PSY252
Statistická analýza dat v psychologii II
Přednáška 2

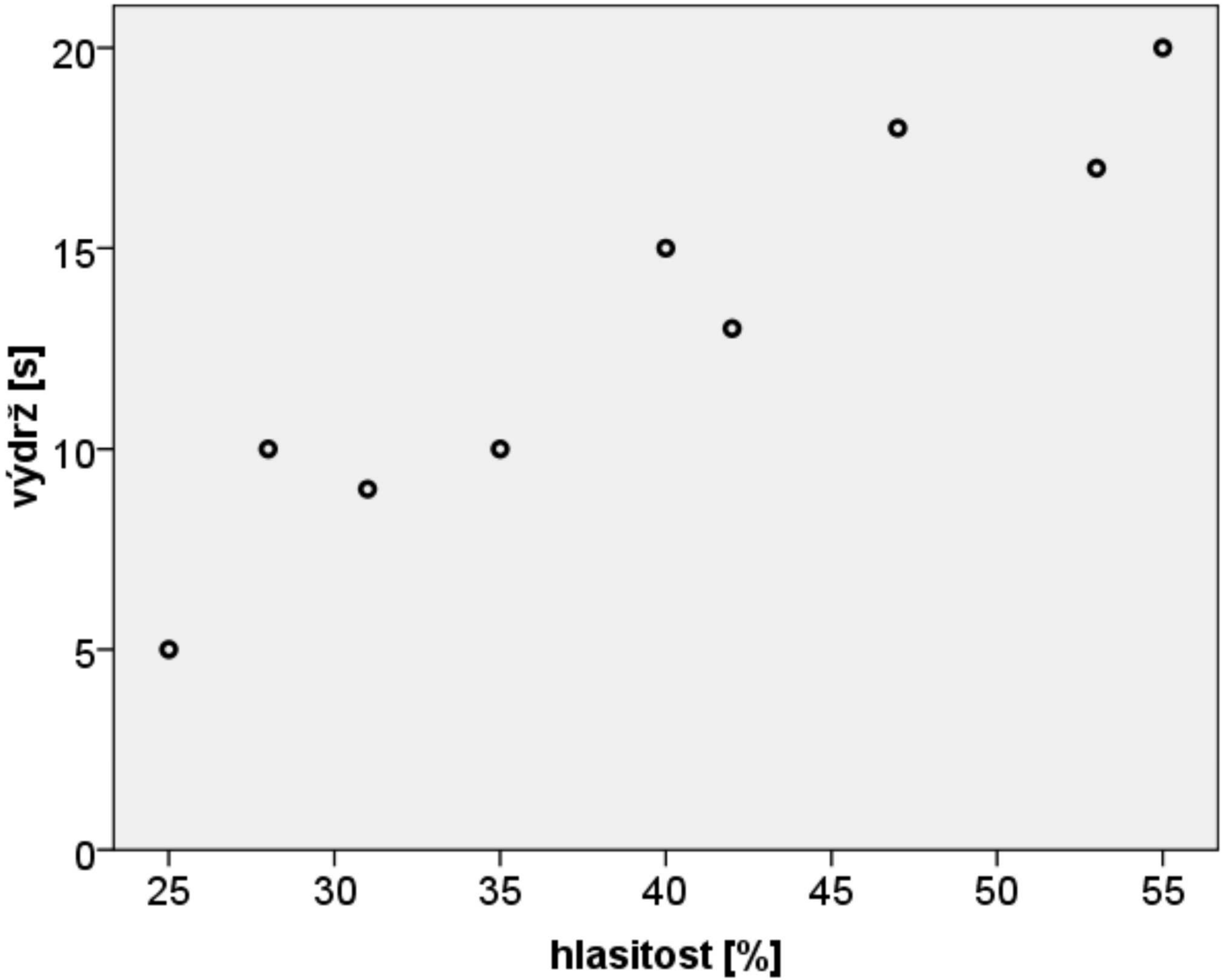
{*Mnohonásobná, vícenásobná*} lineární regrese

Multiple linear regression

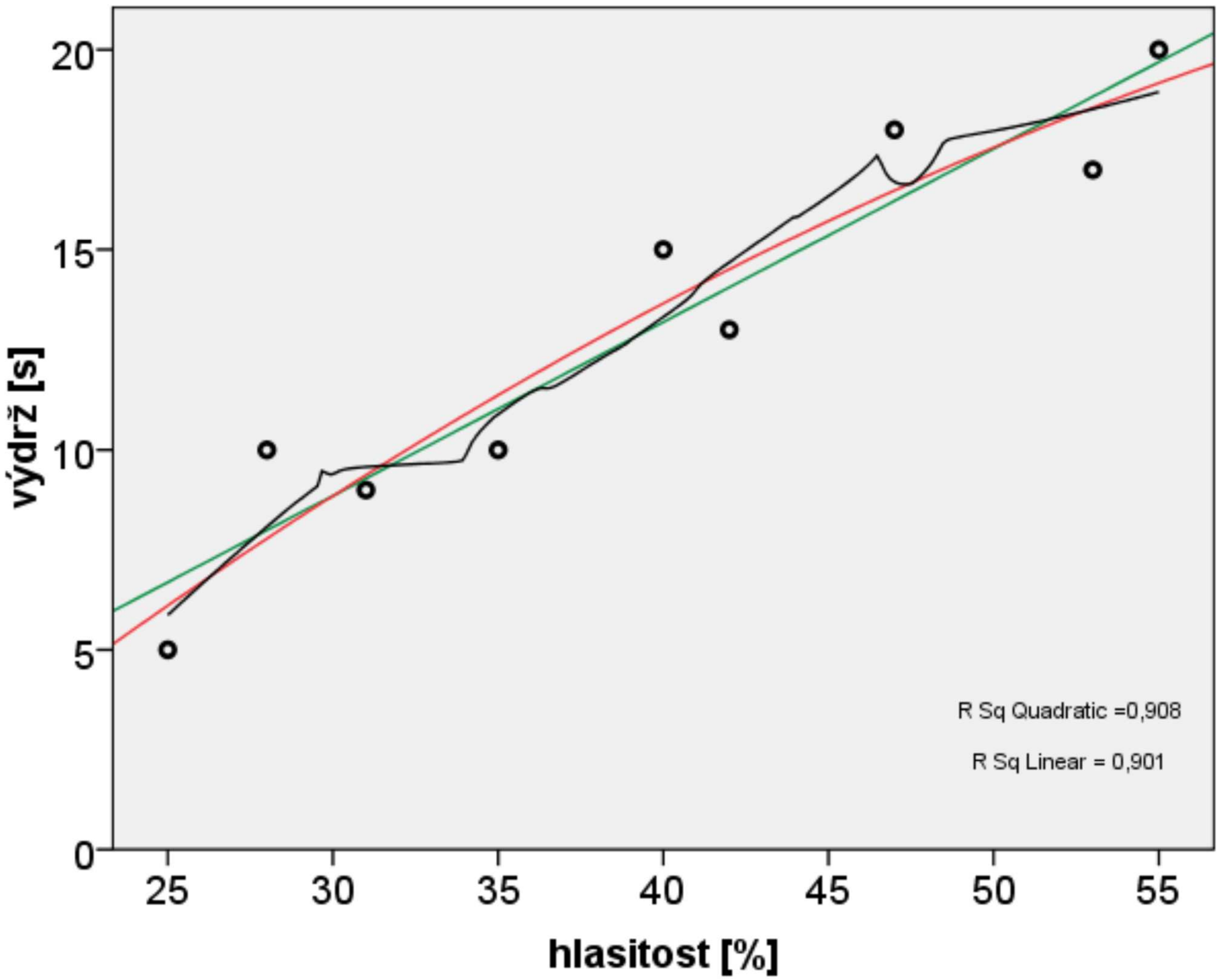
Dlouhodobá adaptace sluchu

Lidé, kteří poslouchají osobní přehrávač na vysokou **hlasitost** [% z maxima přehrávače], **vydrží** nepříjemný hlasitý zvuk déle?

hlasitost [%]	výdrž [s]
25	5
31	9
55	20
42	13
47	18
53	17
40	15
35	10
28	10



20
15
10
5
0
výdrž [s]
25
30
35
40
45
50
55
hlasitost [%]



výdrž [s]
20
15
10
5
0
25
30
35
40
45
50
55
hlasitost [%]
R Sq Quadratic =0,908
R Sq Linear = 0,901

Lineární regrese I. - **MODEL**

Je-li Pearsonova korelace dobrým popisem vztahu mezi dvěma proměnnými, lze popsat vztah mezi nimi lineární funkcí

$$Y' = a + bX$$

b – směrnice

a – průsečík

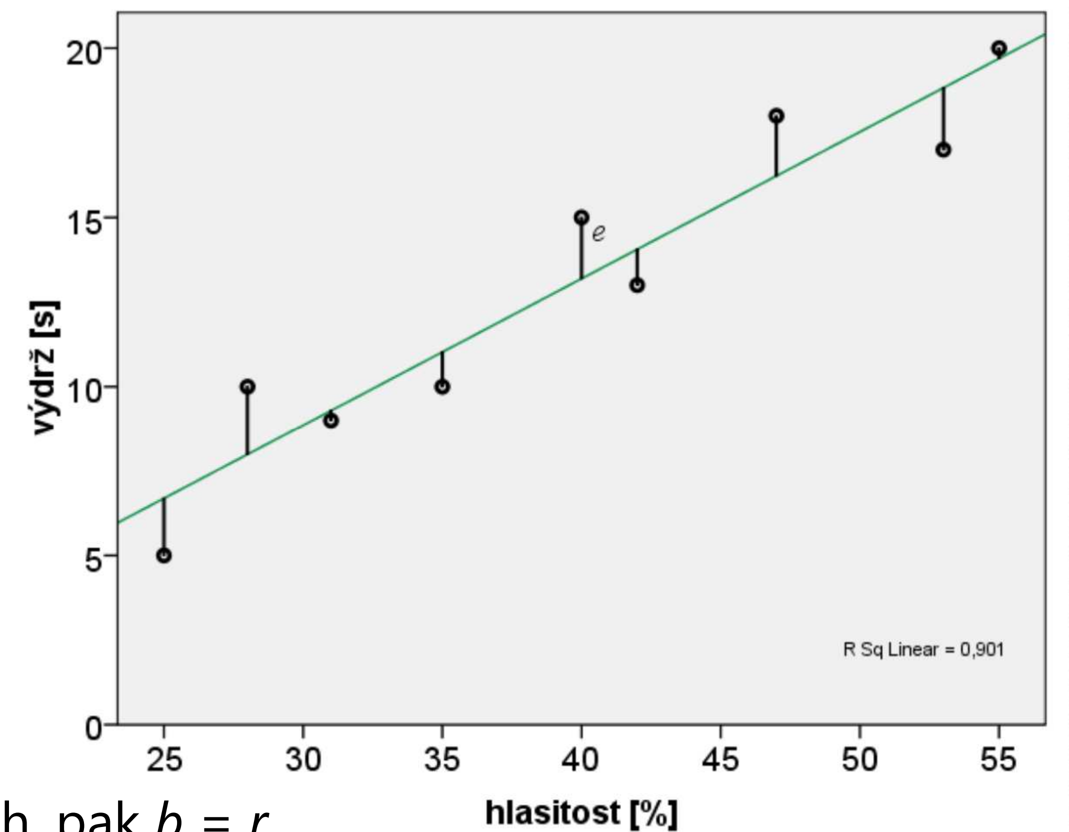
$Y = Y' + e$

$Y = a + bX + e$

Odhad metodou nejmenších čtverců

$$b = r_{xy}(s_y/s_x)$$

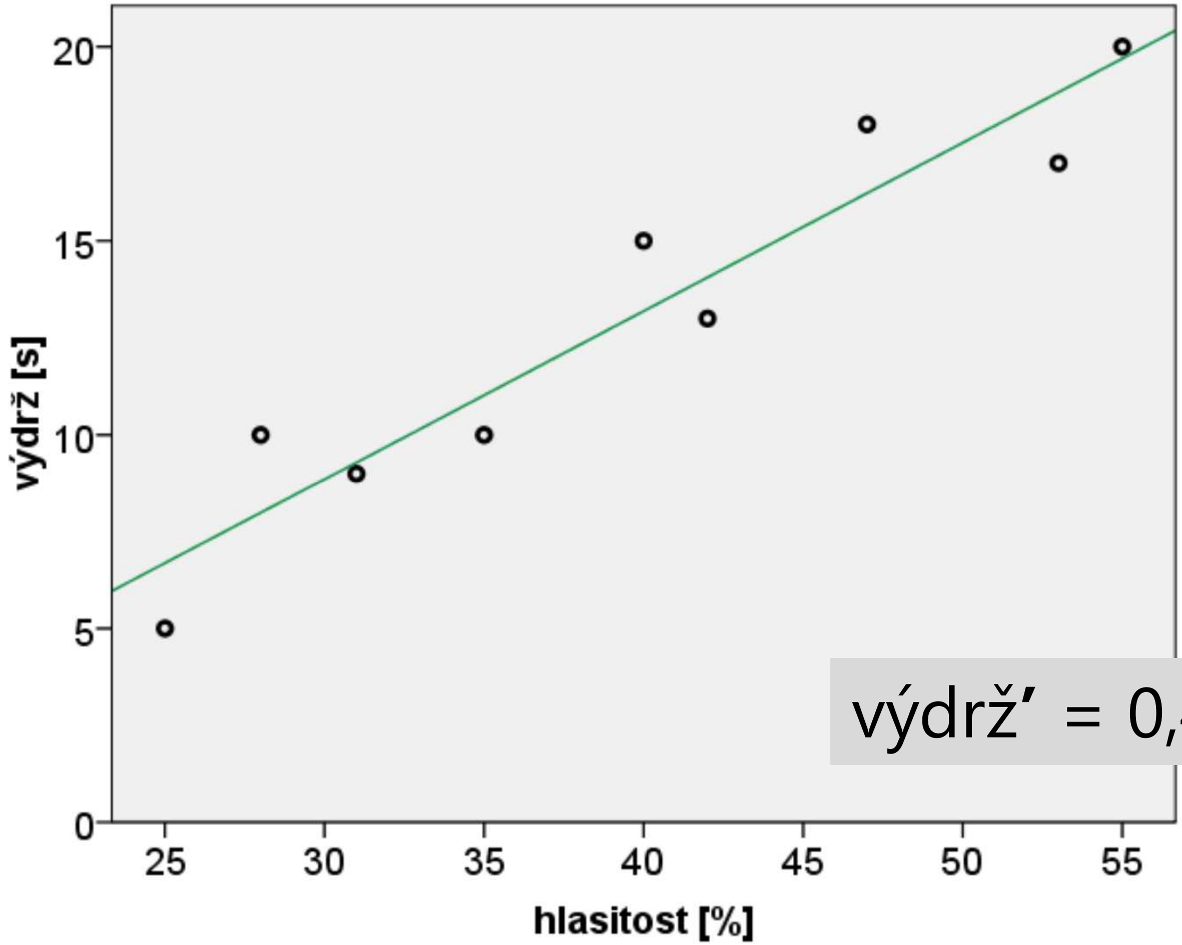
$$a = m_y - bm_x$$



Jsou-li X a Y vyjádřeny v z-skórech, pak $b = r_{xy}$

AJ: slope, intercept, least squares (estimation), regression coefficents (a,b)

Lineární regrese II. – příklad



$m_h = 39,6$

$s_h = 10,7$

$m_v = 13,0$

$s_v = 4,9$

r = 0,95

výdrž' = 0,43.hlasitost – 4,15

Novinky oproti PSY117

- Regr. koeficienty jsou $\boldsymbol{b_0}$ (průsečík, *a, (constant)*) a $\boldsymbol{b_1}$(směrnice, *b*)
- **Beta** – standardizovaný regresní koeficient.
  - O kolik víc násobku SD proměnné Y predikujeme člověku, který má o 1SD proměnné X víc. S jedním prediktorem = *r*.
- Testy jednotlivých regresních koeficientů.
  - Testují H_0: b_k=0. ($t=b/SE_b$, t-rozložení s df=N-k-1,)

Diagnostika modelu
Predikované hodnoty a rezidua

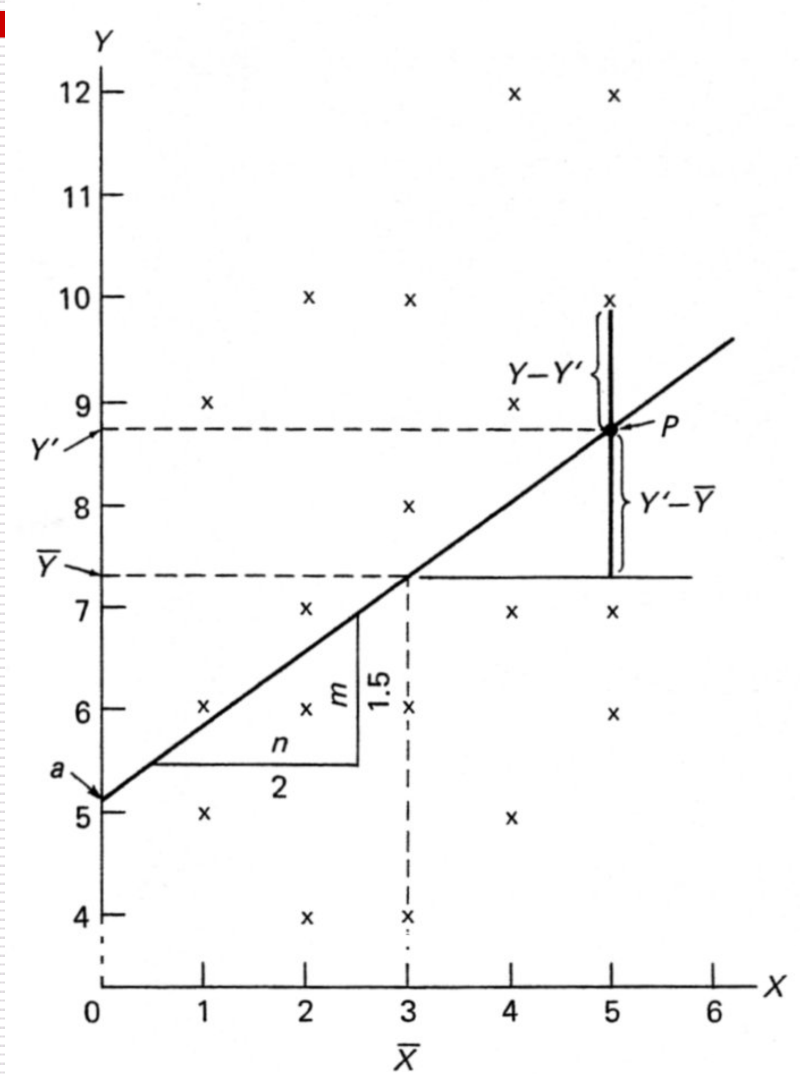
hlasitost [%]	výdrž [s]	výdrž′ [s]	reziduum [s]
25	5	6,69	-1,69
31	9	9,29	-0,29
55	20	19,70	0,30
42	13	14,06	-1,06
47	18	16,23	1,77
53	17	18,83	-1,83
40	15	13,19	1,81
35	10	11,02	-1,02
28	10	7,99	2,01

Lineární regrese III. – úspěšnost predikce

$$s_{reg}^2 = \frac{\sum (m_y - Y')^2}{n-1} \qquad s_{res}^2 = \frac{\sum (Y - Y')^2}{n-1}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (Y - m_y)^2}{n-1}$$

- $s_y^2 = s_{reg}^2 + s_{res}^2$ $(ss_y = ss_{res} + ss_{reg})$
- $R^2 = s_{reg}^2 / s_y^2$
- Koeficient determinace (R^2)
  - Podíl rozptylu vysvětleného modelem
  - Je ukazatelem kvality, úspěšnosti regrese
  - Vyjadřuje shodu modelu s daty
- Pro jednoduchou lin. regr. platí $R^2 = r^2$



AJ: regression and residual variance (sum of squares), explained variance, **model fit with the data**, coefficient of determination (R square)

Novinky oproti PSY117

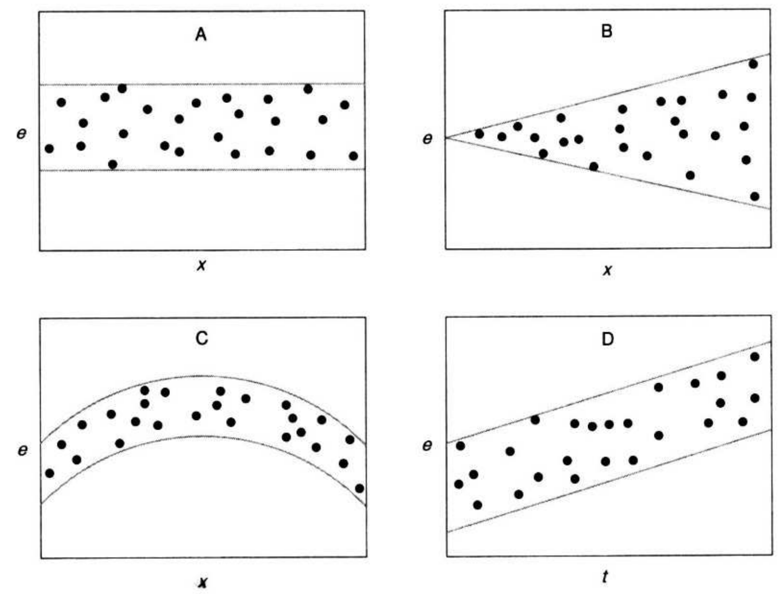
- Adjusted R^2 – jak velké R^2 bychom čekali, kdybychom analýzu dělali na celé populaci (ne vzorku). Overfitting.
- ANOVA – test H_0: $R^2 = 0$.
- Standard error of the estimate - s_{res}

https://en.wikipedia.org/wiki/Overfitting

Lineární regrese IV. – předpoklady, platnost

Předpoklady oprávněnosti použití lineárního modelu

- jako u Pearsonovy korelace
- konceptuální předpoklad: vztah je ve skutečnosti lineární
- rezidua mají normální rozložení
  s průměrem 0
- homoskedascita
  - =rozptyl reziduí (chyb odhadu)
    se s rostoucím *X* nemění



- Platnost modelu je omezena daty, z nichž byl získán, a teorií.
  - Extrapolace, neoprávněná extrapolace (≈jako generalizace nad rámec empirických dat)
  - Pozor na odlehlé hodnoty – jako u všech ostatních momentových statistik

AJ: assumptions of the linear regression model, residuals normally distributed, homoscedascity,

Mnohonásobná lineární regrese

K čemu je?

- Jak moc přispívá proměnná X k predikci jevu Y?
  - Inkrementální validita
- Liší se muži a ženy v proměnné Y, i když zohledníme intervenující proměnnou Z?
  - Statistická kontrola
- Je měřítko A lepším prediktorem než B? (lépe pomocí *r*)

Mnohonásobná lineární regrese

- Počet prediktorů není teoreticky omezen
  - $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_mX_m + e$

- Problémy plynoucí z většího množství prediktorů
  - Výpočetní komplikace
  - Korelace mezi prediktory komplikují interpretaci – (multi)kolinearita
  - Otázka „pořadí" prediktorů
  - Možnost neintuitivních výsledků – př. suprese

  - Více příležitostí k rybaření
  - Méně příležitostí si uvědomit omezenost modelu
  - Množství dat více motivuje k přeskočení detailního se seznamování s daty a prozkoumávání naplnění předpokladů

Příklad Long1

- záv: deprese
- pred: selfe, effi, duv_r, duv_v

- Celý soubor

MLR: Interpretace regresních koeficientů

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m + e$$

- $\boldsymbol{B_i}$; $\boldsymbol{b_i}$ vyjadřuje nárůst *Y'* při nárůstu X_i o jednu jednotku; v jednotkách *Y*, při kontrole všech ostatních prediktorů (≈semiparciální korelace); jedinečný přínos
  - K porovnání síly prediktoru v různých skupinách, modelech, vzorcích
- $\boldsymbol{\beta_i}$; $\boldsymbol{b_i^*}$; ***BETA*** vyjadřuje nárůst *Y'* při nárůstu X_i o 1; jsou-li X_i i *Y* standardizovány, při kontrole všech ostatních prediktorů (≈semiparciální korelace); jedinečný přínos
  - k porovnání prediktorů mezi sebou v rámci jednoho modelu
  - k porovnání různě operacionalizovaného prediktoru v různých modelech
  - ukazatel velikosti účinku
- $\boldsymbol{b_0}$ – obtížně interpretovatelný průsečík … leda by prediktory byly **centrované**
- V různých modelech nemusí být vliv prediktoru stejný

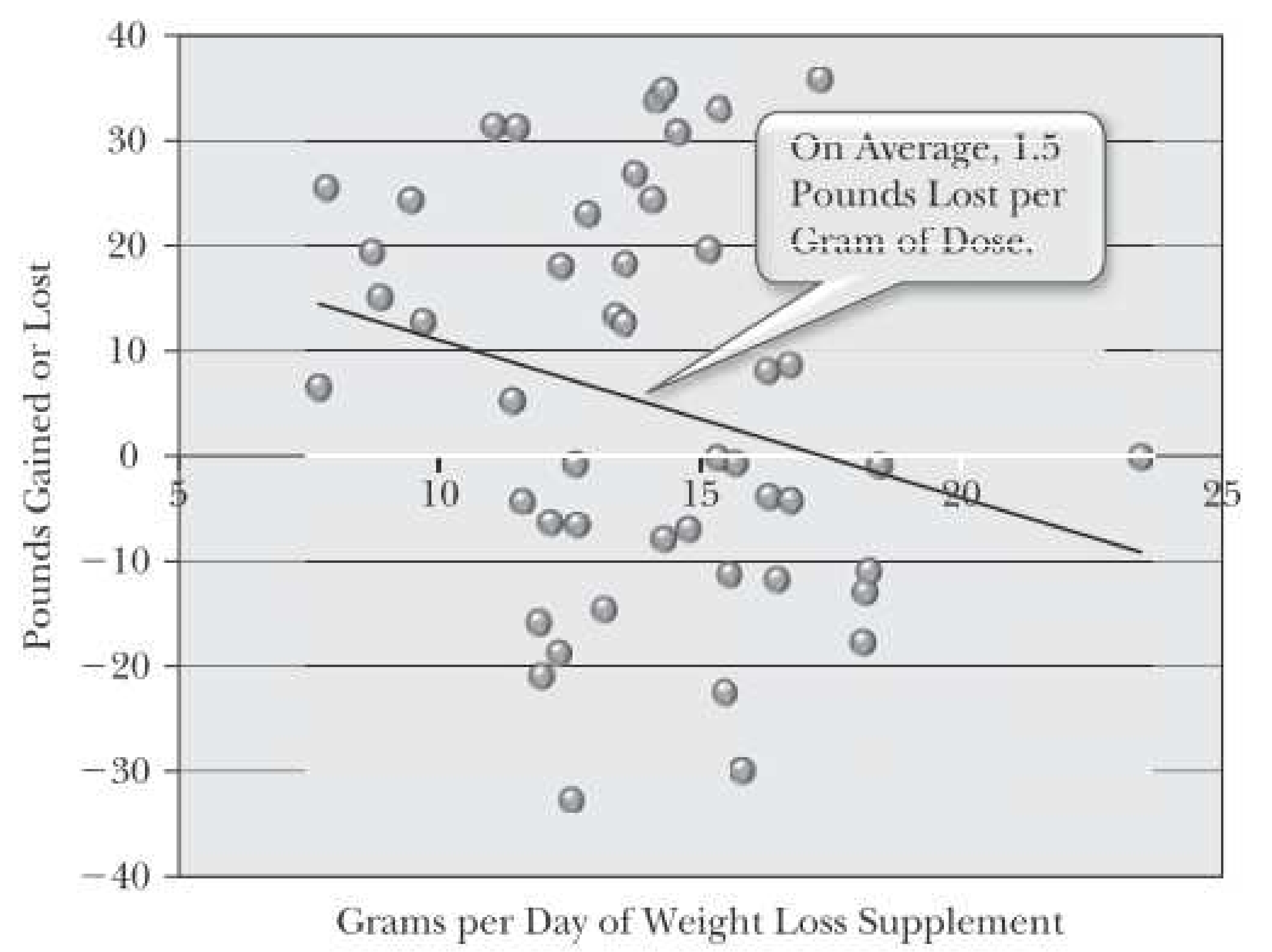
Hrátky s prediktory

Prediktory lze do modelu vložit všechny najednou, jednotlivě, nebo po skupinkách

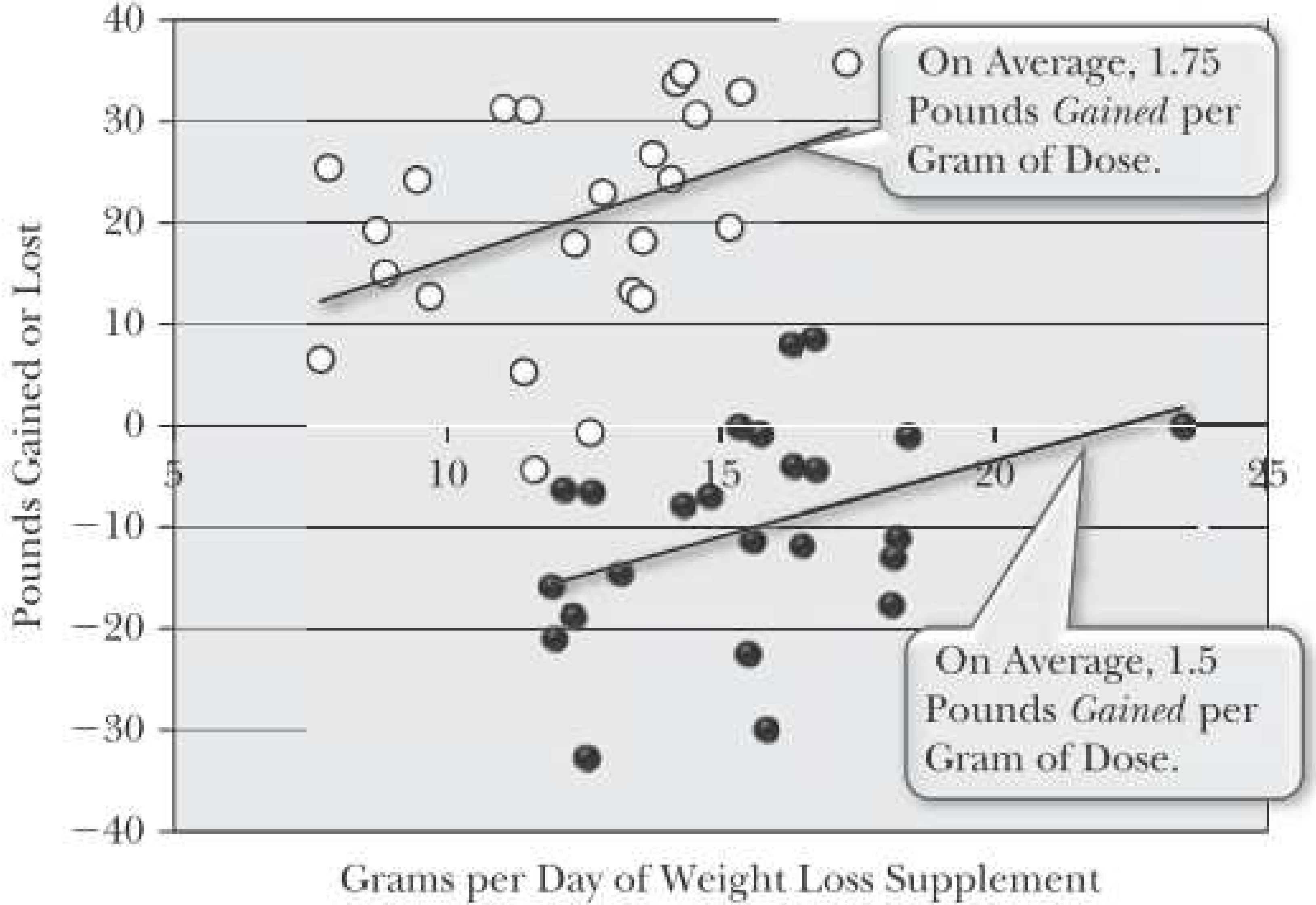
Porovnáváme tak vlastně mnoho modelů lišících se zahrnutými prediktory.

- Vše najednou = ENTER
- Postupně po jednom = FORWARD
- Vše a postupně ubírat = BACKWARD
- Po blocích, blockwise = ENTER + další blok

Suprese



40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
5
10
15
20
25
Pounds Gained or Lost
On Average, 1.5 Pounds Lost per Gram of Dose.
Grams per Day of Weight Loss Supplement



40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
5
10
15
20
25
Pounds Gained or Lost
Grams per Day of Weight Loss Supplement
On Average, 1.75 Pounds *Gained* per Gram of Dose.
On Average, 1.5 Pounds *Gained* per Gram of Dose.

Diagnostika 1: Outliery a vlivné případy

Nemají některé případy příliš velký vliv na výsledky regrese?

- Outliery – mohou zvyšovat i snižovat *b*
  - **Rezidua** – případy s vysokými r. regrese predikuje nejhůř, standardizovaná, studentizovaná ±3
  - **Vlivné případy** – případy, které nejvíc ovlivňují parametry
    - Co se stane s parametry regrese, když případ odstraníme?
    - DFBeta – rozdíl mezi parametrem s a bez, standardizované > 1
    - DFFit – rozdíl mezi predikovanou hodnotou a predikovanou hodnotou bez případu (adjustovanou)
    - Cookova vzdálenost > 1
    - Leverage > $2(k+1)/n$, kde k = počet prediktorů, n= velikost vzorku
- Případy s vysokými rezidui či vlivné případy **NEODSTRAŇUJEME**
    - ...leda by šlo o zjevnou chybu v datech či vzorku
    - ...leda by nám šlo výhradně o zpřesnění predikce (nikoli o testy hypotéz)

Daignostika 2: Kolinearita

- Když 2 prediktory vysvětlují tutéž část variability závislé, jeden z nich je téměř zbytečný
- Komplikuje porovnávání síly preditorů
- Snižuje stabilitu odhadu parametrů
- V extrému (když lze jeden prediktor přesně vypočítat z ostatních) regresi úplně znemožňuje

- Korelace nad 0,9
- **Tolerance (= 1/VIF) cca pod 0,1**
- (VIF (= 1/tolerance) cca nad 10)

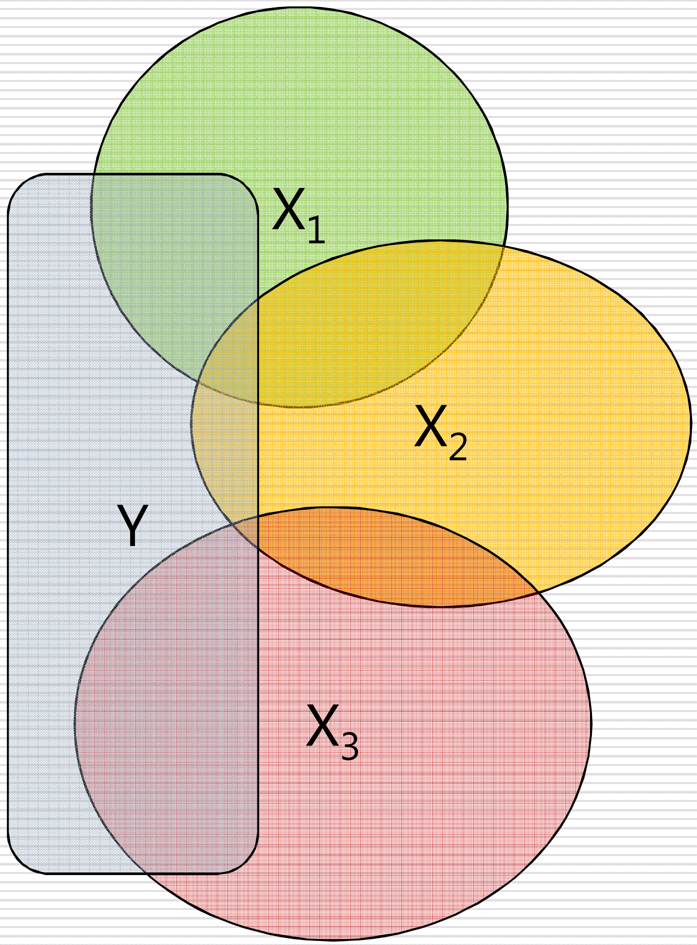
I při korelacích kolem 0,5 komplikuje interpretaci!!

Diagnostika 3: Předpoklady regrese

- Závislá alespoň intervalová, prediktory intervalové i kategorické
- Nenulový rozptyl prediktorů
- Absence vysoké kolinearity (žádné $r > 0{,}9$, tolerance $< 0{,}1$)
- Neexistence intervenující proměnné, která by korelovala se závislou i prediktory
- Homoskedascita (scatterplot ZRESID x ZPRED, parciální scatterplot)
- Nezávislost reziduí (Durbin-Watson = 2)
- Normálně rozložená rezidua (histogram, P-P)
- Nezávislost jednotlivých případů
- Linearita vztahu

MLR: Shoda modelu s daty: R^2

- Část rozptylu *Y* vysvětleného dohromady všemi prediktory
- Predikční síla sady prediktorů
- Ukazatel velikosti účinku
- *R*: Mnohonásobná (mutiple) korelace
- Vždy nadhodnocuje >> při replikaci vychází nižší R^2
  - shrinkage correction – Adjusted (upravené) R^2
    - Wherry (SPSS, Statistica) –kdybychom model dělali z cenzových dat
  - cross-validation
    - Stein (Field) – očekávané R2 při replikaci
    - split-sample analýza



Síla testu a velikost vzorku v MLR

Přibývá nový faktor síly testu: **množství prediktorů**

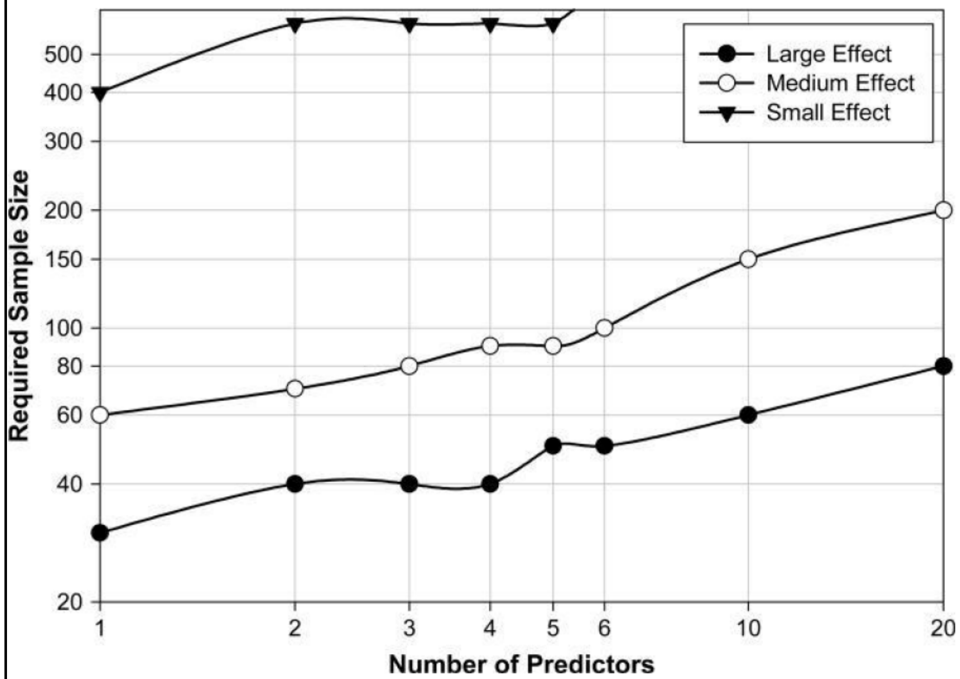


TABLE 5 Minimum R^2 That Can Be Found Statistically Significant with a Power of .80 for Varying Numbers of Independent Variables and Sample Sizes

	Significance Level (α) = .01 No. of Independent Variables				Significance Level (α) = .05 No. of Independent Variables			
Sample Size	**2**	**5**	**10**	**20**	**2**	**5**	**10**	**20**
20	45	56	71	NA	39	48	64	NA
50	23	29	36	49	19	23	29	42
100	13	16	20	26	10	12	15	21
250	5	7	8	11	4	5	6	8
500	3	3	4	6	3	4	5	9
1,000	1	2	2	3	1	1	2	2

Note: Values represent percentage of variance explained.
NA = not applicable.

Reportování MLR

- Základ
  - Popisné statistiky Y a X_i často s korelační maticí
  - Ujištění o naplnění předpokladů
  - Popis shody modelu s daty – R^2, p (někdy i s Ftestem)
  - Přehled regresních koeficientů, b, β s jejich SE, popř. s intervaly spolehlivosti, nebo p

Hierarchická lineární regrese

- Bloková, se sadami (sets) prediktorů
- Prediktory vkládáme po skupinách (popř. jednotlivě) v teoreticky zdůvodněném pořadí
- Teoreticky zdůvodněné pořadí umožňuje rozdělit rozptyl Y na smysluplné části (variance partitioning)
  - Změna pořadí prediktorů změní velikost těch částí
- Zajímá nás schopnost sady prediktorů vylepšit model
  - Srovnání různých oblastí vlivu na zkoumaný jev
  - Zkoumání inkrementální validity

Obvyklá řazení bloků

- Dle času, kauzální priority
  - Př. od dispozičním k situačním…
- Od známých k neznámým vlivům
  - kontrola intervenujících proměnných
  - Minimalizace chyby 1. typu
- Podle výzkumné relevance
  - Od ústředních po „co kdyby“; maximalizace síly

Obvyklý postup regresní analýzy

- Na základě teoretických rozvah stanovíme různé modely, jejichž srovnání je potenciálně zajímavé
- Nejjednodušší srovnání je u hierarchických modelů, kdy je jeden model plně vnořen do následujícího – to umožňuje testovat inkrement R2
- Až v druhé řadě se zabýváme jednotlivými regresními koeficienty v modelu, který je nejúplnější/nejlepší

Zapojení kategorických prediktorů

Dummy coding ->dummy variables

- Pomocí k–1 kategorických proměnných
- Indikátorové kódování (indicator coding)
  - Referenční kategorie = 0
- Efektové kódování (effect coding)
  - Referenční kategorie = -1

Člen rodiny	**Původní proměnná**	**Indikátorové kódování**		**Efektové kódování**	
		Matka	Otec	Matka	Otec
Matka	1	1	0	1	0
Otec	2	0	1	0	1
Dítě	3	0	0	-1	-1

Interpretace vah dummy proměnných

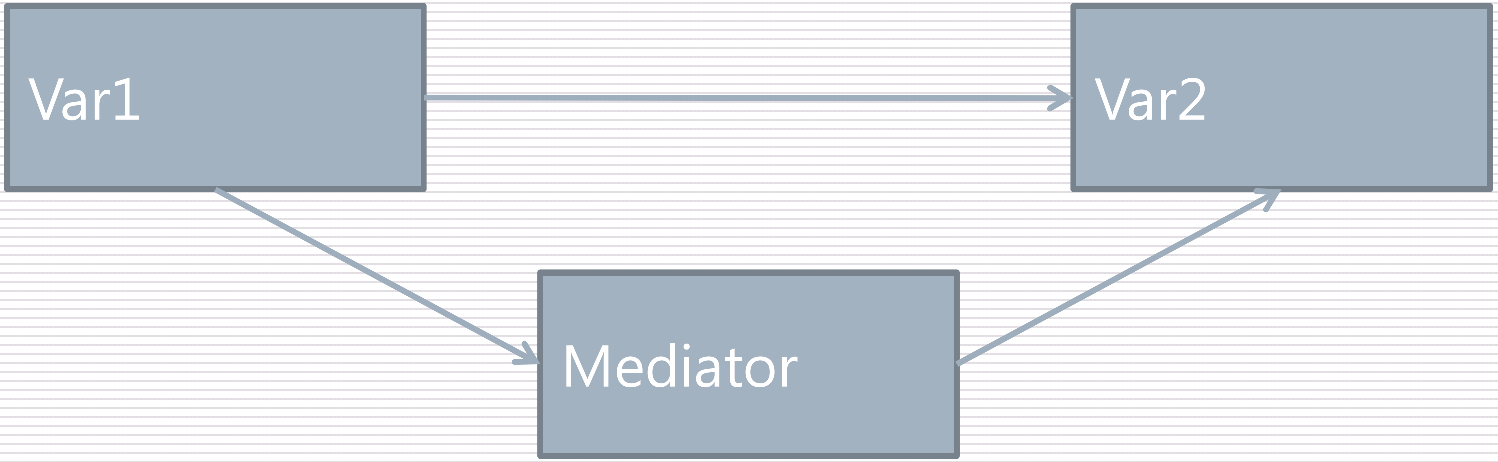
- $Y = b_0 + b_{A1}X_{A1} + b_{A2}X_{A2} + \dots + b_m X_m + e$
- Po dosazení do regresní rovnice predikujeme člověku průměr jeho skupiny (pokud nejsou žádné další prediktory).
- Indikátorové kódování
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a referenční skupinou; sig b_{Ai} znamená sig rozdílu
  - b_{Ai} udává o kolik nám členství ve skupině zvyšuje/snižuje predikovanou hodnotu oproti referenční skupině
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) průměr Y v referenční skupině
- Efektové kódování
  - b_{Ai} udává rozdíl průměrných hodnot Y mezi indikovanou skupinou a celkovým průměrem
  - b_0 udává (při absenci jiných prediktorů) celkový průměr

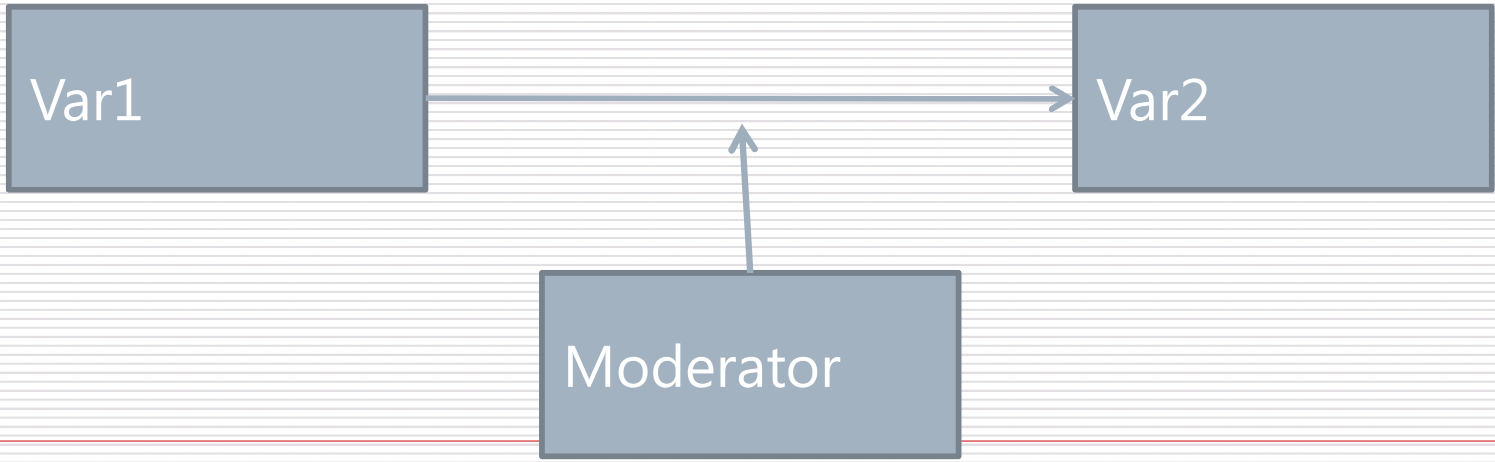
- záv: deprese
- pred: selfe, effi3, duv_r, duv_v, pohlavi a mat99
- Split podle kohorty

Moderace a Mediace

- MODERACE a MEDIACE jsou prototypickým zapojením třetí proměnné do vztahu mezi dvěma proměnnými
- Terminologii a statistiku v tomto směru ustavili před 25 lety Baron a Kenny, http://davidakenny.net/kenny.htm
- MODERÁTOR je obvykle kategorická proměnná, která mění (historicky snižuje-moderuje) těsnost vztahu mezi X a Y
- MEDIÁTOR je proměnná, skrze níž se odehrává vztah mezi X a Y. Vztah mezi X a Y je pouze zdánlivý, protože X ve skutečnosti ovlivňuje Moderátor a Moderátor následně ovlivňuje Y.

MODERACE A MEDIACE





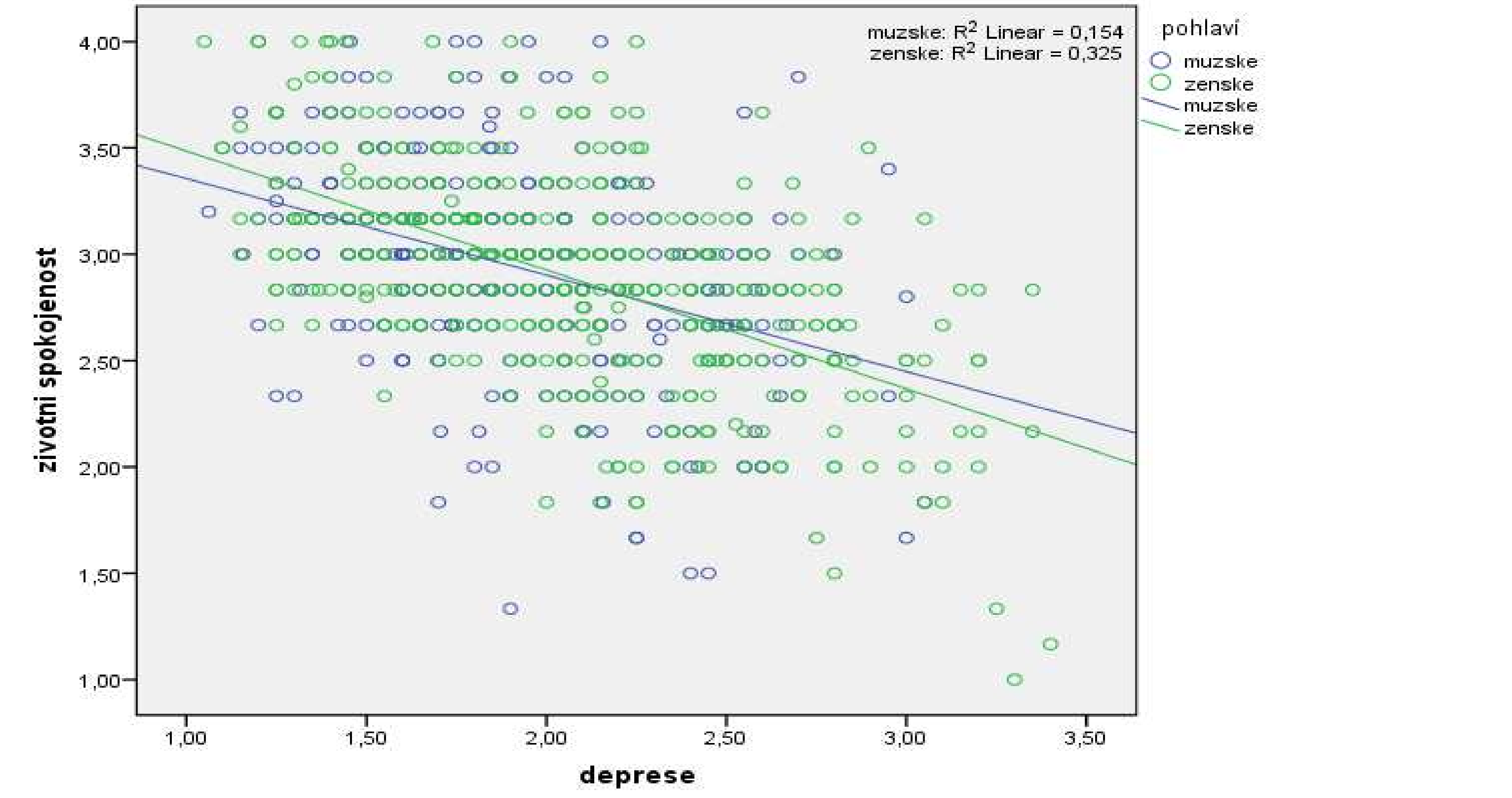
Mediace

1. X signifikantně predikuje Y (! *r* může být při plné mediaci malá)
2. X signifikantně predikuje Mediátor
3. M signifikantně predikuje Y, je-li X kontrolována
4. Původně signifikantní vztah mezi X a Y po zařazení mediátoru klesne (ideálně na 0)
5. Nepřímý efekt X na Y (přes M) se statisticky významně liší od 0 – Sobelův test ($a=B_{M.X}$, $b=B_{Y.M}$)

$$z = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 \mathrm{SE}_a^2) + (a^2 \mathrm{SE}_b^2)}}$$

Moderace

- Liší se vliv X na Y např. pro muže a ženy?



Moderace se realizuje násobením

- Je-li proměnná moderátorem vztahu prediktoru a závislé, říkáme, že moderátor **interaguje** s prediktorem
- Interagovat mohou kategorické i intervalové proměnné
- Vytvoříme novou proměnnou, která je násobkem interagujících proměnných
  - Př. depBYpoh=Deprese*pohlaví
- Vložíme do regrese tuto proměnnou vedle hlavních efektů
  - Př. ŽS=b_0 + b_1*D + b_2*P + b_3*depBYpoh + e
- Regr. koeficient vyjadřuje rozdíl vlivů jedné interagující proměnné pro různé hodnoty druhé interagující proměnné

Úkol

- Vytvořte model predikující životní spokojenost.
- Jako prediktory zařaďte ve zdůvodněném pořadí po blocích následující proměnné
  - Pohlaví a kohorta
  - Self-esteem a deprese
  - Vřelost matky a otce
  - Známka z matematiky
  - Vzdělání otce
  - Zdraví
- ~~Některé proměnné bude nutné překódovat.~~