PSY252
Statistická analýza dat v psychologii II
Seminář 5-6

Logistická regrese

Logistic regression

Předpovídáme pohlaví pachatele

Víme, že pachatel nosí náušnici/e a napsal dopis se skórem emočních adjektiv 8.

Víme, že...

- náušnice nosí 21% mužů a 83% žen
- na škále přítomnosti emočních adjektiv od 1 do 13 mají ženy průměr 9,1 a muži pouze 4,5.

Jaká je pravděpodobnost, že pachatel je žena?

Nejprve využijme informaci o náušnici

	nausnice		
	nenosí	nosí	Total
mužské	10	3	13
ženské	2	11	13
	12	14	26

-
- Šance, že osoba nosící náušnici je žena= $O_{(\check{z}ena|nos\acute{i})}$ = 11/3 =3,7*:1* .... $P_{(\check{z}ena|nos\acute{i})}$=0,79
- Šance, že osoba <u>ne</u>nosící náušnici je žena= $O_{(\check{z}ena|nenos\acute{i})}$ = 2/10 =0,2*:1* .... $P_{(\check{z}ena|nenos\acute{i})}$=0,17
- Nosí-li náušnici, je asi 18krát větší *šance*, že je to žena, než když ji nenosí.
  - **Poměr šancí** za dvou podmínek (**odds ratio, OR**) =

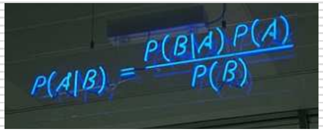
$$OR = \frac{O_{(\check{z}ena|nos\acute{i})}}{O_{(\check{z}ena|nenos\acute{i})}} = \frac{3,3}{0,2} \cong 18,3$$

A co informace o emočních adjektivech?

emoce

pohlavi	M	N	SD
mužské	4,46	13	2,634
ženské	9,00	13	3,291
Total	6,73	26	3,726

- Z těch, kdo mají e=8, je 1/3žen a 2/3 mužů *O*(žena|e=8)=0,5 ....ale dat je málo a nevyužíváme informaci o rozložení
- Předpokládáme-li v populaci normální rozložení...



  - P(e≥8|žena)=normsdist(-0,3)=0,62
  - P(ž|e≥8)=[P(e≥8|ž)*P(ž)]/[P(e≥8ž)*P(ž)+P(e≥8|m)*P(m)]= =[0,62*0,5]/[0,62*0,5+0,09*0,5]=0,87 ... *O*(ž|e≥8)=6,9
  - pro e≥9 je *O*(ž|e≥9)=11,8
  - OR(e≥9 ku e≥8)=11,8/6,9=1,7
  - **Poměr šancí** spojený s nárůstem ***e.a.*** o 1 je 1,7

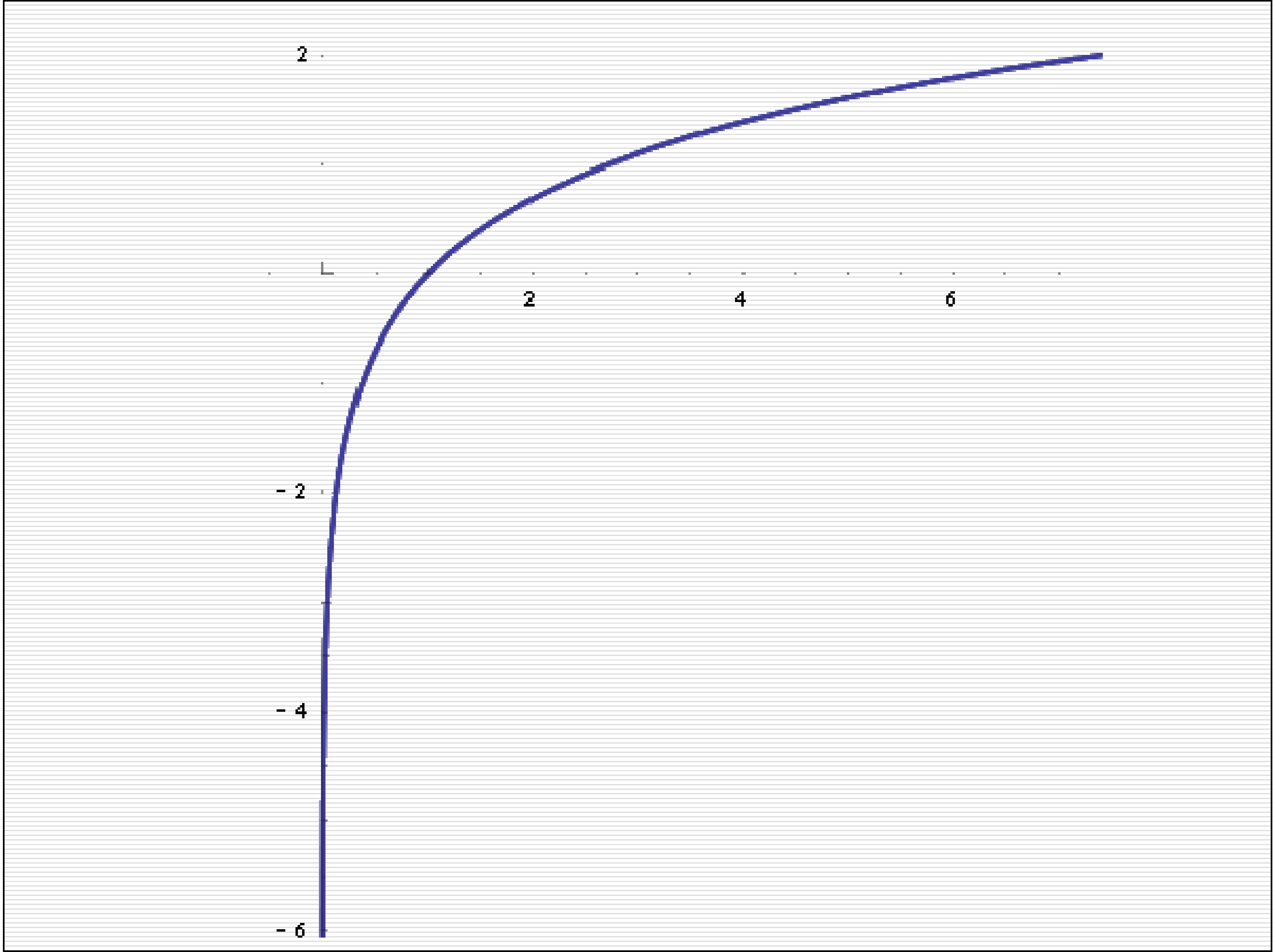
Uff, a to jsme nevzali v potaz možnou souvislost mezi nošením náušnic a emočními adjektivy....

Logistická regrese

- Rozšíření lineární regrese na dichotomické závislé
  - není to lineární regrese, protože nejde o lineární vztah
- Závislou kódujeme 1 (jev nastal) a 0 (jev nenastal)
- Ideově je závislou proměnnou pravděpodobnost toho, že jev nastal(nastane)
- Technicky je závislou proměnnou **šance**
- Pomocí prediktorů predikujeme, jaká je šance, že jev nastane.

Technický základ logistické regrese 1

- **šance $\boldsymbol{O}_{\mathbf{Y=1}}$** $= P_{\mathrm{Y=1}}/P_{\mathrm{Y\neq1}} = P_{\mathrm{Y=1}}/(1\text{-}P_{\mathrm{Y=1}})$
- **ln $\boldsymbol{O}_{\mathbf{Y=1}}$** se jmenuje **logit ($\boldsymbol{P}_{\mathbf{Y=1}}$)**



2
2
4
6
- 2
- 4
- 6

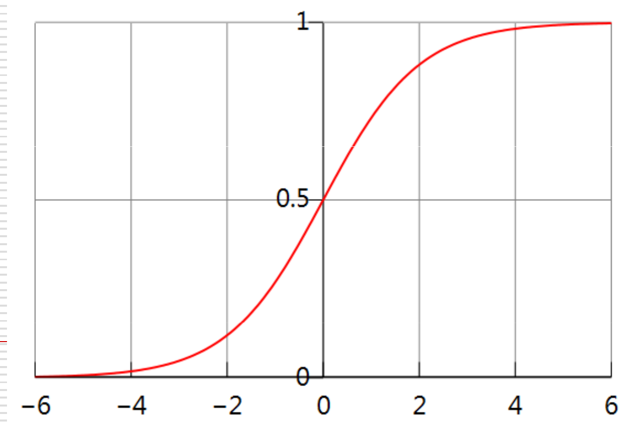
Proč tak složitě?

Závislá jako pravděpodobnost má měřítko v rozsahu <0;1>. Kombinace prediktorů má ale rozsah (−∞;∞).

Proto změníme měřítko závislé

1. Místo P použijeme O s měřítkem <0; ∞)
2. Pomocí logaritmu změníme měřítko na (−∞;∞).

Také lze říci, že jde o linearizaci vztahu.



Technický základ logistické regrese 1

- **šance $\boldsymbol{O_{Y=1}}$** $= P_{Y=1}/P_{Y\neq 1} = P_{Y=1}/(1-P_{Y=1})$
- **ln $\boldsymbol{O_{Y=1}}$** se jmenuje **logit ($\boldsymbol{P_{Y=1}}$)**

- 2 ekvivalentní rovnice logistické regrese

ln $\boldsymbol{O_{Y=1}}$ = $b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_mX_m$

$$P_{Y=1} = \frac{1}{1+e^{-(b_0+b_1X_1+\ldots+b_mX_m)}}$$

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	nausnice	2,909	1,012	8,260	1	,004	18,333
	Constant	-1,609	,775	4,317	1	,038	,200

a. Variable(s) entered on step 1: nausnice.

$$P_{Y=žena} = \frac{1}{1+e^{-(-1,6+2,9NA)}}$$

$\ln O_{Y=\text{žena}} = -1,6 + 2,9\text{náušnice}$

- Pro náušnice=1 … $P_{(\text{žena}|\text{náušnice})} = 0,79$ $O = 3,7$
- Kdyby neměl náušnici … $P = 0,17$ $O = 0,2$
- Změna náušnice z 1 na 0 způsobila 18násobný pokles šancí …. exp(B)… e^{b}

Variables in the Equation

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step 1[a]	emoce	,486	,185	6,875	1	,009	1,625
	Constant	-3,219	1,305	6,088	1	,014	,040

$$P_{Y=žena} = \frac{1}{1+e^{-(-3{,}2+0{,}5EM)}}$$

$$\ln O_{Y=žena} = -3{,}2 + 0{,}5\,\text{emoce}$$

- Pro emoce=8 … $P_{(žena|e=8)}=0{,}66$ $O=1{,}9$
- Pro emoce=9 … $P=0{,}76$ $O=3{,}2$
- Změna emocí z 8 na 9 způsobila 1,6násobný nárůst šancí …. stejně jako jakékoli změna o 1

		B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)	95% C.I.for EXP(B)	
								Lower	Upper
Step 1[a]	nausnice	2,147	1,144	3,523	1	,061	8,556	,909	80,501
	emoce	,387	,199	3,791	1	,052	1,472	,997	2,173
	Constant	-3,797	1,545	6,041	1	,014	,022		

$$P_{Y=\check{z}ena} = \frac{1}{1+e^{-(-3{,}8+0{,}4EM+2{,}1NA)}}$$

$$\ln O_{Y=\check{z}ena} = -3{,}80 + 0{,}39 emoce + 2{,}15 náušnice$$

- Pro náušnice=1 a emoce=8 ... P=0,81 O=4,2
- Kdyby neměl náušnici ... P=0,33 O=0,50
- Změna náušnice z 1 na 0 (bez změny e.a.) způsobila 8,5násobný pokles šancí .... e^b

Technický základ logistické regrese 2

Jak spočítáme regresní váhy, které vyústí v nejlepší predikci pravděpodobnosti Y=1?

- nespočítáme, odhadneme (zapomeňme na nejmenší čtverce)
- odhad metodou **maximální věrohodnosti** (maximum-likelihood estimation)
  - Výpočetně složitý algoritmus
  - Dochází k takovým váhám, s nimiž je podmíněná pravděpodobnost získání dat, která jsme získali, nejvyšší možná : $P\ (\text{data}|b_0,b_1,..,b_m) = \max$
  - likelihood = jiné slovo pro podmíněnou p-nost

Jak dobře regrese predikuje?

- Likelihood je měřítkem zdařilosti regrese v logaritmované podobě: **log-likelihood**

$$LL = \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i \ln P_{Y=1} + (1 - Y_i) \ln(1 - P_{Y=1}) \right]$$

- ***LL*** sumíruje shodu mezi odhadem a daty
  - maximem je 0, minimem je -∞
  - častěji se udává jako ***−2LL***, tj. vynásobený −2
    - ***−2LL*** se říká ***deviance*** (0 až ∞)
    - má chíkvadrát rozložení

- ***reportujeme Model chi-square, df, p***

Statistické testy 1
Predikuje regrese lépe než *nic*?

- nic = základní model (baseline model) = predikujeme všem 0 nebo 1, podle toho, co z toho se vyskytuje častěji = $P_{Y=1}$ je pro všechny lidi stejná
- Potom můžeme srovnat model s prediktory s tímto základním modelem.
  - rozdíl *-2LL* obou modelů má χ^2 rozložení s *df*=počet prediktorů

$$\chi^2 = -2LL_{\text{náš model}} - 2LL_{\text{základní model}}$$

$$df = m_{\text{náš model}} - m_{\text{základní model}}$$

  - tj. je-li 1-CHISQ.DIST(χ^2 ; df)<0,05, predikuje model lépe než nic
- Podobně můžeme srovnávat i modely s různým počtem prediktorů mezi sebou

Nedalo by se to trochu zjednodušit?

-2LL lze převést na ukazatele podobné R^2

- R_L^2 Hosmera a Lemeshowa
- R_{CS}^2 Coxe a Snella
- R_N^2 Nagelkerkeho

Nabývají hodnot od 0 do 1.

Udávají jak moc díky prediktorům klesl *-2LL*

Není to úplně totéž, co R^2 v lineární regresi!

Interpretace regresních koeficientů

- U kategorických prediktorů (indikátorově kódovaných) udává expB poměr šancí pro indikovanou hodnotu vs. referenční hodnotu.
- U spojitých prediktorů udává expB poměr šancí (nárůst) spojený s jednotkovým rozdílem na škále prediktoru.
- Standardní velikost účinku vyjádřená OR je někdy zrádná (neznáme základ jako u procent)
  - Proto počítáme rozdíl p-ností predikovaných pro dvě různé (typické) hodnoty určitého prediktoru.

Statistické testy 2
Testy jednotlivých prediktorů

- Waldův test: $z = b/SE(b)$
  - SPSS: Wald=z^2, Wald~$\chi^2(df)$
  - při velkých *b* nadhodnocuje SE
  - i tak je dobré **uvádět 95% CI pro expB**
- Robustnější alternativou je χ^2 test zhoršení modelu po vyřazení daného prediktoru (tzv. likelihood-ratio test)

Další indikátory kvality modelu

- Klasifikační tabulka
  - srovnání predikovaného a skutečného stavu
  - „reality-check“, i krásně signifikantní model může neuspokojivě predikovat
- Hosmer-Lemeshow Goodness of Fit Test
  - také srovnává predikovné a pozorované hodnoty závislé
  - GoF test >> nechceme, aby byl signifikantní
- Klasifikační diagram (classification plot)
- Diagnostika reziduí a vlivných případů (jako v LinReg)

Praktické problémy

- Regresní koeficienty se nevypočítávají, ale iteračně odhadují.
- Iterace nemusí vždy proběhnout úspěšně
  - nemusí konvergovat
  - mohou se vyskytnout bláznivé hodnoty
- Problematické výsledky naznačují nedostatky v datech
  - při absenci některé z kombinace hodnot prediktorů a závislé
  - při dokonalé predikci
- LR je náročná na velikost vzorku

Předpoklady logistického modelu

- Není jich mnoho
- Linearita – předpoklad lineárního vztahu mezi spojitými prediktory a logitem závislé.
- Nezávislost reziduí
- Implicitně dostatek dat – měly by se vyskytovat všechny kombinace kategorických prediktorů
- Multikolinearita je stejným problémem jako u LinReg

Obecně budování modelu

- Vzhledem k nárokům na velikost vzorku větší tlak na jednoduchost modelu
- *Explorace*: Vložit všechny prediktory a postupně ubírat – cílem je parsimonie (úspornost)
- *Testování hypotéz*: vložit, co implikuje teorie, smysluplně po blocích

Reportování

- Field 19.7

Kam dál?

- ordinální regrese
- multinomiální regrese

Seminární úkol

- Vymyslet VO na logistickou regresi
- Vytvořit logistický regresní model
  - Použít buď vkládání po blocích nebo postupné redukování
- Popsat výsledný model
  - Kvalita modelu – testy, klasifikační úspěšnost, předpoklady, vlivné případy
  - Vliv prediktorů – testy, interpretace, ilustrovat predikovanými pravděpodobnostmi