. Pak vytvoříme seskupení proměnných, které

¹⁰ L. McQUITTY, Elementary Linkage Analysis for Isolating Orthogonal and Oblique Types and Typal Relevancies, *Educational and Psychological Measurement*, XVII (1957), str. 207–229. Zdá se, že tato metoda pracuje nejlépe s ostře řezanou faktorovou strukturou. Nemodifikovaná není vždy uspokojivá. McQuitty však vypracoval jiné metody. Viz např. McQUITTY, „Typal Analysis“, *Educational and Psychological Measurement*, XXI (1961), str. 677–696.

¹¹ Viz např. McQUITTY, Elementary Linkage Analysis, str. 222.

¹² Dobrý přehled o metodě lze najít ve B. FRUCHTER, *Introduction to Factor Analysis*, Princeton, N.J., Van Nostrand 1954, kap. 2.

„patří“ k sobě. Tak zvaný B -koeficient* se užívá jako kritérium „přináležitosti“. Metoda je dostatečně jednoduchá, spolehlivá a užitečná. Neposkytuje však tabulku faktorových nábojů. Podobně jako metoda McQuittyho a jiné trsové metody, i tato metoda se zdá být nejužitečnější v předběžném nebo explorativním výzkumu.

Metoda hlavních faktorů a centroidní metody. Metoda hlavních faktorů¹³ je matematicky uspokojivá, protože dává matematicky jediné řešení R -matice. Snad hlavní rys jejího řešení je v tom, že extrahuje maximální množství rozptylu z každého faktoru, který je počítán. Jinými slovy, pomocí této metody je R -matice vyjádřena nejmenším počtem faktorů. Jejím hlavním omezením v minulosti byla její výpočetní pracnost. R -matice o dvaceti proměnných např. vyžadovala nesmírné množství času na analýzu. S dostupností moderních vysokorychlostních elektronických počítačů však pracnost výpočtů není nadále na překážku. Dokonce dostatečně rozsáhlé R -matice mohou být zvládnuty během několika minut. Proto se důrazně doporučuje, aby badatelé v oblasti společenských věd a pedagogiky používali metody hlavních faktorů.

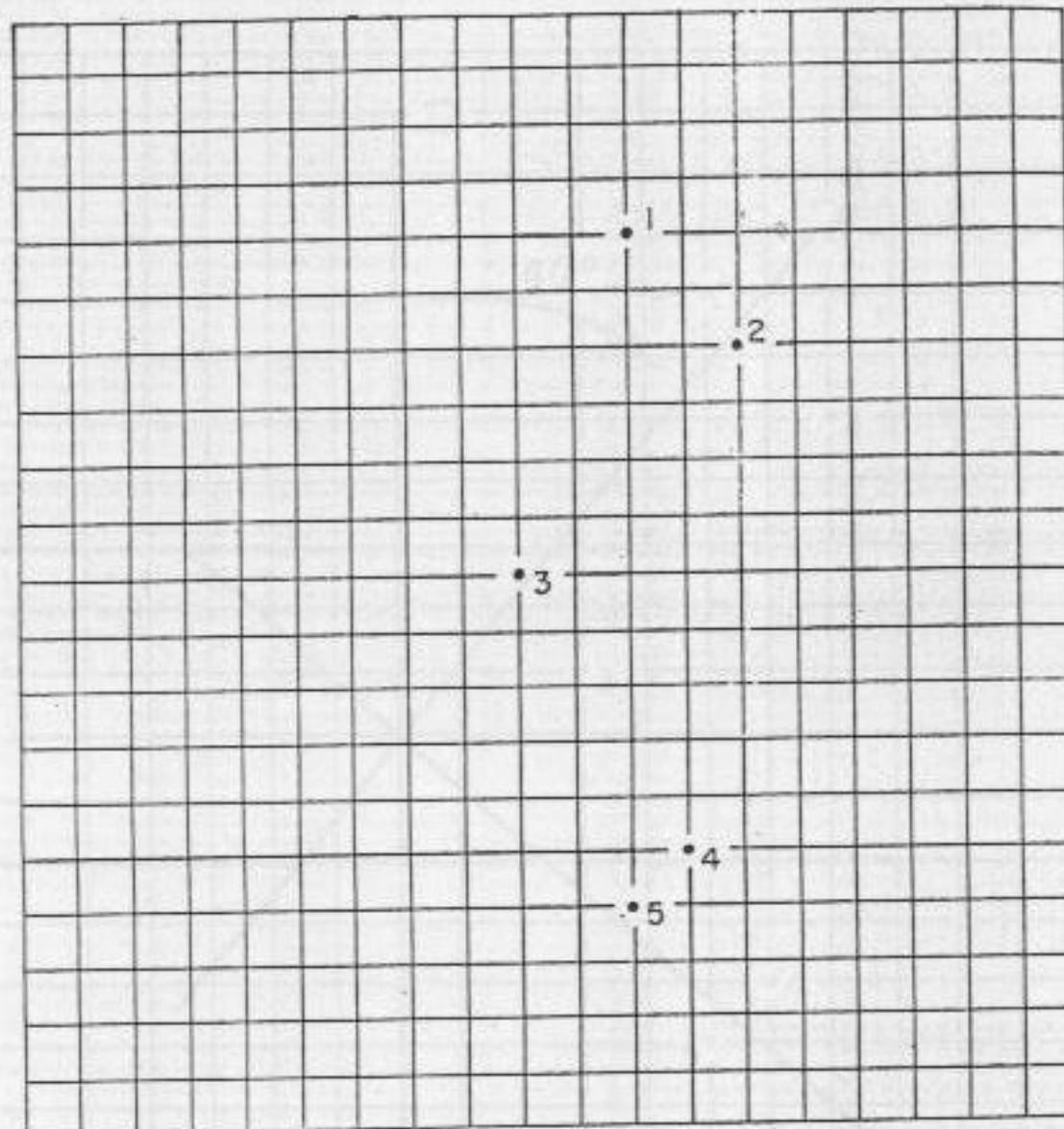
Ukázat logiku metody hlavních faktorů bez dostatečného použití matematiky je těžké. Lze dosáhnout jistého intuitivního pochopení metody pomocí geometrického přístupu. Představme si testy nebo proměnné jako body v m -dimenzionálním prostoru. Proměnné, které jsou vysoko a pozitivně korelovány, by měly být blízko sebe a vzdáleny od proměnných, s kterými nekorelují. Je-li toto uvažování správné, měly by být v prostoru roje bodů. Každý z těchto bodů může být umístěn v prostoru, jsou-li prostorem proloženy vhodné osy tak, že každá osa zastupuje jednu dimenzi z m -dimenzi. Pak je lokalizace kteréhokoliv bodu jeho mnohonásobnou identifikací získanou přečtením jeho souřadnic na m osách. Faktorovým problémem je proložit osy tak, aby „vysvětlily“ co možná nejvíce rozptyl proměnných.

Vezměme příklad, který jsme uvedli v kapitole o sémantickém diferenciuálu (kap. 32): Představte si, že v místnosti, v níž sedíte, jsou roje bodů v různých částech trojrozměrného prostoru místnosti. Představte si, že některé z těchto bodů se seskupují v pravém horním rohu místnosti (vzhledem k vašemu stanovišti). Nyní si představte jiné seskupení bodů v jiném místě místnosti, třeba v pravém dolním rohu. Částí problému je umístit osy – v tomto případě tři osy, protože místnost je trojrozměrná – tak, aby bylo možno identifikovat a vhodně shrnout roje a body v rojích.

Můžeme tyto představy demonstrovat použitím jednoduchého dvourozměrného příkladu. Poněvadž základní koncepce metody hlavních faktorů a centroidní metody

* B je zkratkou anglického „belongingness“.

¹³ THURNSTONE, *c.d.*, kap. VIII a XX. Srozumitelné podání metody hlavních faktorů uvádí G. THOMSON, *The Factorial Analysis of Human Ability*. Boston, Houghton Mifflin 1951, kap. VII. Podrobné matematické pojednání s výpočtovými podrobnostmi a analytickou diskusí uvádí H. HARMAN, *Modern Factor Analysis*. Chicago, University of Chicago Press 1960, kap. 9 a str. 109–116. Tato metoda se obvykle nazývá metoda hlavních os nebo hlavních komponent. V této kapitole užíváme Harmanův výraz „hlavní faktory“.



Obr. 36.3

jsou podobné, a protože centroidní metoda je o trochu jednodušší, budeme se opírat o centroidní představu, i když nebudeme vysvětlovat centroidní metodu podrobně.

Předpokládejme, že máme pět testů. Řekněme, že tyto testy jsou umístěny v dvou-dimenzionálním prostoru, jak je to ukázáno na obr. 36.3. Čím blíže dva body jsou, tím větší je mezi nimi vztah. Úkolem je určit: (1) kolik faktorů zde existuje; (2) kterými faktory jsou ty které testy nabitý a (3) velikost testových nábojů.

Úkol bude nyní řešen dvěma různými způsoby, z nichž každý je stejně zajímavý jako poučný. První řešení je založeno na bodech samotných. Sledujte tyto směrnice. Nakreslete vodorovnou přímkou tři jednotky nalevo od bodu 3. Nakreslete vodorovnou přímkou jednu jednotku pod bodem 3. Označte tyto referenční osy I a II. Nyní čtěte

souřadnice každého bodu, např. bod 2 je (0,70; 0,50), bod 4 je (0,60; -0,40). Napište „faktorovou matici“ s těmito pěti dvojicemi hodnot.

Rotujte (otáčejte) osy ortogonálně a ve směru hodinových ručiček tak, aby osa I procházela mezi body 4 a 5. Osa II samozřejmě půjde body 1 a 2. (Doporučuje se použít úhloměru; pootočení by mělo být asi o 40°.) Označte tyto „nové“ rotované osy A a B. Ustříhnete pásek grafického papíru se čtvrtpalcovým měřítkem. (Body jsou na grafickém papíru naneseny v těchto vzdálenostech.) Počítejte základnu každého čtverečku jako 0,10 (0,10 = 1/4 palce; deset těchto jednotek se pak ovšem rovná 1,00). Při použití tohoto pásku jako měřítka, změřte vzdálenosti bodů vzhledem k novým osám. Např. bod 2 by byl u (0,22; 0,83) a bod 5 by byl u (0,71; -0,06). (Nedělá to příliš velké rozdíly, když zde jsou malé vzdálenosti.) Původní (I a II) a rotované (A a B) osy a pět bodů znázorňuje obr. 36.4.

Nyní napište obě faktorové matice, nerotovanou i rotovanou. Jsou uvedeny v tabulce 36.6.

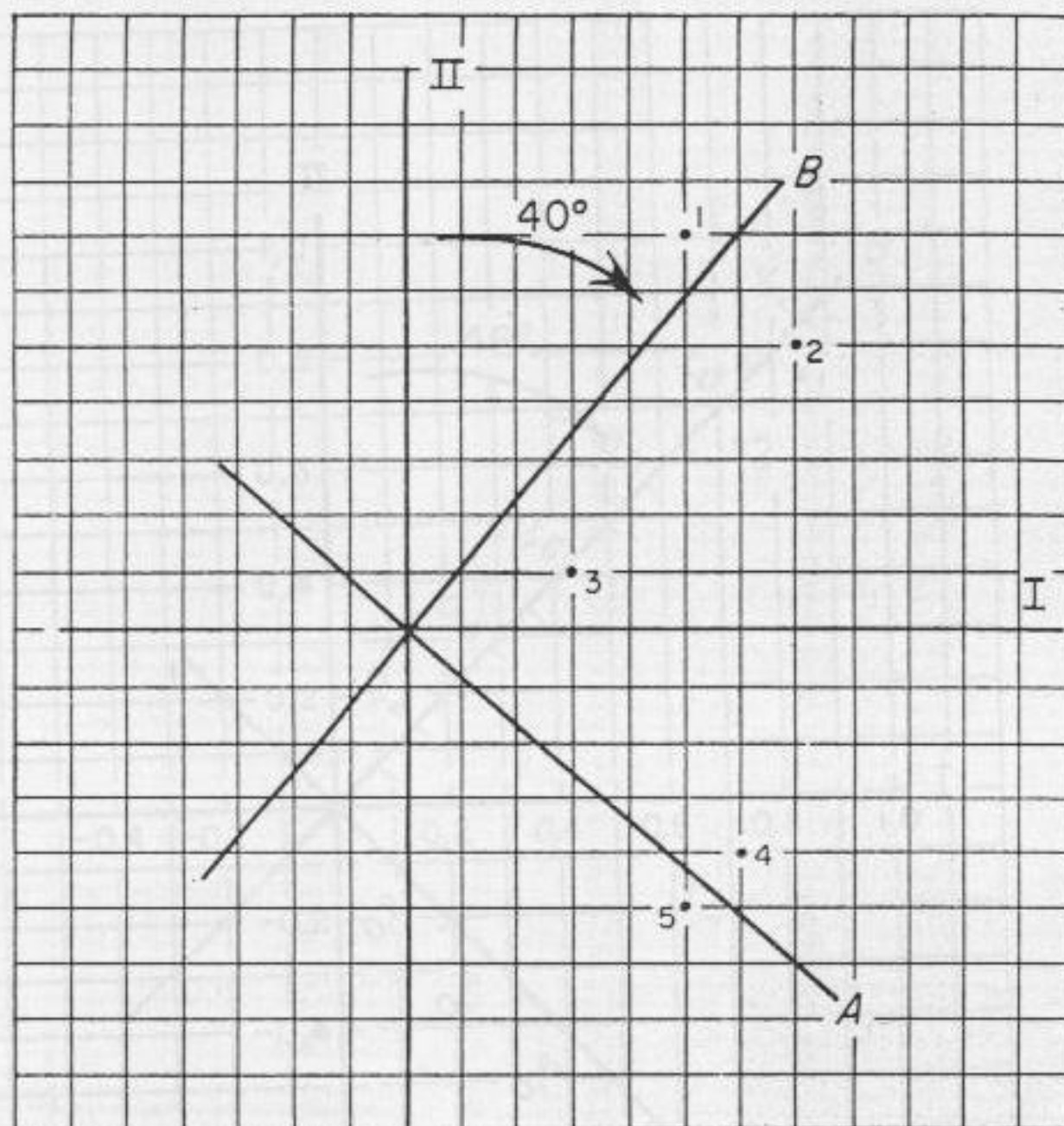
Tab. 36.6. Nerotované a rotované faktorové matice, úloha vzdálenosti bodů

body	nerotované		rotované	
	I	II	A	B
1	0,50	0,70	-0,07	0,86
2	0,70	0,50	0,20	0,83
3	0,30	0,10	0,17	0,27
4	0,60	-0,40	0,72	0,08
5	0,50	-0,50	0,71	-0,06

Problém je vyřešen: existují zde dva faktory. Body (testy) 1 a 2 jsou vysoko syceny faktorem B, body 4 a 5 vysoko faktorem A a bod 3 má nízké náboje v obou faktorech. Tři otázky položené na začátku byly zodpovězeny.

Tento postup je analogický psychologickým faktorovým problémům. Testy jsou představovány jako body ve faktorovém m -dimenzionálním prostoru. Faktorové náboje jsou souřadnice. Problémem je zavést patřičné vztahové rámce neboli osy a pak „přečíst“ faktorové náboje. Ve skutečných úlohách bohužel neznáme počet faktorů (počet rozměrů faktorového prostoru a tím ani počet os) čili lokalizaci bodů v prostoru. Ty musí být určeny na základě dat.

Centroidní metoda využívá data k „umístění“ referenčních os. Místo lokalizace os pomocí zraku, jak jsme to právě dělali, centroidní metoda ve skutečnosti aritmeticky lokalizuje centroid neboli střed všech bodů ve faktorovém prostoru. Osa je „prolože-



Obr. 36.4

na“ tímto centroidem a náboje bodů „čteme“ na ose. To se dělá postupně tak dlouho, než jsou všechny faktory vypočítány. Tímto způsobem se určuje počet faktorů a náboje testů faktory. Je však třeba zdůraznit, že tento popis je obrazný. Při používání metody např. „nečteme“ náboje na centroidní ose. Náboje jsou vypočítávány centroidním postupem.

Můžeme získat letný pohled na obraz postupu odvozením numerických dat z bodů v prostoru (obr. 36.3) a pak prohlédnutím matice vytvořené pomocí této metody. Sledujte opět pokyny. Vraťte se k původním bodům v prostoru (obr. 36.3). Použijte dříve vystřížené pásky papíru. Změřte vzdálenosti mezi každou dvojicí bodů. Např. vzdálenost mezi 1 a 2 je 0,29, mezi 1 a 3 je 0,63, mezi 2 a 4 je 0,90 atd. Když to udě-

láte, dostanete matici vzdáleností danou v tabulce 36.7. (Protože údaje matice nejsou r , uvědomte si, že míry vzdálenosti jsou mírami vztahu.)

Tab. 36.7. Matice vzdáleností mezi body obr. 36.3

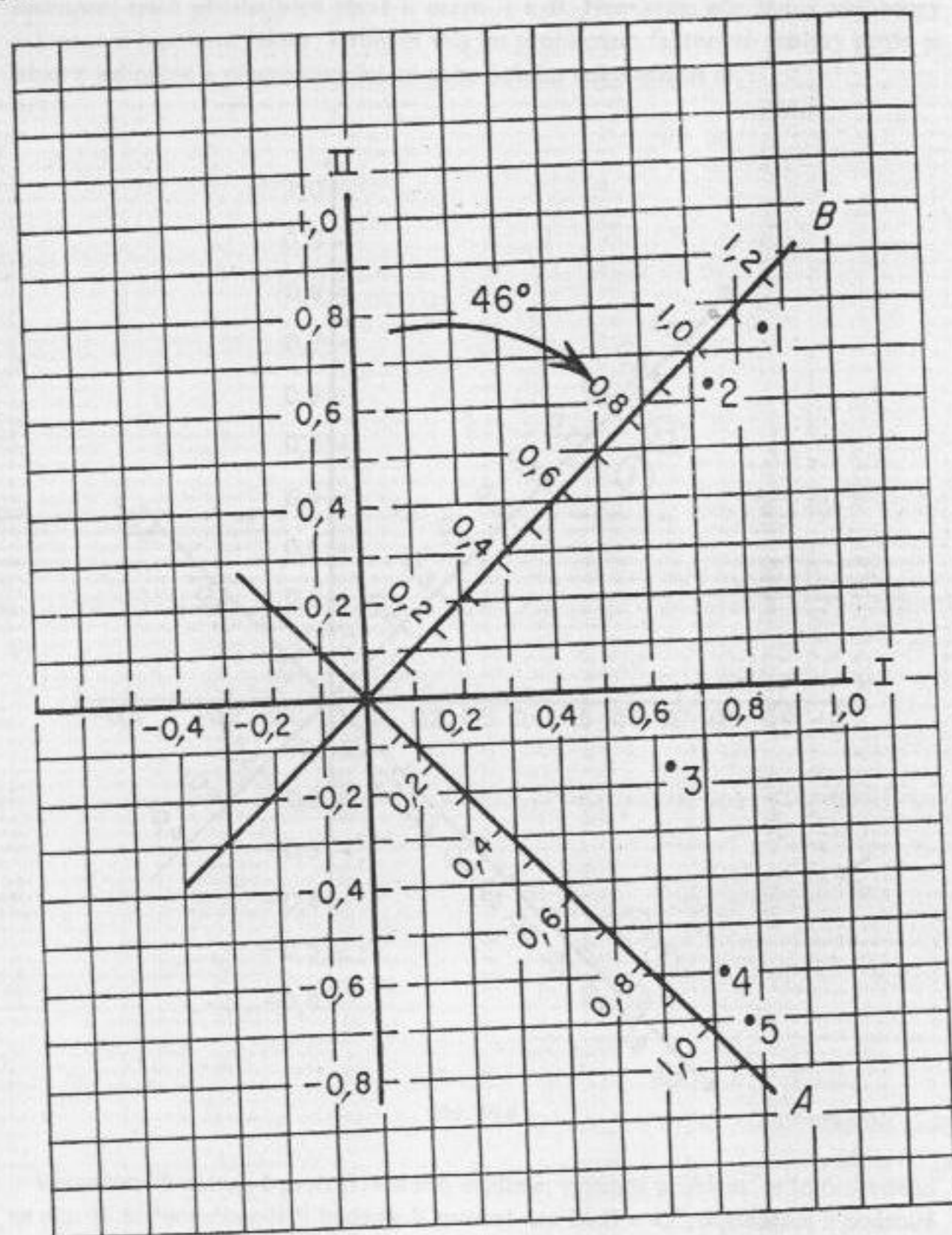
	1	2	3	4	5
1		0,29	0,63	1,10	1,20
2	0,29		0,58	0,90	1,02
3	0,63	0,58		0,58	0,62
4	1,10	0,90	0,58		0,14
5	1,20	1,02	0,62	0,14	

Tuto matici je možné faktorovat. Když to uděláme při použití změněné formy centroidní metody (změna nás nyní nezajímá), dostaneme nerotovanou faktorovou matici danou v tabulce 36.8.¹⁴ Centroidní metoda dává tuto matici, jak je ukázáno výše, postupným centroidním (zprůměrnovacím) postupem. Rotovaná matice je též uvedena v tabulce 36.8. (Všimněte si, že centroidní metoda a metoda hlavních faktorů neposkytují rotované matice.) Byla získána rotováním os I a II o 46° ve směru hodi-

Tab. 36.8. Nerotované a rotované faktorové matice získané centroidní metodou

body	nerotované		body	rotované	
	I	II		A	B
1	0,86	-0,76	1	0,05	1,15
2	0,74	0,63	2	0,06	0,97
3	0,64	-0,16	3	0,56	0,35
4	0,72	-0,59	4	0,93	0,11
5	0,79	-0,70	5	1,05	0,08

¹⁴ Přeje-li si student získat více zkušeností s centroidní metodou, může sečíst sloupce matice tabulky 36.7, pak sečíst tyto dílčí sloupcové součty, odmocnit tento součet a pak dělit tuto druhou odmocninu jednotlivými součty sloupců. Tento postup dá dostatečnou aproximaci prvních faktorových nábojů. (Skutečná centroidní metoda vyžaduje určité hodnoty na úhlopříčce, kteréžto hodnoty chybí v tabulce 36.7.) Postupem, který je příliš komplikovaný na to, abychom ho tu vysvětlovali, se pak odečte z původní R -matice rozptýl vzniklý působením prvního faktoru (v našem příkladu je to D -matice, tj. matice vzdáleností). Co zůstane po tomto odečtení, se pak faktoruje podobným způsobem. Proces se opakuje, dokud nezbude žádná nebo jen malá variance.



Obr. 36.5

nových ručiček a pak čtením „nových“ rotovaných hodnot pomocí měřicí pásky, jak bylo ukázáno na obr. 36.5.

Srovnaj obr. 36.4 a 36.5. Jsou samozřejmě velmi podobné. Faktorové struktury jsou téměř stejné. Hlavní rozdíly jsou v tom, že (1) náboje obr. 36.5, tj. centroidního řešení, jsou vyšší a (2) polohy bodů jsou odlišné. Tyto rozdíly jsou způsobeny hlavně rozdílnými použitými metodami; tím se však teď nemusíme zabývat.

Je nezbytné znovu zdůraznit to, o čem už jsme se výše zmínili. U skutečných úloh nemůžeme použít jednoduchou přímou metodu, ukázanou na obr. 36.4. Neznáme polohu bodů v prostoru. Nevíme, jak se testy a proměnné seskupují dohromady. Nevíme, zda jsou dva, tři, čtyři nebo více faktorů. Neznáme náboje proměnných. Počet faktorů, seskupení proměnných a náboje musí být odhadnuty použitím takových metod jako je centroidní a metoda hlavních faktorů.

Rotace a princip jednoduché struktury. Většina faktorově analytických metod zastupuje hrubá data ve formě, kterou je těžké či nemožné interpretovat. Thurstone dokazoval, že je nutné rotovat faktorové matice, chceme-li je interpretovat adekvátně.¹⁵ Upozornil na to, že původní faktorové matice jsou libovolné v tom smyslu, že lze najít neomezený počet referenčních rámců (os) k reprodukci jakékoliv dané R -matice.¹⁶ Matice hlavních faktorů a její náboje vysvětlují společný faktorový rozptyl testových skóre, ale nedávají obvykle vědecky obsažné struktury. Podstatnou důležitost má konfigurace testů nebo proměnných ve faktorovém prostoru. Abychom objevili tyto konfigurace adekvátně, musíme rotovat libovolné referenční osy. Jinými slovy, předpokládáme psychickou faktorovou „realitu“ za testy či proměnnými. Je-li to tak, musí existovat určitá jedinečná nebo správná poloha os, určitá jedinečná a správná cesta jak „se dívat“ na proměnné v n -dimenzionálním prostoru.

Z Thurstonových důležitých příspěvků jsou snad nejdůležitější jeho objev myšlenek jednoduché struktury a rotace faktorových os. Jimi položil základy relativně jasných směrnic pro provedení psychologicky smysluplných a faktorově interpretovatelných analytických řešení.

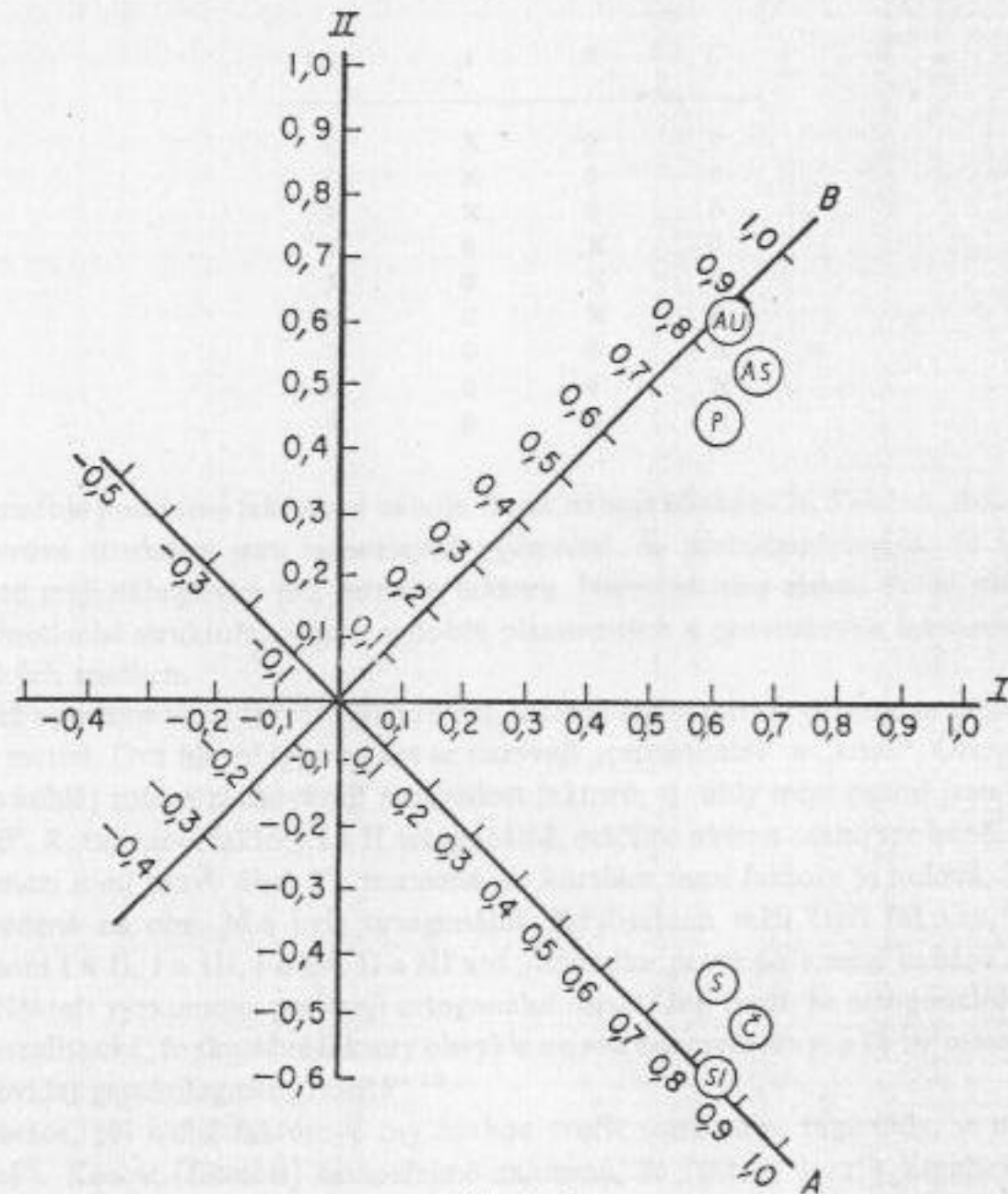
Výše jsme uvedli v tabulce 36.2 faktorovou matici získanou z dat tabulky 36.1. Byla to výsledná rotovaná matice a ne matice původně vytvořená centroidní analýzou. Matice původně vytvořená centroidní analýzou je dána v tabulce 36.9.

Pokoušíme-li se interpretovat tuto tabulku nábojů, dostáváme se do nesnází. Lze říci, že všechny testy jsou nabity všeobecným faktorem I a že druhý faktor II je bipolární. (Bipolární faktor je takový, který má podstatné pozitivní i negativní náboje.) To je totéž, jako řekneme-li, že všechny testy měří tutéž věc (faktor I), ale že první tři měří negativní aspekt toho, co měří další tři (faktor II). Nehledě na dvojnásobnou povahu takové interpretace, víme, že referenční osy I a II, a tedy i faktorové náboje, jsou arbitrární. Podívejme se na faktorový graf obr. 36.2. Existují dvě jasně definované

¹⁵ THURSTONE, *c.d.*, str. 508, 509.

¹⁶ *Ibid.*, str. 93. Viz též R. CATTELL, *Factor Analysis*. New York, Harper and Row 1952.

seskupení testů přiléhajících těsně k osám *A* a *B*. Neexistuje zde žádný všeobecný faktor, ani bipolární faktor. Druhým velkým problémem faktorové analýzy proto je objevit jedinečné a přesvědčivé řešení nebo polohu referenčních os.



Obr. 36.6

Vyznačíme-li náboje I proti II, snadno uvidíme, v čem je problém. Je to provedeno na obr. 36.6. Pootočíme-li či budeme-li rotovat osy I a II o 45°, dostaneme v podstatě strukturu obr. 36.2. To znamená, že nově rotované polohy os a polohy šesti testů jsou tytéž jako polohy os a testů obr. 36.2. Kloní se jen tak trochu napravo. Obráťte obraz tak, aby *B* osy *B* ukazovalo přímo nahoru a stane se to jasné. Je nyní možné číst nové rotované faktorové náboje na rotovaných osách. (Čtenář se o tom může ujistit přečtením a napsáním nábojů testů na rotované osy obr. 36.6.)

Tab. 36.9. Nerotovaná faktorová matice, *R*-matice tabulky 36.1

testy	I	II	III ^a	λ^2
SI	0,61	-0,60	0,03	0,73
C	0,65	-0,55	0,11	0,70
S	0,60	-0,46	-0,09	0,57
P	0,60	0,46	-0,09	0,57
AS	0,65	0,52	0,11	0,70
AU	0,61	0,60	0,03	0,73

^a Náboje třetího faktoru jsou uvedeny, aby byla ukázána jejich relativní nevýznamnost a aby byla podána tabulka shodná s rotovanou maticí tabulky 36.1.

Tento příklad, byť i neskutečný, může čtenáři pomoci pochopit, že faktorový analytik hledá jednotky, které jsou pravděpodobně za testovými výkony. Prostorově pojímáno, hledá vztahy mezi proměnnými „venku“ v multidimenzionálním faktorovém prostoru. Na základě znalosti empirických vztahů mezi testy a jinými měření zkouší to faktorový analytik ve faktorovém prostoru s referenčními osami tak dlouho, než najde jednotky nebo vztahy mezi vztahy — pakliže existují.

Aby vedl faktorového analytika při rotacích, stanovil Thurstone pět principů nebo pravidel jednoduché struktury.¹⁷ Pravidla lze použít jak na ortogonální, tak na kosé (šikmé) rotaci, i když Thurstone zdůrazňuje případ kosých rotací. (Kosé rotace jsou takové, při nichž úhly mezi osami jsou ostré nebo tupé.) Principy jednoduché struktury jsou následující:

1. Každý řádek faktorové matice by měl mít aspoň jeden náboj blízký nule.
2. Pro každý sloupec faktorové matice by mělo být aspoň tolik proměnných s náboji rovnými nule nebo téměř nulovými, kolik je faktorů.
3. Pro každou dvojici faktorů (sloupců) by mělo být několik proměnných s náboji v jednom faktoru (sloupci), ale ne v druhém.
4. Když je čtyři nebo víc faktorů, velký podíl proměnných by měl mít zanedbatelné náboje (blízké nule) v jakékoliv dvojici faktorů.
5. Pro všechny dvojice faktorů (sloupců) faktorové matice by mělo být jen málo proměnných s dosti značnými (nenulovými) náboji v obou sloupcích.

Tato kritéria vskutku vyžadují tak „čisté“ proměnné, jak je to jen možné, každou proměnnou nasycenou co možná nejmenším počtem faktorů, a co možná nejvíc nul v rotované faktorové matici. Touto cestou lze dosáhnout nejjednodušší možné interpretace faktorů. Jinými slovy, rotace za účelem dosažení jednoduché struktury je

¹⁷ THURSTONE, *c.d.*, str. 335; HARMAN, *c.d.*, str. 113; FRUCHTER, *c.d.*, str. 110.

dostatečně objektivní cestou k dosažení jednoduchosti proměnných či k redukci složitosti proměnných.

Abychom to pochopili, představme si ideální řešení, v němž je jednoduchá struktura „dokonalá“. Může vypadat jako následující, řekněme, třífaktorové řešení:

test	A	B	C
1	X	0	0
2	X	0	0
3	X	0	0
4	0	X	0
5	0	X	0
6	0	X	0
7	0	0	X
8	0	0	X
9	0	0	X

X označuje podstatné faktorové náboje, 0 pak náboje blízké nule. Takové „dokonalé“ faktorové struktury jsou samozřejmě výjimečné. Je pravděpodobnější, že některé z testů mají náboje více než jednoho faktoru. Nicméně jsme získali dobré přiblížení k jednoduché struktuře, zvláště v době plánovaných a provedených faktorové analytických studiích.

Než opustíme téma faktorových rotací, je třeba zdůraznit, že existuje mnoho rotačních metod. Dva hlavní typy rotace se nazývají „ortogonální“ a „kosá“. Ortogonální (pravoúhlé) rotace zachovávají nezávislost faktorů, tj. úhly mezi osami jsou drženy na 90°. Rotujeme-li faktory I a II ortogonálně, otáčíme oběma osami společně, udržujeme mezi nimi pravý úhel. To znamená, že korelace mezi faktory je nulová. Rotace provedená na obr. 36.6 byla ortogonální. Kdybychom měli čtyři faktory, otáčeli bychom I a II, I a III, I a IV, II a III atd., udržujeme pravé úhly mezi každou dvojicí os. Někteří výzkumníci preferují ortogonální rotaci. Jiní tvrdí, že ortogonální rotace je nerealistická, že skutečné faktory obvykle nejsou nekorelovány, a že by rotace měly odpovídat psychologické „realitě“.¹⁸

Rotace, při nichž faktorové osy mohou tvořit ostré nebo tupé úhly, se nazývají „kosé“. Kosost (šikmost) samozřejmě znamená, že faktory jsou v korelaci. Není pochyby, že faktorové struktury lze lépe vyřešit kosými osami a kritéria jednoduché struktury lze lépe uspokojit. Někteří výzkumníci mohou mít námitky proti kosým faktorům pro možné potíže při porovnávání faktorových struktur v jednotlivých studiích. Ukončíme toto sporné téma dvěma poznámkami. Za první, zdá se, že typ rotace je záležitostí chuti, jak pravil jeden statistik – kolega autora. Za druhé, čtenář by měl rozumět oběma typům rotace v takovém rozsahu, aby mohl interpretovat oba druhy faktorů. Měl by být zvláště opatrný, když se setká s výsledky kosých řešení. Obsahují zvláštnosti a jemné rozdíly, které se nevyskytují u ortogonálních řešeních.

¹⁸ Viz THURSTONE, *c.d.*, str. 139, 140; CATTELL, *c.d.*, str. 116–118, 122, 123, 210.

PŘÍKLADY Z VÝZKUMU

Niže podáváme přehled šesti faktorové analytických studií. Většina faktorové analytických studií faktoruje inteligenci, vloh, testy osobnosti a škály, přičemž testy a škály samy o sobě jsou interkorelovány nebo faktorovány. Položky jednoduchého testu mohou přece být také faktorovány. Osoby nebo odpovědi osob lze též faktorovat. Jinými slovy, proměnné vstupující do korelací a faktorových matic mohou být testy, škály, položky, osoby, pojmy, prostě vše, co lze nějakým způsobem interkorelovat. Niže uvedené studie nebyly vybrány proto, aby reprezentovaly faktorové analytické bádání vůbec, ale spíše proto, aby seznámily studenta s různým použitím faktorové analýzy.

Jednofaktorová studie čtení Thurstone-Davise. Thurstone¹⁹ na základě podezření, že Davisova²⁰ studie o čtenářských testech měla jednodušší interpretaci, než si skutečnost zaslouhovála, provedl faktorovou analýzu interkorelací devíti testů použitých ve studii. Našel jeden faktor! (Zbylo velmi málo rozptylu, když uvedený faktor byl extrahován.) Faktorové náboje a komunity (h^2) jsou uvedeny v tabulce 36.10.

Tab. 36.10. Thurstonovo faktorové řešení Davisových dat^a

testy	náboje	h^2
význam slov	0,803	0,645
význam kontextu	0,810	0,656
organizace	0,469	0,220
myšlenka	0,409	0,168
charakteristiky	0,677	0,458
vyjadřování myšlenek	0,895	0,801
úsudky	0,846	0,716
literární nápady	0,658	0,434
určení záměru pisatele	0,844	0,713

^a Názvy testů jsou převzaty z krátkých popisů uvedených Davisem. Všimněte si, že faktorové analytici někdy uvádějí dvě, tři, někdy i více desetinných míst.

Člověk by se podle těchto výsledků mohl domnívat, že čtenářské dovednosti jsou jednofaktorové. Taková interpretace by však mohla být vážnou chybou. Jak zdůrazňuje Thurstone, není to žádným důkazem o složkách čtenářské schopnosti. Přidání

¹⁹ L. THURSTONE, Note on a Reanalysis of Davis' Reading Test, *Psychometrika*, XI (1946), str. 185–188.

²⁰ F. DAVIS, Fundamental Factors of Comprehension in Reading, *Psychometrika*, IX (1944), str. 185–197.

jiných druhů testů by mohlo dobře ukázat jiné faktory za čtenářskou schopností. Nicméně je podivuhodné, že různé schopnosti měřené devíti testy byly jednofaktorové. Užitečnost faktorové analýzy je zde pěkně ukázána.

Faktorová studie inteligence Thurstonových. L. a T. Thurstonovi ve svém monumentálním díle o faktorech inteligence a jejich měření²¹ uskutečnili faktorovou analýzu 60 testů plus tři proměnných: chronologický věk, mentální věk a pohlaví. Analýza byla založená na testových odpovědích 710 žáků osmé třídy na 60 testů. Odhalila v podstatě tutéž skupinu tzv. primárních faktorů, které byly objeveny předchozími faktorově analytickými studiemi.

Thurstonovi vybrali tři nejlepší testy pro každý ze sedmi daných primárních faktorů. Zdálo se, že šest z těchto testů má stabilitu na různých věkových úrovních

Tab. 36.11. Kose rotovaná faktorová matice, výzkum L. a T. Thurstonových^a

testy	P	N	W	V	S	M	R
identifikace čísel	42	40	05	-02	-07	-06	-06
tváře	45	17	-06	04	20	05	02
čtení v zrcadle	36	09	19	-02	05	-01	09
křestní jména	-02	09	02	00	-05	53	10
znovupoznání obrazů	20	-10	02	-02	10	31	07
slovo-číslo	02	13	-03	00	01	58	-04
věty	00	01	-03	66	-08	-05	13
slovník	-01	02	05	66	-04	02	02
doplňování	-01	00	-01	67	15	00	-01
první písmena	12	-03	63	03	-02	00	-00
slova ze 4 písmen	-02	-05	61	-01	08	-01	04
přípony	04	03	45	18	-03	03	-08
vlajky	-04	05	03	-01	68	00	01
obrazce	02	-06	01	-02	76	-02	-02
karty	07	-03	-03	03	72	02	-03
sečítání	01	64	-02	01	05	01	-02
násobení	01	67	01	-03	-05	02	02
trojmoci	-05	38	-01	06	20	-05	16
série písmen	-03	03	03	02	00	02	53
rodokmeny	02	-05	-03	22	-03	05	44
skupiny písmen	06	06	13	-04	01	-06	42

^a Desetinné čárky jsou vynechány. P = percepce; N = číselný; W = slovní pohotovost; V = verbální; S = prostorový; M = paměť; R = usuzování.

²¹ L. a T. THURSTONE, *Factorial Studies of Intelligence*, Psychometric Monograph No. 2. Chicago, University of Chicago Press 1941, kap. III. Student zajímaví se o faktorovou analýzu a testování inteligence může velmi získat studiem této pronikavé monografie.

dostatečnou pro praktické využití ve školství. Autoři pak revidovali a administrovali tyto testy na 437 školních dětech osmé třídy. Hlavním účelem této studie bylo zjistit faktorovou strukturu testů. Jinými slovy, předpověděli, že tytéž primární faktory inteligence obsažené ve 21 testech vyplnou z nové faktorové analýzy na novém vzorku dětí.

Rotovaná faktorová matice (kosá rotace) je uvedena v tabulce 36.11. Je to pozoruhodná validizace primárních faktorů. Sedm faktorů a jejich náboje jsou téměř přesně podle předpovědi.

Rokeach-Fruchterova studie dogmatismu a jiných proměnných. Rokeach a Fruchter vyzkoušeli baterii desíti škál na 207 vysokoškolských studentech za účelem zjištění faktorové podstaty dogmatismu měřeného Rokeachovou D-stupnicí.²² Dogmatismus je definován jako relativně těsná kognitivní organizace názorů a předpokladů, souvisejících s netolerancí, a organizovaných kolem ústředních názorů o absolutní autoritě.²³ Rokeach a Fruchter se domnívali, že dogmatismus má svou motivační základnu v úzkosti, že D-stupnice měří obecné autoritářství a obecnou netolerantnost a že se dogmatismus vztahuje k celkovému systému názorů a ne k jednotlivým názorům. Na základě toho předpověděli faktorovou strukturu dogmatismu, která by měla vyplynout z faktorové analýzy dogmatismu, autoritářství, etnocentrismu (předsudek), úzkosti, rigidity a určitých dalších měř. Faktorově analyzovali interkorelace desíti měř a obdrželi tři faktory, které rotovali ortogonálně, aby se přiblížili jednoduché struktuře.

Nerotované a rotované faktorové matice byly uvedeny v tabulce 36.5 a R-matice této studie v tabulce 36.4. O pěti proměnných, uvedených v tabulce 36.5, nebylo výše pojednáváno. Proměnné 2, 3 a 4 jsou podstupnicemi D-stupnice. Jedním z cílů studie bylo stanovit, zda paranoia a sebezavrhování, teoreticky považované za součást dogmatického komplexu, skutečně patří k dogmatismu. Proměnná 8 sestává z pěti položek, které měří politický a ekonomický konzervatismus. Proměnné 9 a 10 jsou stupnice zamýšlené Rokeachem k měření levicové nebo pravicové orientace. Levicová a pravicová orientace jsou předpokládány jako míry obecné netolerance.²⁴ Autoři se domnívali, že tyto tři míry se objeví v jednoduchém faktoru liberalismus-konzervatismus.

Studie R-matice (tabulka 36.4) ukazuje seskupení proměnných 1, 2 a 3 a jiné seskupení 4, 5 a 6. Proměnné 8 a 10 tvoří jiné seskupení. Mělo by však být čtenáři zřejmé, že je těžké rozuzlit seskupení, zvláště když je tu překrývání.

²² ROKEACH, FRUCHTER, *c.d.*

²³ M. ROKEACH, The Nature and Meaning of Dogmatism, *Psychological Review*, LXI (1954), str. 194–204.

²⁴ K úplnému pojednání o Rokeachově teorii a stupnicích, které vytvořil, viz: M. ROKEACH, *The Open and Closed Mind*. New York, Basic Books 1960. Zvl. kap. 4.

Rotovaná faktorová matice mluví mnohem jasněji a přesněji. Připomeňme si, že autoři předpokládali faktory a faktorové náboje. Jejich hypotézy jsou: (1) dogmatismus (*D*) lze odlišit (faktorově) od autoritářství (*F*), etnocentrismu (*E*), rigidity; (2) paranoia, sebezavrhování, dogmatismus a úzkost se objevují v jednom faktoru; (3) liberalismus-konzervatismus, pravicová a levicová orientace se objevují ve zvláštním faktoru.²⁵ Studium rotované matice podporuje tyto hypotézy. Ukazuje navíc určité zkřížené faktorové vztahy. Ukazuje např., že dogmatismus faktorově souvisí jak s úzkostí, paranoiou a sebezavrhováním na jedné straně, tak silněji souvisí s autoritářstvím a rigiditou na straně druhé. Student může doplnit interpretaci matice jako cvičení.

Tato studie je výborným příkladem teoretického a faktorově analytického uvažování. Ukazuje dále, že faktorová analýza je docela schopná k ověřování hypotéz.

Q-studie percepce vlastností úspěšných učitelů. V kapitole 33 bylo řečeno, že reakce lidí na nástroj měření lze interkorelovat a podrobit faktorové analýze. Taková analýza byla nazvána *Q*-metodologie na rozdíl od interkorelací a faktorové analýzy testů nebo proměnných, která se nazývá *R*-metodologie. (*Q*-faktorová analýza se též nazývá „inverzní“ nebo „doplňková“ faktorová analýza.)

Nejsou zde obsaženy žádné nové principy faktorové analýzy. Místo seskupení či faktorů a faktorových nábojů testů máme seskupení či faktory a faktorové náboje osob nebo spíše reakcí (odpovědí) osob. Šest testů tabulky 36.1 a 36.2 by např. mohlo být šest osob, které třídily tatáž *Q*-třídění. Korelační koeficienty tabulky 36.1 a faktorové náboje tabulky 36.2 by mohly být získány interkorelací *Q*-třídění šesti osob, jak to bylo nastíněno v kap. 33, faktorovou analýzou výsledné *R*-matice (tabulka 36.1) a získáním rotované faktorové matice nábojů (tabulka 36.2). *SI*, *C* a *S* by mohly být tři osoby, které tvoří jeden faktor, a *P*, *AS* a *AU* by byly tři osoby, které tvoří faktor jiný. K interpretaci faktorů „osoby“ bychom hledali něco společného *SI*, *C* a *S* a něco jiného společného pro *P*, *AS* a *AU*. Mohli bychom též vypočítat faktorové řady, abychom odkryli vlastní povahu faktorů.

Na základě dřívější studie a jako část další studie vztahu mezi postoji k výchově a percepce vlastností úspěšných učitelů sestrojil autor *Q*-třídění obsahující 90 adjektiv jako položek.²⁶ Soubor *Q* adjektivních položek třídilo 38 posuzovatelů jako reakci na instrukci, aby třídili položky a tím vyjádřili své úsudky o vlastnostech, které by měl mít „dobrý“ učitel. Data 38 *Q*-třídění byla interkorelována a korelace faktorově analyzovány. Tři faktory byly rotovány kvůli aproximaci jednoduché struktury. Rotovaná faktorová matice (ortogonální) 12 z 38 posuzovatelů je uvedena v tabulce 36.12.

²⁵ ROKEACII, FRUCHTER, *c.d.*, str. 359 a 360 a pozn. 7, str. 358.

²⁶ Část nepublikované studie. K rozboru teoretických úvah v pozadí studie viz: F. KERLINGER, Educational Attitudes and Perceptions of Teachers: Suggestions for Teacher-Effectiveness Research, *School Review*, LXXI (1963), str. 1–11.

Tab. 36.12. Rotovaná faktorová matice 12 posuzovatelů, studie percepce postojů^a

posuzovatelé	A	B	C	<i>h</i> ²
1	72	06	17	55
2	80	02	15	66
3	41	39	-09	33
4	65	36	14	57
5	67	18	17	51
6	65	08	25	49
7	09	62	36	52
8	35	04	61	50
9	-11	24	56	38
10	15	15	62	43
11	-03	72	06	52
12	06	65	27	50

^a Desetinná místa jsou vynechána. Posuzovatelé 1, 2, 3 a 4 jsou profesori pedagogiky, 5 a 6 učitelé základní školy, 7 a 8 učitelé školy 2. stupně, 9 a 10 vojenští důstojníci vyučující na velké vojenské škole, 11 a 12 řádové sestry vyučující na církevní škole. Významné náboje jsou kurzívou.

Posuzovatelé byli pečlivě vybráni, aby vyjadřovali pravděpodobně odlišné percepce úspěšného učitele. Jsou mezi nimi profesori pedagogiky, učitelé základních a středních veřejných škol, vojenští instruktoři (důstojníci) a učitelky církevních škol (sestry). 12 posuzovatelů na tabulce 36.12 představuje všechny tyto skupiny. (Viz poznámku a k tabulce 36.12.) Data tabulky 36.12 tedy představují data úplné faktorové matice.

Lze vidět, že bylo dosaženo dostatečně dobré jednoduché struktury. Profesori pedagogiky a učitelé základní školy jsou seskupeni v jednom faktoru (posuzovatelé 1–6). Jeden ze středoškolských učitelů je ve faktoru *B* a jeden ve faktoru *C* (číslo 7 a 8). Náboje středoškolských učitelů byly méně čisté než tyto náboje naznačují. Dva vojenští instruktoři (8 a 9) jsou ve faktoru *C* a dvě řádové sestry (11 a 12) jsou ve faktoru *B*.

Evidentně existují v tomto výzkumu tři různé druhy posuzovatelů a tedy i tři různé druhy úsudků o úspěšném učiteli.²⁷ Zdá se, že tyto různé úsudky či faktory jsou také ve vztahu k pedagogickým rolím posuzovatelů. Když poněkud zprůměrníme hodnoty umístění *Q*-kartiček posuzovatelů pro každý faktor zvlášť, přičemž dáváme pozor, abychom vybírali jen ty posuzovatele, kteří mají silný náboj v jednom faktoru a ne v ostatních, pak můžeme usuzovat na povahu faktoru, na základní jednotu nebo na zdroj společného faktorového rozptylu. Mohli bychom např. použít dat posuzovatelů

²⁷ Student by si mohl znázornit faktorové náboje na grafický papír. Sestrojte *A* a *B*, *A* a *C* a *B* a *C*. Při studiu faktorové analýzy a interpretaci faktorově analytických výsledků nelze ničím nahradit znázorňování a pečlivé studium grafů.

1, 2 a 5 a 6 pro *A*; posuzovatelů 7, 11 a 12 pro *B*; a posuzovatelů 8, 9 a 10 pro *C* – i když bychom běžně potřebovali více posuzovatelů pro každý faktor.

Po „výpočtu“ seřazení faktorů, jak bylo uvedeno výše a v kap. 33, ale s použitím více posuzovatelů pro každý faktor, podáváme v tabulce 36.13 vysoce volené nebo posuzované vlastnosti, považované u učitele za důležité:

Tab. 36.13. Faktorové uspořádání *Q*-dat studie o percepci vlastností učitele^a

faktor <i>A</i>	faktor <i>B</i>	faktor <i>C</i>
inteligentní	svědomitý	naděšený
imaginativní (tvůrčí)	morální	vědychtivý
uznalý	zbožný	rozhodný
vřelý	inteligentní	cílevědomý
nezaujatý	zdatný	upřímný
pružný	spravedlivý	praktický
cílevědomý	ovládající se	účtyhodný
naděšený	důvěryhodný	vynalézavý
sympatický	jemný	tvůrčí
citlivý	pevný	spravedlivý
slušný	vzdělaný	jistý
trpělivý	pilný	určitý
upřímný	spolehlivý	vytrvalý
vynalézavý	zdravý	silný

^a Adjektiva jsou zhruba seřazena podle pořadí důležitosti. To znamená, že prvním třem byly přiřazeny nejvyšší hodnoty, dalším čtyřem další vysoké hodnoty a posledním sedmi nižší hodnoty.

Je jasné, že zde jsou tři různé druhy percepce „dobrého“ učitele, i když se některá adjektiva vyskytují ve dvou řadách. Interpretaci ponecháváme na čtenáři. Při pokusu interpretovat tyto (nebo nějaké jiné) faktory, by se měl student ptát: Jaká je základní jednota, jaký společný faktor prolíná těmito adjektivy – nebo těmito testy, či osobami, či položkami testů. Ať jsou zvoleny jakékoliv konstrukty či konstrukt k vyvození jádra faktoru, měly by vyjadřovat komunalitu prolínající faktorem. Dva psychologové posuzující faktorové uspořádání *B* si mysleli, že vyjadřuje „tradiční“ pohled na učitele.

Ryansova faktorová analýza učitelova chování. Ve svých klasických studiích chování a vlastností učitelů Ryans faktorově analyzoval skutečná pozorování chování učitele ve třídě.²⁸ Posuzovatelé pozorovali velké počty učitelů základních a středních škol

²⁸ D. RYANS, *Characteristics of Teachers*. Washington, D.C., American Council on Education 1960, kap. 4.

a hodnotili je v mnoha vlastnostech (viz tabulku 36.14) na sedmibodové posuzovací stupnici. Posudky každé vlastnosti byly korelovány s posudky všech ostatních charakteristik. To udělal zvlášť pro učitele základních a zvlášť pro učitele středních škol. Výsledné korelační matice mezi vlastnostmi byly faktorově analyzovány a výsledné faktorové matice rotovány šikmo až k jednoduchým strukturám. Rotovaná faktorová matice vlastností (chování) učitelů středních škol spolu s vlastnostmi žáků, je uvedena na tabulce 36.14.

Tab. 36.14. Rotovaná faktorová matice vlastností učitelů; Ryansova studie^a

dimenze	I	II	III	IV	V	VI
<i>chování dítěte</i>						
apatický – bdělý	07	01	53	21	05	-05
neodpovědný – odpovědný	-02	03	46	04	-06	10
nejistý – rozhodný	17	02	43	-01	17	-03
závislý – iniciativní	00	-05	55	04	21	-02
<i>chování učitele</i>						
stranický – nestranný	42	26	-04	10	-11	05
autokratický – demokratický	54	-05	-02	01	47	-04
straníci se (skupiny) – družný	36	-08	25	34	03	12
straníci se (jedinců) – přátelský	54	05	-02	35	06	03
omezený – chápal	44	17	08	26	10	03
tvrdý – laskavý	52	07	-02	-05	12	15
tupý – podnětný	-08	06	32	14	28	17
stereotypní – originální	01	05	17	01	40	13
apatický – bdělý	04	08	12	41	-01	02
nepůsobivý – působivý (atraktivní)	02	00	01	-04	07	39
monotonní – příjemný (hlas)	05	-06	-01	05	-07	46
nezřetelně – zřetelně vyslovující	-14	17	-04	08	-05	35
neodpovědný – odpovědný	14	52	-08	20	03	-07
výstřední – řádný	07	43	08	-25	08	17
vzrušivý – vyrovnaný	04	20	06	-39	16	36
nejistý – rozhodný	-01	20	20	-11	12	27
chaotický – systematický	-02	50	02	02	02	03
nepružný – přizpůsobivý	48	09	00	09	35	00
pesimistický – optimistický	34	-08	19	14	07	17
nezralý – integrovaný	14	16	20	-06	09	30
s úzkým – širokým rozhledem	05	34	-06	-03	30	03

^a Desetinná místa jsou vynechána. Náboje větší než 0,30 jsou kurzívou.

Uvádíme stručné shrnutí Ryansových možných interpretací faktorů.²⁹

- I. Chápající-demokratický proti distancovaný, tvrdý, autokratický.
- II. Systematický, organizovaný, odpovědný proti neorganizovaný, chaotický.
- III. (Učitel) vybízející, poutavý, prospěšný; účast a usměrněná činnost žáků proti apatii, závislosti, nedostatku kontroly.
- IV. Čilost, nadšení, vzrušivost.
- V. Originalita, adaptabilita, schopnost podněcovat proti tuposti, nepružnosti, stereotypnosti.
- VI. Milý hlas, ladnost, půvab, důstojnost.

Když Ryans analyzoval a interpretoval výsledky faktorových analýz učitelů elementárních a středních škol, došel k závěru (který extenzivně ověřoval), že existují tři korelované faktory nebo soubory vlastností či chování, jež se ostře rysují a mohou být společné jak učitelům základních škol, tak středoškolským učitelům:

- X_0 chápaní, přátelský, vnímavý proti distancovaný, egocentrický (faktor I)
 Y_0 odpovědný, organizační, systematický proti vyhýbavý, neplánovitý, chaotický (faktor II)
 Z_0 podnětný, imaginativní (tvůrčí), originální proti tupý, rutinovaný (faktor V)

Faktorově analytická validizace položek postojů.³⁰ Ve dvou Q -studiích autor našel dva postojové faktory, z nichž jeden se jevil jako odraz progresivních názorů a druhý jako odraz tradičních názorů. Tyto faktory byly nazvány každý zvlášť A a B a byly sestrojeny škály k jejich měření. Škály byly provedeny na velkém počtu negraduovaných a graduovaných studentů pedagogické fakulty a na osobách mimo universitu. Předpověděli jsme, že když položky nástroje obsahujícího obě škály budou interkorelovány, položky A budou korelovat pozitivně s jinými položkami A a položky B budou korelovat pozitivně s jinými položkami B . Korelace mezi položkami A a B by měly být téměř nulové.

Předpověděli jsme též, že faktorová analýza interkorelací položek by měla dát dva faktory. Položky A by měly být nabitы pozitivně a silně v jednom faktoru, ale ne v druhém. Položky B by měly mít pozitivní a silný náboj také v jednom faktoru a ne v druhém.

Korelace se dosti těsně shodovaly s výše nastíněnými očekávanými. Položky A interkorelovaly pozitivně v rozpětí r od 0,06 do 0,34 s průměrem 0,20. (Poznámka: položkové korelace jsou obvykle dosti nízké.) Položky B také interkorelovaly pozi-

²⁹ *Ibid.*, str. 100, 101. Autor poněkud pozměnil některé popisy.

³⁰ F. KERLINGER, E. KAYA, The Construction and Factor Analytic Validation of Scales to Measure Attitudes Toward Education, *Educational and Psychological Measurement*, XIX (1959), str. 13–29.

tivně v rozpětí od 0,09 do 0,46 s průměrem 0,26. Korelace mezi položkami A a B byly téměř všechny negativní a nízké. Měly rozpětí od 0,00 do $-0,41$ s průměrem $-0,11$.

Rotovaná faktorová matice a její náboje se rovněž těsně shodovaly s očekávanými. Tato matice je uvedena na tabulce 36.15. (Byl zjištěn třetí faktor. Nezdá se, že by měl význam.)

Tab. 36.15. Rotovaná faktorová matice: Položky A a B škály postojů k výchově^a

položky	A	B	C	h^2
(A)				
1	0,440	0,010	0,167	0,222
2	0,386	-0,136	0,074	0,173
5	0,416	0,133	-0,210	0,235
7	0,356	-0,135	-0,284	0,226
8	0,450	0,011	-0,273	0,277
9	0,512	-0,046	-0,134	0,282
15	0,546	-0,026	-0,185	0,333
16	0,366	-0,089	0,022	0,142
17	0,577	-0,259	0,117	0,414
20	0,352	-0,032	-0,277	0,202
(B)				
3	-0,379	0,349	-0,268	0,337
4	-0,096	0,379	0,185	0,187
6	-0,046	0,522	-0,161	0,301
10	-0,094	0,496	0,165	0,283
11	-0,019	-0,581	0,097	0,347
12	-0,305	0,544	-0,158	0,414
13	0,114	0,478	0,276	0,318
14	-0,013	0,411	0,221	0,218
18	-0,330	0,523	-0,156	0,407
19	-0,102	0,636	0,133	0,433

^a Signifikantní náboje ($\geq 0,30$) jsou kurzívou.

Faktorová struktura je téměř dokonalá. Všechny položky A jsou významně nabitы faktorem A a všechny B položky jsou významně nabitы faktorem B . Jediné výjimky z předpovědi jsou tři dosti podstatné negativní náboje položek B číslo 13, 12 a 18 ve faktoru A . To je tedy přesvědčivým důkazem pro konstrukční (pojmovou) validitu škály. Jestliže si čtenář dá práci a zanese faktorové náboje na grafický papír, uvidí dvě zřetelná, nezaměnitelná a nezávislá seskupení.

FAKTOROVÁ ANALÝZA A VĚDECKÝ PSYCHOLOGICKÝ A PEDAGOGICKÝ VÝZKUM

Faktorová analýza má dva hlavní cíle: (1) prozkoumat oblasti proměnných za účelem určení faktorů, které jsou pravděpodobným podkladem proměnných jakožto proměnných a také v celé vědecké práci, (2) ověřovat hypotézy o vztazích mezi proměnnými. První cíl je dobře známý a přiměřeně uznávaný. Druhý cíl není ani tak dobře známý ani tak dobře uznávaný.

Když si vytváříme pojem o prvním cíli, o pátracím či reduktivním účelu faktorové analýzy, měli bychom mít na mysli konstrukční (pojmovou) validitu a konstitutivní definice. Faktorovou analýzu lze pojímat jako nástroj konstrukční validity. Připomeňme si, že jsme ve 25. kapitole definovali validitu jako společný faktorový rozptyl. Protože hlavní statistický záměr faktorové analýzy je společný faktorový rozptyl, je faktorová analýza svou definicí pevně spjata s teorií měření. Tato spojitost byla skutečně vyjádřena výše v odstavci nadepsaném „Z faktorové teorie“, kde jsme uvedli i rovnice k ujasnění faktorové analytické teorie. (Viz zvl. rovnici 36.6.)

Připomeňme si také, že konstrukční validita hledá „význam“ konstruktů prostřednictvím vztahů mezi konstruktem a jinými konstrukty. V I. části, když jsme pojednávali o typech definic, jsme se dověděli, že konstrukty je možno definovat dvěma způsoby: operacionálními a konstitutivními definicemi. Konstitutivní jsou takové definice, které definují konstrukty pomocí jiných konstruktů. V podstatě je to totéž, co dělá faktorová analýza. Můžeme ji proto nazvat metodou konstituování významu, poněvadž umožňuje badateli studovat konstitutivní významy konstruktů – a tím i jejich konstrukční validitu.

Míry tří proměnných mohou, řekněme, mít něco společného. To něco samo o sobě je proměnnou, pravděpodobně podstatnější entitou, než jsou proměnné použité k izolaci této entity a k identifikaci. Dáváme této nové proměnné pojmenování; jinými slovy konstruujeme hypotetickou entitu. Abychom pak prozkoumali „realitu“ proměnné, můžeme systematicky vymýšlet metody na její měření, ověřující její „realitu“ korelováním dat získaných z proměnné s daty jiných měr, které se teoreticky vztahují k naší proměnné. Faktorová analýza nám pomáhá přezkoumávat naše teoretická očekávání.

Částí základní životodárné látky jakékoliv vědy jsou její konstrukty. Staré konstrukty se stále používají; nové jsou permanentně objevovány. Všimněme si některých všeobecných konstruktů přímo patřících k psychologickému a pedagogickému výzkumu: výkon (prospěch), inteligence, učení, schopnosti, postoje, schopnost řešit problémy, potřeby, zájmy, tvořivost, konformita, rysy učitele. Všimněme si některých specifických proměnných důležitých v psychologickém a pedagogickém výzkumu: úzkost při testování, verbální schopnost, tradicionalismus, konvergentní myšlení, prostorové vnímání, aritmetický úsudek, postoje k sobě, sociální vrstva. Je jasné, že velká část psychologického a pedagogického výzkumného úsilí je zasvěcena tomu, co

lze nazvat zkoumáním konstruktů nebo konstrukční (pojmová) validizace. A to vyžaduje faktorovou analýzu.

Ačkoliv bylo uskutečněno mnoho psychologických výzkumů v oblasti pedagogiky, směřujících ke konstrukční validizaci, je zarážející, jak jsme nevědomí. Vezměme samozřejmý příklad školního výkonu nebo prostě výkonu. Téměř po půl století existence pedagogického výzkumu víme málo o výkonnosti jako konstruktů. Víme o vztazích mezi výkonností a jinými konstrukty, např. inteligencí, sociální vrstvou, úzkostí a pohlavím. Víme však pozoruhodně málo o povaze výkonu samotného.³¹ Učitelé sestavují a provádějí každý rok tisíce testů. Existuje však málo výzkumu o tom, co tyto testy měří. Mimo prostých na faktech založených testů o omezených oblastech užití je zřejmé, že většina učitelů sestavovaných testů výkonnosti a většina standardizovaných testů výkonnosti jsou faktorově komplexní. Je-li tomu tak, je stejně tak zřejmé, že konstrukční validita testů výkonnosti je vážnou otázkou. Téměř všechny testy humanitních předmětů, matematiky, přírodních věd nebo angličtiny pravděpodobně měří různé stránky faktorů výkonu. Základní předpoklad v pozadí většiny testování výkonnosti je, že testy používané k měření jakéhokoliv výkonu, který má být testován, jsou samy jednoduchými mírami dotyčného výkonu. Tento předpoklad je docela pravděpodobně mylný.

Uvedený předpoklad je zcela pravděpodobně mylný i u mnoha jiných psychologicko-pedagogických proměnných a měr. Mluvit např. o vztazích mezi výkonem a úzkostí je snadné. Není však tak snadné říci, že měříme jednoduché proměnné. Úzkost je zřejmě multidimenzionálním konstruktům podobně jako výkon. Dokonce jednotlivé testy nebo jednotlivé položky mohou vytvářet faktory.

Na mnohé výzkumné oblasti mohou dobře navazovat faktorově analytické výzkumy proměnných příslušné oblasti. To neznamená, že shromáždíme hodně testů a dáme jakémukoliv vzorku, který je dostupný. Faktorově analytické výzkumy jak explorační, tak určené k ověřování hypotéz, musí být pečlivě plánovány. Proměnné, které mohou mít vliv, musíme kontrolovat – ať už je to pohlaví, vzdělání, sociální vrstva, inteligence aj.³² Proměnné nevstupují do faktorové analýzy jen proto, že je tam dáváme. Měly by k tomu mít pravý důvod. Jestliže např. nemůžeme kontrolovat inteligenci pomocí pořízení vhodného výběru, měli bychom zahrnout měření inteligence (třeba verbální) do baterie metod. Tím, že identifikujeme rozptyl inteligence, máme pod kontrolou inteligenci.

Můžeme též zjistit, zda naše naměřené údaje jsou znečištěny zkreslením odpovědi (reakcí), a to tak, že zařadíme do faktorové analýzy míru zkreslení odpovědi. Autor

³¹ Viz E. KAYA, „Construct Validity in Achievement: An Inverse Factor Analytic Study of the Meaning of Achievement for Professors and Students of Psychology“. Nepublikovaná disertace. New York University 1959.

³² J. GUILFORD, Factorial Angles to Psychology, *Psychological Review*, LXVIII (1961), str. 1–20. Je to důležitý článek, který by měl prostudovat každý badatel, jenž chce hledat možnosti využití faktorové analýzy. Jiné výborné pojednání je D. WOLFE, *Factor Analysis to 1940, Psychometric Monographs No. 3*. Chicago, University of Chicago Press 1940.

měl např. důvod k podezření, že škály sestrojné k měření postojů k výchově — jak jsme se o nich výše zmiňovali — by mohly být znečištěny rozptylem inteligence a sociální žádoucností.* Do faktorové analytické studie byly zařazeny spolu s postojovými škálami k výchově i inteligenční test (verbální) a dvě měřítka sociální žádoucnosti. Zřejmě zde nebylo žádné znečištění, poněvadž postojové škály nebyly nabity stejnými faktory jako míry inteligence a zkrslení odpovědí.

Druhý hlavní účel faktorové analýzy je ověřování hypotéz. Jeden aspekt ověřování hypotéz byl už naznačen: můžeme dát testy nebo měřítka do faktorové analytických baterií s úmyslem ověřovat identifikaci a povahu faktorů. Typický projekt takových výzkumů byl dobře nastíněn Thurstonem, Cattellem, Guilfordem aj. Tím jsou nejprve „objeveny“ faktory. Jejich povaha je vysouzena z testů, které jsou jimi nabity. Tato „povaha“ je vytýčena jako hypotéza. Pak jsou vytvářeny nové testy a dávány novým vzorkům zkoumaných osob. Data jsou faktorově analyzována. Jestliže se objeví faktory podle předpovědi, hypotéza je v příslušném rozsahu podpořena a zdá se, že faktor je „reálný“. Tím věc samozřejmě nekončí. Kromě jiného by se měly ověřovat vztahy faktoru k jiným faktorům. Faktor jakožto konstrukt by měl být umístěn do pojmové sítě konstruktů.

Méně známé využití faktorové analýzy jako metody ověřování hypotéz je při ověřování experimentálních hypotéz. Dalo by se předpokládat, že určitá metoda vyučování čtení mění strukturu schopností žáků tak, že verbální inteligence nemá tak mocný vliv, jaký by mohla mít při jiných vyučovacích metodách. Dala by se naplánovat experimentální studie takovým způsobem, aby tuto hypotézu ověřila. Účinek vyučovacích metod by bylo možno posuzovat pomocí faktorových analýz souboru testů daných před a po použití odlišných metod. Woodrow ověřoval podobnou hypotézu, když dal soubor testů před a po výcviku v sedmi úlohách: sečítání, odčítání, anagramy atd.³³ Zjistil, že struktury faktorových nábojů se změnily po výcviku.

Podobným způsobem by bylo dobře možné posoudit účinek důležitých změn v učebním plánu. Školní systém, který radikálně mění svůj učební plán řekněme od důrazu na učení vědomostem k důrazu na řešení problémů, by měl mít možnost posoudit efekt změn částečně pomocí faktorové analýzy. Posuny ve struktuře a velikosti faktorových nábojů lze očekávat pod tlakem tak radikální změny učebního plánu.

Faktorová analýza má mnohá jiná použití v pedagogickém výzkumu. Např. Schutz ve faktorové analýze 18 sociálně kulturních proměnných (absolventi universit v populaci dospělých, medián stupně školního vzdělání v populaci, kvalifikovaní

* Překlad anglického „social desirability“.

³³ H. WOODROW, The Relation between Abilities and Improvement with Practice, *Journal of Educational Psychology*, XXIX (1938), str. 215—230. Pro důležité tvůrčí pojednání o možnostech kombinace faktorové analýzy a experimentace viz R. CATTELL, *Factor Analysis, c.d.*, kap. 20.

dělníci, příjem, měsíční důchod atd.) a dvou testových měř (test porozumění odstavecům a test aritmetického úsudku) zjistil, že na rozdíl od toho, co by se dalo čekat, výkon není ve vztahu k sociálně kulturním proměnným.³⁴ Dvě výkonové proměnné měly vysoké náboje ve faktoru nezávislém na čtyřech druhých faktorech.

Při zvažování vědecké hodnoty faktorové analýzy, musí být čtenář obezřelý, aby nepřisoudil „realitu“ a jedinečnost faktorům, které mohou neexistovat. Nebezpečí reifikace (tj. zvěčnění) je velké. Je snadné pojmenovat faktor a pak věřit, že za jménem je realita. Tím, že faktoru dáváme jméno, mu ještě nedáváme realitu. Názvy faktorů jsou prostě pokusy stručně vystihnout podstatu faktorů. Jsou vždy tentativní, závislé na dalších potvrzeních nebo nepotvrzeních. Pak též, jak upozornili Wolffe a druzí, mohou být faktory vytvářeny různými věcmi. Něco co vytváří korelace mezi proměnnými, „tvoří“ faktor.³⁵ Rozdíly v pohlaví, vzdělání, sociálním a kulturním zázemí a inteligenci mohou způsobovat, že se faktory objeví. Faktory se též liší — aspoň v určité míře — s rozdíly mezi výběry. Zaměření na odpověď nebo formy testů mohou způsobit objevení se faktorů. I přes tyto výhrady je třeba říci, že faktory se opakovaně objevují s různými testy, různými výběry a různými podmínkami. Když se to stane, můžeme mít dostatečnou jistotu, že zde existuje základní rys, který úspěšně měříme.

Existují vážné kritiky faktorové analýzy. Nejpádňější kritika se soustřeďuje kolem statistické nepřiměřenosti metody a elementů subjektivnosti, kterou obsahuje rotace. V úvodní kapitole může být o těchto problémech jen zmínka. Čtenáře odkazujeme na jednotlivá pojednání Guilforda, Cattella a Harmana. Zdá se, že kritika velmi různé úrovně ovlivňuje pedagogy a některé psychology. Zdá se, že tyto dvě nebo tři formy kritiky se spojují v hluboké nedůvěře k metodě, což je způsobeno její statistickou složitostí — a co je dosti podivné — její objektivitou.

Vyskytuje se např. takový argument: Faktorová analytika dají hodně testů pohromadě do statistického stroje a dostávají faktory, které mají nepatrný psychologický nebo pedagogický význam. Faktory jsou prostě artefakty metody. Jsou to banální prvky, které neodpovídají žádné psychologické realitě, zvláště ne psychologické realitě jedince, kromě snad té, která je v mysli faktorového analytika.³⁶ A nadto, z faktorové analýzy nemůžeme dostat o nic víc, než jsme do ní vložili.

Ve skutečnosti je argument od základu irelevantní. Říci, že faktory mají žádný psychologický význam a že jsou to banální prvky, je jednak pravdivé, jednak nepravdivé. Kdyby argument platil, žádné vědecké konstrukty by neměly význam, protože všechny jsou v určitém smyslu banálními prvky. Všechny jsou též nápady vědce. Je to prostě údělem veškeré vědy. Základním kritériem „reálnosti“ jakéhokoliv kon-

³⁴ R. SCHUTZ, A Factor Analysis of Academic Achievement and Community Characteristics, *Educational and Psychological Measurement*, XX (1960), str. 513—518.

³⁵ WOLFFE, *c.d.*, str. 25.

³⁶ Viz G. ALLPORT, *Pattern and Growth in Personality*. New York, Holt, Rhinehart and Winston, Inc. 1961, str. 329, 330; G. ALLPORT, *Personality*. New York, Holt, Rhinehart and Winston, Inc. 1937, str. 242—248.

strukturu, jakéhokoliv faktoru, je jeho empirická, vědecká „realita“. Když můžeme po odhalení faktoru úspěšně předpovídat vztahy na základě teoretických předpokladů a hypotéz, pak faktor je „reálný“. Ve faktoru není více reality než této, podobně jako není více reality v atomu, než je v jeho empirických projevech.*

Argument o tom, že z faktorové analýzy dostaneme jen to, co jsme do ní vložili, je stejně nesmyslný jako irrelevantní. Žádný kompetentní faktorový analytik by dokonce nikdy netvrdil víc než to. To však neznamená, že pomocí faktorové analýzy nic neobjevujeme — právě naopak. Odpověď samozřejmě zní, že pomocí faktorové analýzy nezískáme nic víc než, co jsme do ní dali, ale že neznáme *všechno*, co jsme do ní dali. Neznáme ani, které testy nebo míry sdílejí společný faktorový rozptyl. Neznáme ani vztahy mezi faktory. Jen faktorová analýza nám o tom může říci. Můžeme sepsat postojovou škálu, o níž se domníváme, že měří jednoduchý postoj. Faktorová analýza postojových položek nemůže přirozeně vytvořit faktory, které nejsou v položkách. Může nám však ukázat, že jsou ve škále, kterou jsme považovali za jednodimenzionální dva nebo tři zdroje společného rozptylu. Podobně se může pomocí faktorové analýzy ukázat, že škála, o níž se domníváme, že měří autoritářství, měří ve skutečnosti inteligenci, dogmatismus a jiné proměnné.

Zkoumáme-li spíše empirické doklady než mínění, je nemožné vyhnout se závěru, že faktorová analýza je jedním z nejsilnějších právě vyvinutých nástrojů pro projektování a analýzu komplexních oblastí, jichž se vědecký psychologický a pedagogický výzkum týká. Je též nemožné vyhnout se závěru, že faktorová analýza má velkou potenciální důležitost v pedagogickém výzkumu.

Je vhodné, abychom tuto kapitolu a celou knihu uzavřeli několika slovy velkého vědce, učitele a faktorového analytika, psychologa Luise Leona Thurstone:

Jako vědci věříme, že schopnosti a osobnosti lidí nejsou tak složité jako celkový výčet vlastností, které lze sepsat. Věříme, že tyto rysy jsou vystavěny z menšího počtu primárních faktorů nebo elementů, které se různými způsoby kombinují, aby vytvořily dlouhý seznam rysů. Je naší ctižádostí najít některé z těchto elementárních schopností a rysů . . .

Všechna vědecká práce má to společné, že se snažíme porozumět přírodě co nejúspěšnějším způsobem. Vysvětlení souboru jevů nebo souboru experimentálních pozorování je uznáváno jen potud, pokud nám dává intelektuální kontrolu nebo pochopení relativně široké variety jevů pomocí omezeného počtu pojmů. Princip úspornosti je intuitivní pro každého, kdo má aspoň mírnou vložku pro vědu. Základní motivací vědy je horoucí přání o co nejjednodušší možné pochopení přírody, a to nachází uspokojení v objevu zjednodušující uniformity, kterou nazýváme vědeckými zákony.³⁷

* Náš čtenář může tuto novopozitivisticky vyznívající formulaci srovnat s jasnější charakteristikou faktorů. Ve statí J. LINHARTA a D. HOLDY, Faktorová analýza, *Sociologický časopis*, 6 (1970), č. 6, str. 575—592.

³⁷ L. THURSTONE, *The Measurement of Values*. Chicago, University of Chicago Press 1959, str. 8.

STUDIJNÍ NÁMĚTY

1. Existuje několik dobrých prací o faktorové analýze. Student by měl použít jednu nebo dvě z nich, pojednávajících o centroidní metodě a snad o metodě hlavních os (faktorů).

R. CATTALL, *Factor Analysis*. New York, Harper and Row 1952. Výborný text psaný mistrem faktorové analýzy; tato kniha je zvláště dobrým pojednáním o sporných otázkách.

B. FRUCHTER, *Introduction to Factor Analysis*. Princeton, N.J., Van Nostrand 1954. Je to pravděpodobně nejjednodušší z textů; může být dobře použit ve spojení s jednou z více pokročilejších prací.

J. GUILFORD, *Psychometric Methods*, 2. vyd. New York, McGraw-Hill 1954, kap. 16. Toto výborné krátké podání rationale faktorové analýzy doporučujeme studentům, kteří si chtějí osvojit centroidní metodu. Viz též str. 354—357, které podávají faktorovou teorii a teorii validity.

H. HARMAN, *Modern Factor Analysis*. Chicago, University of Chicago Press 1960. Tento text je velmi pečlivý, ale obtížnější než jiné (kromě Thurstonea). Je to v současnosti kompletní práce o faktorové analýze a tím nenahraditelná pro studenta, který chce jít do šířky a hloubky.

G. THOMSON, *The Factorial Analysis of Human Ability*. Boston, Houghton Mifflin 1939. Tento jasný, dobře psaný text má dobře pojatá a zdůrazněná vysvětlení a příklady. Je zvláště užitečný při studiu metody hlavních os.

L. THURSTONE, *Multiple-Factor Analysis*. Chicago, University of Chicago Press 1947. Jakožto klasické dílo o faktorové analýze, doporučujeme vysoce tuto práci studentům, kteří se seznámili s jednoduššími úvodem.

Z odborné literatury našim čtenářům dále doporučujeme:

J. OKÓŃ, *Analiza czynnikowa w psychologii*. Warszawa, PWN 1960. Kniha přístupně pojednává o tom, co je to faktorová analýza, jak plánovat jednotlivé typy faktorové analytických výzkumů a jak provádět řešení centroidní metodou.

B. M. TĚPLOV, Prostějšíje sposoby faktorovno analiza. In: *Tipologičeskije osobennosti vysšej nĕrvnoj djateljnosti čelovĕka*. T. 5. Moskva, Prosvěščenije, 1967, str. 239—286.

2. Jako dodatek studia logiky a technik faktorové analýzy může student číst faktorové analytické studie a pojednání o faktorové analytických tématech. Uvádíme několik pramenů, které mohou být užitečné a zajímavé.

H. EYSENCK, *The Structure of Human Personality*. New York, Wiley 1953. Pěkný přehled mnoha faktorové analytických studií tělesné stavby, zájmů, postojů a rysů.

J. FRENCH, *The Description of Aptitude and Achievement Tests in Terms of Rotated Factors*. *Psychometric Monographs No. 5*. Chicago, University of Chicago Press 1951. Vyčerpávající přehled s údaji mnoha faktorové analytických studií schopností a výkonu.

W. STEPHENSON, *The Study of Behavior*. Chicago, University of Chicago Press 1953. Tato kniha obsahuje mnoho zajímavých faktorové analytických studií autora.

J. THOMPSON, Meaningfull and Unmeaningfull Rotation of Factors. *Psychological Bulletin*, LIX (1962), str. 211—223. Kompetentní a rozumný článek o sporných problémech rotace.

D. WOLFE, *Factor Analysis to 1940*. Chicago, University of Chicago Press 1940. Autor podává krátký a ujasňující přehled oblastí faktorové analýzy do roku 1940.

3. Podáváme malou fiktivní korelační matici s označenými testy:

	1	2	3	4	5	6
1. slovník		0,70	0,22	0,20	0,15	0,25
2. analogie	0,70		0,15	0,26	0,12	0,30
3. sčítání	0,22	0,15		0,81	0,21	0,10
4. násobení	0,20	0,26	0,81		0,31	0,29
5. vybavování příjmení	0,15	0,12	0,21	0,31		0,72
6. znovupoznání obrázků	0,25	0,30	0,40	0,29	0,72	

(a) Udělejte faktorovou analýzu „od ruky“. Tzn. na základě prohlédnutí matice určete, kolik faktorů zde asi je a které testy jsou v těchto faktorech.

(b) Pojmenujte tyto faktory. Jak jste si jisti svými termíny? Co byste dělali, abyste mohli být jistější svými závěry?

4. Níže je uvedena šikmo rotovaná faktorová matice interkorelací mezi 13 proměnnými sestavenými nadřazenými ředitelů škol, když posuzovali ředitele. Je to jedna z mnoha podobných matic z Hemphillovy, Griffithsovy a Frederiksenovy velké studie o chování pedagogických funkcionářů.³⁸ (Poznámka: všechna desetinná místa jsou vynechána.)

(a) Pojmenujte faktory s uvedením důvodů, proč jste tak učinili. (Použijte nábojů 0,25 a výše jako pomoc k tomuto pojmenování.)

položky posudků	A	B	C	D	E
zájem o práci	06	15	41	-01	02
vytrvání v práci	03	-18	52	02	02
vycházení s učiteli	69	07	-07	12	01
vycházení s rodiči	62	-02	04	08	04
vycházení s nadřazenými	52	02	05	-17	31
znalost úředních věcí	-07	-11	30	02	26
znalost vyučování	01	33	08	-09	31
kontakt s dětmi	56	32	-04	09	-12
písemné sdělování	-03	00	-06	07	45
chápání	08	-04	05	07	39
ústní projev (forma)	-08	01	05	49	01
ústní projev (neformální)	09	01	-05	48	07
celkový dojem	25	09	15	01	26

(b) Srovnajte své názvy s názvy uvedenými ve studii.

(c) Jde o šikmo rotovanou matici, což znamená, že faktory jsou korelovány. Např. korelace mezi A a C je 0,47. Co to znamená? Jak to ovlivňuje interpretaci dat?

³⁸ J. HEMPHILL, D. GRIFFITHS, N. FREDERIKSEN, *Administrative Performance and Personality*. New York, Teacher College, Columbia University 1962, str. 232.

5. Interpretujte rotovanou faktorovou matici uvedenou níže. Data jsou vzata z větší tabulky podané Searsem, Maccobym a Levinem.³⁹ (Poznámka: Všechny desetinné čárky jsou vynechány.)

škála	A	B	D
souhlas chodit doma nahý	66	-11	09
souhlas s masturbací	70	-04	05
požadavky na upravenost a pořádek	-35	-19	38
rozsah používání hmotných odměn	-04	-14	40
rozsah používání omezování práv	-16	-08	51
shoda rodičů ve způsobu výchovy dítěte	01	60	15
reakce manžela na těhotenství manželky	13	51	07
úzkost matky z výchovy dítěte	-10	-56	-17

³⁹ R. SEARS, E. MACCOBY, H. LEVIN, *Patterns of Child Rearing*. New York, Harper and Row 1957, str. 516--518. Uvádíme jen tři faktory ze sedmi a osm údajů měření ze 44. Někteří z původních znamének (plus a minus) jsme změnil, abychom usnadnili interpretaci.

DODATKY

6. VÝZKUMNÁ ZPRÁVA

Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu.

Úvodní část zprávy

Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu. Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu. Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu.

Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu. Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu. Úvodní část zprávy obsahuje stručný obsah, cíle a úkoly výzkumu.

Struktura

Struktura zprávy je rozdělena do několika částí, které jsou popsány v následujícím seznamu.

Obsah zprávy

1. Úvod
2. Úvodní část zprávy
3. Metodologie
4. Výsledky
5. Závěr
6. Přílohy