

# Derivace

Robert Mařík

23. června 2006

# Obsah

|   |    |
|---|----|
| $y = \frac{x}{x^2 + 1}$                       | 5  |
| $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$                     | 9  |
| $y = x \ln^2 x$                               | 14 |
| $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$                       | 20 |
| $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$       | 30 |
| $y = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2$      | 39 |
| $y = x \ln(x^2 - 1)$                          | 45 |
| $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ | 50 |

|  |     |
|--|-----|
| $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$       | 56  |
| $y = \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$      | 61  |
| $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$            | 66  |
| $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$                     | 72  |
| $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$                | 77  |
| $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$                | 83  |
| $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$            | 89  |
| $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$           | 94  |
| $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$                      | 100 |
| $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ | 106 |
| $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$                    | 111 |
| $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$            | 115 |

|  |     |
|--|-----|
| $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ . . . . .                    | 119 |
| $y = \ln \sin e^{3x}$ . . . . .                                | 123 |
| $y = \sqrt{x + \ln(9 - x)}$ . . . . .                          | 128 |
| $y = \frac{x^2}{(x + 1)^3}$ . . . . .                          | 132 |
| $y = x \ln \frac{x^2}{x + 1}$ . . . . .                        | 137 |
| $y = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ . . . . .       | 143 |
| $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ . . . . .                 | 147 |
| $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x}$ . . . . .               | 153 |
| $y = \sqrt{x + 1} \operatorname{arctg} \sqrt{x + 1}$ . . . . . | 159 |

Derivujte  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

Derivujte  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

- Funkce je ve tvaru podílu.

- Užijeme pravidlo  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

Derivujte  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

- $x' = 1$  podle derivace mocninné funkce.
- $(x^2 + 1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$  podle derivace součtu a derivace mocninné funkce.

Derivujte  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a upravíme čitatele. Hotovo!



Derivujte  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

Derivujte  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

$$y' = \frac{(1 - x^3)' \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$$

- Funkce je ve tvaru podílu.

- Užijeme pravidlo  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

Derivujte  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1 - x^3)' \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{(0 - 3x^2) \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot 2x}{(x^2)^2}\end{aligned}$$

- Výraz  $(1 - x^3)'$  derivujeme jako součet.
- Výrazy  $x^2$  a  $x^3$  derivujeme jako mocninné funkce.

Derivujte  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1 - x^3)' \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\&= \frac{(0 - 3x^2) \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\&= \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4}\end{aligned}$$

Roznásobíme.

Derivujte  $y = \frac{1 - x^3}{x^2}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1 - x^3)' \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\&= \frac{(0 - 3x^2) \cdot x^2 - (1 - x^3) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\&= \frac{-3x^4 - 2x + 2x^4}{x^4} = -\frac{2 + x^3}{x^3}\end{aligned}$$

Upravíme (sečteme v čitateli, vytkneme  $(-x)$  a zkrátíme). Hotovo!

Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

$$y' = (x \ln^2 x)' = (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)'$$

Derivujeme jako součin  $(uv)'$ , kde  $u = x$  a  $v = \ln^2 x$ .

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x \ln^2 x)' = (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' \\ &= 1 \cdot \ln^2 x\end{aligned}$$

Derivace funkce  $x$  je vzorec.



Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x \ln^2 x)' = (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' \\ &= 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)'\end{aligned}$$

- Funkce  $\ln^2 x$  je složená, jedná se o funkci  $(\ln x)^2$ .
- Vnější složka je druhá mocnina, vnitřní je logaritmus.
- Pro derivaci složené funkce použijeme řetězové pravidlo

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(g^2(x))' = 2g(x)g'(x)$$

Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x \ln^2 x)' = (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' \\&= 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' \\&= \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Derivace logaritmu je tabelována.

Derivujte  $y = x \ln^2 x$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x \ln^2 x)' = (x)' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' \\&= 1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' \\&= \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\&= (2 + \ln x) \ln x\end{aligned}$$

$x \frac{1}{x} = 1$  a vytkneme  $\ln x$ . Hotovo!

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$y' = (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})'$$

Derivujeme součin funkce  $u = x^2 + 3x$  a  $v = e^{-2x}$ .

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\ &= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)'\end{aligned}$$

Derivujeme součet. Užijeme pravidlo pro derivaci součtu a pravidlo pro derivaci násobku konstantou.

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\ &= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)'\end{aligned}$$

- Derivujeme složenou funkci  $e^{-2x}$ .
- Vnější složka je exponenciální funkce a ta se při derivaci nemění.
- $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
- Vnitřní složka je  $-2x$ .

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)'\end{aligned}$$

Derivace funkcí  $x^2$  a  $x$  jsou tabelovány.



Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)'\end{aligned}$$

Derivace funkce  $(-2x)$  může být vypočítána podle derivace násobku

...

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)' \\&= (2x + 3) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot 1\end{aligned}$$

... a derivace mocninné funkce ( $x = x^1$  a tedy  $x' = 1x^0 = 1$ ).

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)' \\&= (2x + 3) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot 1 \\&= (2x + 3 + (-2)(x^2 + 3x))e^{-2x}\end{aligned}$$

Vytkneme  $e^{-2x}$ .

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)' \\&= (2x + 3) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot 1 \\&= (2x + 3 + (-2)(x^2 + 3x))e^{-2x} \\&= (-2x^2 - 4x + 3)e^{-2x}\end{aligned}$$

Upravíme uvnitř závorky.

Derivujte  $y = (x^2 + 3x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 3x)' \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot (e^{-2x})' \\&= ((x^2)' + 3(x)') \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x}(-2x)' \\&= (2x + 3 \cdot 1) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot (x)' \\&= (2x + 3) \cdot e^{-2x} + (x^2 + 3x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \cdot 1 \\&= (2x + 3 + (-2)(x^2 + 3x))e^{-2x} \\&= (-2x^2 - 4x + 3)e^{-2x} = -(2x^2 + 4x - 3)e^{-2x}\end{aligned}$$

Vytkneme. Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$y' = \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-2/3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)'$$

Třetí odmocninu bereme jako mocninu s exponentem  $\frac{1}{3}$ .  
Derivujeme tedy jako mocninnou funkci.

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$y' = \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-2/3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)'$$

Výraz pod odmocninou je vnitřní funkce. Podle řetězového pravidla násobíme derivací vnitřní složky.

$$\left( \sqrt[3]{f(x)} \right)' = \frac{1}{3} f^{\frac{1}{3}-1}(x) f'(x)$$



Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-2/3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \cdot \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$

Vnitřní složka je podíl. Užijeme pravidlo

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-2/3} \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' \\&= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \cdot \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} \\&= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$

Derivace v čitateli a jmenovateli je možno vypočítat jako derivace součtu (rozdílu) a mocninné funkce.

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$y' = \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

Tohle zatím máme.

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$

Upravíme číselník ...

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} \\&= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2} \\&= \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2}\end{aligned}$$

... a ještě více upravíme.

Derivujte  $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{3x^2(1-x^3) - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} \\&= \frac{1}{3} \left( \frac{1-x^3}{1+x^3} \right)^{2/3} \frac{6x^2}{(1-x^3)^2} \\&= \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2} = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3} \frac{2x^2}{1-x^6}}\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^2$ .

Derivujte  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

$$y' = 2 \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

- Jedná se o druhou mocninu zlomku. Vnější složka, druhá mocnina, se derivuje jako mocninná funkce.
- Derivace vnitřní složky následuje (podle řetězového pravidla).

$$(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$$



Derivujte  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

$$\begin{aligned}y' &= 2 \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\ &= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Derivace podílu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Derivujte  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

$$\begin{aligned}y' &= 2 \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Derivace čitatele a jmenovatele jsou již lehké.

Derivujte  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

$$\begin{aligned}y' &= 2 \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Upravíme.

Derivujte  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .

$$\begin{aligned}y' &= 2 \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\&= 2 \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = 4 \frac{x-1}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

Vynásobíme. Hotovo!

Derivujte  $y = x \ln(x^2 - 1)$ .

Derivujte  $y = x \ln(x^2 - 1)$ .

$$y' = x' \ln(x^2 - 1) + x (\ln(x^2 - 1))'$$

Derivace součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

kde  $u = x$  a  $v = \ln(x^2 - 1)$ .

Derivujte  $y = x \ln(x^2 - 1)$ .

$$\begin{aligned} y' &= x' \ln(x^2 - 1) + x \left( \ln(x^2 - 1) \right)' \\ &= 1 \ln(x^2 - 1) + x \frac{1}{x^2 - 1} (x^2 - 1)' \end{aligned}$$

- Derivace  $u = x$  je lehká.
- Funkce  $\ln(x^2 - 1)$  je složená s vnější složkou  $\ln(\cdot)$  a vnitřní složkou  $x^2 - 1$ .

Derivujte  $y = x \ln(x^2 - 1)$ .

$$\begin{aligned}y' &= x' \ln(x^2 - 1) + x \left( \ln(x^2 - 1) \right)' \\&= 1 \ln(x^2 - 1) + x \frac{1}{x^2 - 1} (x^2 - 1)' \\&= \ln(x^2 - 1) + x \frac{1}{x^2 - 1} 2x\end{aligned}$$

$$(x^2 - 1)' = 2x - 0 = 2x$$



Derivujte  $y = x \ln(x^2 - 1)$ .

$$\begin{aligned}y' &= x' \ln(x^2 - 1) + x \left( \ln(x^2 - 1) \right)' \\&= 1 \ln(x^2 - 1) + x \frac{1}{x^2 - 1} (x^2 - 1)' \\&= \ln(x^2 - 1) + x \frac{1}{x^2 - 1} 2x \\&= \ln(x^2 - 1) + \frac{2x^2}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Funkce je konstantní násobek logaritmické funkce.

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

- Logaritmus je pouze vnější funkce. Vnitřní funkcí je zlomek.
- Derivujeme vnější složku podle pravidla  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  a podle řetězového pravidla.

- Platí  $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$  a  $\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ .

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Pokračujeme derivací vnitřní složky.

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Upravíme čitateľ druhého zlomku. Členy s  $x^3$  sa ruší a zůstane  $4x$ .

Derivujte  $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}\end{aligned}$$

Vynásobíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ .



Derivujte  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ .

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \left( 0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

podle derivace mocninné funkce. Toto musíme spojit s řetězovým pravidlem

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \left( 0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left( 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \right) \end{aligned}$$

Vytkneme  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ .

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \left( 0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) \\&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left( 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \right) \\&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

Převědeme na společného jmenovatele a sečteme.

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \left( 0 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) \\&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left( 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \right) \\&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} \\&= \frac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})}\end{aligned}$$

Zkrátíme  $\sqrt{x+1}$ . Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

Derivujte  $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$y' = (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})'$$

Derivace součinu.

Derivujte  $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' \\&= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin \sqrt{x} \\&\quad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})'\end{aligned}$$

Řetězové pravidlo pro  $\sqrt{1-x}$  a pro  $\arcsin(\sqrt{x})$

Derivujte  $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' \\&= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin \sqrt{x} \\&\quad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' \\&= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Derivace vnitřní složky.



Derivujte  $y = \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}y' &= (\sqrt{1-x})' \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' \\&= \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)' \cdot \arcsin \sqrt{x} \\&\quad + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' \\&= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\&= -\frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Výraz  $\sqrt{1-x}$  se zkrátí. Hotovo!

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

$$y' = \left( (x^2 + 1) \sin x \right)' + (x \cos x)'$$

Derivace součtu.

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (x^2 + 1) \sin x \right)' + (x \cos x)' \\ &= (x^2 + 1)' \sin x + (x^2 + 1)(\sin x)' + x' \cos x + x(\cos x)'\end{aligned}$$

Dvkrát derivace součinu.

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (x^2 + 1) \sin x \right)' + (x \cos x)' \\&= (x^2 + 1)' \sin x + (x^2 + 1)(\sin x)' + x' \cos x + x(\cos x)' \\&= 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\sin x)\end{aligned}$$

Aplikace vzorců.

$$(x^2)' = 2x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (x^2 + 1) \sin x \right)' + (x \cos x)' \\&= (x^2 + 1)' \sin x + (x^2 + 1)(\sin x)' + x' \cos x + x(\cos x)' \\&= 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) \\&= (2x - x) \sin(x) + (x^2 + 1 + 1) \cos x\end{aligned}$$

Vytkneme goniometrické funkce

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \sin x + x \cos x$

$$\begin{aligned}y' &= \left( (x^2 + 1) \sin x \right)' + (x \cos x)' \\&= (x^2 + 1)' \sin x + (x^2 + 1)(\sin x)' + x' \cos x + x(\cos x)' \\&= 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) \\&= (2x - x) \sin(x) + (x^2 + 1 + 1) \cos x \\&= x \sin x + (x^2 + 2) \cos x\end{aligned}$$

Upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$



Derivujte  $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$

$$y' = (x^2 + 1)' \cos(2x) + (x^2 + 1)(\cos(2x))'$$

Derivace součinu.

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 1)' \cos(2x) + (x^2 + 1)(\cos(2x))' \\ &= 2x \cos(2x) + (x^2 + 1)(-\sin(2x))(2x)'\end{aligned}$$

Vypočtete derivace. Derivujeme složenou funkci.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$[\cos(f(x))]' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 1)' \cos(2x) + (x^2 + 1)(\cos(2x))' \\&= 2x \cos(2x) + (x^2 + 1)(-\sin(2x))(2x)' \\&= 2x \cos(2x) - (x^2 + 1) \sin(2x)2\end{aligned}$$

Dopočítáme derivaci.

Derivujte  $y = (x^2 + 1) \cos(2x)$

$$\begin{aligned}y' &= (x^2 + 1)' \cos(2x) + (x^2 + 1)(\cos(2x))' \\&= 2x \cos(2x) + (x^2 + 1)(-\sin(2x))(2x)' \\&= 2x \cos(2x) - (x^2 + 1) \sin(2x) 2 \\&= 2x \cos(2x) - 2(x^2 + 1) \sin(2x)\end{aligned}$$

Upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

$$y' = \frac{\left[ (x^2 + 1)^3 \right]' x^4 - (x^2 + 1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$

Derivace podílu.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

$$y' = \frac{[(x^2 + 1)^3]' x^4 - (x^2 + 1)^3 (x^4)'}{(x^4)^2}$$
$$= \frac{3(x^2 + 1)^2 (x^2 + 1)' x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^{2 \cdot 4}}$$

Derivujeme složenou funkci.

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$[(f(x))^3]' = 3(f(x))^2 f'(x)$$

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{[(x^2 + 1)^3]'x^4 - (x^2 + 1)^3(x^4)'}{(x^4)^2} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(x^2 + 1)'x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^{2 \cdot 4}} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(2x)x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^8}\end{aligned}$$



Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{[(x^2 + 1)^3]'x^4 - (x^2 + 1)^3(x^4)'}{(x^4)^2} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(x^2 + 1)'x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^{2 \cdot 4}} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(2x)x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^8} \\&= \frac{2(x^2 + 1)^2 x^3 [3x^2 - 2(x^2 + 1)]}{x^8}\end{aligned}$$

Vytkneme v čitateli.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{[(x^2 + 1)^3]'x^4 - (x^2 + 1)^3(x^4)'}{(x^4)^2} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(x^2 + 1)'x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^{2 \cdot 4}} \\&= \frac{3(x^2 + 1)^2(2x)x^4 - (x^2 + 1)^3 4x^3}{x^8} \\&= \frac{2(x^2 + 1)^2 x^3 [3x^2 - 2(x^2 + 1)]}{x^8} \\&= 2 \frac{(x^2 + 1)^2 (x^2 - 2)}{x^5}\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

$$y' = \left[ \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4} \right]'$$

Umocníme podle vzorce

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4} \right]' \\ &= \left[ x^2 + 3 + 3x^{-2} + x^{-4} \right]'\end{aligned}$$

Vydělíme každý člen čitatele.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4} \right]' \\&= \left[ x^2 + 3 + 3x^{-2} + x^{-4} \right]' \\&= 2x + 0 + 3(-2)x^{-3} + (-4)x^{-5}\end{aligned}$$

Derivujeme součet (přesněji lineární kombinaci) čtyř mocninných funkcí.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4} \right]' \\&= \left[ x^2 + 3 + 3x^{-2} + x^{-4} \right]' \\&= 2x + 0 + 3(-2)x^{-3} + (-4)x^{-5} \\&= 2x - \frac{6}{x^3} - \frac{4}{x^5}\end{aligned}$$

Přepíšeme záporné mocniny na zlomky.

Derivujte  $y = \frac{(x^2 + 1)^3}{x^4}$  tak, že nejprve upravíte.

$$\begin{aligned}y' &= \left[ \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^4} \right]' \\&= \left[ x^2 + 3 + 3x^{-2} + x^{-4} \right]' \\&= 2x + 0 + 3(-2)x^{-3} + (-4)x^{-5} \\&= 2x - \frac{6}{x^3} - \frac{4}{x^5} = \frac{2x^6 - 6x^2 - 4}{x^5}\end{aligned}$$

Upravíme. Derivování bylo jednodušší než v předchozím postupu, ale hůř se bude řešit rovnice  $y' = 0$ . Hotovo!



Derivujte  $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$

Derivujte  $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$

$$y' = \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} (x + \arcsin(2\sqrt{x}))'$$

Derivujeme složenou funkci

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

Derivujte  $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} (x + \arcsin(2\sqrt{x}))' \\ &= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\sqrt{x})^2}} (2\sqrt{x})' \right)\end{aligned}$$

Derivace součtu a derivace složené funkce.

$$\left( \arcsin f(x) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}} f'(x)$$

Derivujte  $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} (x + \arcsin(2\sqrt{x}))' \\&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\sqrt{x})^2}} (2\sqrt{x})' \right) \\&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \right)\end{aligned}$$

Derivujeme složenou funkci

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

Derivujte  $y = \ln(x + \arcsin(2\sqrt{x}))$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} (x + \arcsin(2\sqrt{x}))' \\&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\sqrt{x})^2}} (2\sqrt{x})' \right) \\&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \right) \\&= \frac{1}{x + \arcsin(2\sqrt{x})} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 - 4x}} \right)\end{aligned}$$

Upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)'$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$$

Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)'\end{aligned}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}(f(x))^{-1/2} \cdot f'(x)$$



Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot (1+0)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot (1+0)}{(x+1)^2} \\&= \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Derivujte  $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+1} - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot (1+0)}{(x+1)^2} \\&= \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

$$y' = (x^3 + 2x)'e^{-2x} + (x^3 + 2x)(e^{-2x})'$$

Derivujeme součin funkcí  $(uv)' = u'v + uv'$

Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3 + 2x)'e^{-2x} + (x^3 + 2x)(e^{-2x})' \\ &= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2x)'\end{aligned}$$

Derivujeme složenou funkci

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3 + 2x)'e^{-2x} + (x^3 + 2x)(e^{-2x})' \\ &= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2x)' \\ &= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2)\end{aligned}$$

Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3 + 2x)'e^{-2x} + (x^3 + 2x)(e^{-2x})' \\&= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2x)' \\&= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2) \\&= e^{-2x}(3x^2 + 2 - 2(x^3 + 2x))\end{aligned}$$



Derivujte  $y = (x^3 + 2x)e^{-2x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3 + 2x)'e^{-2x} + (x^3 + 2x)(e^{-2x})' \\&= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2x)' \\&= (3x^2 + 2)e^{-2x} + (x^3 + 2x)e^{-2x}(-2) \\&= e^{-2x}(3x^2 + 2 - 2(x^3 + 2x)) \\&= e^{-2x}(-2x^3 + 3x^2 - 4x + 2)\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte funkci  $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ .

Derivujte funkci  $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ .

$$y = (x^2 - 1)' \sin(2x) + (x^2 - 1) (\sin(2x))' \\ - \left[ (3x - 1)' \cos(2x) + (3x - 1) (\cos(2x))' \right]$$

Derivujeme dvakrát součin (barevně odlišeno).

Derivujte funkci  $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ .

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 1)' \sin(2x) + (x^2 - 1) (\sin(2x))' \\ &\quad - \left[ (3x - 1)' \cos(2x) + (3x - 1) (\cos(2x))' \right] \\ &= 2x \sin(2x) + (x^2 - 1) \cos(2x) \cdot 2 \\ &\quad - \left[ 3 \cos(2x) + (3x - 1) (-\sin(2x)) \cdot 2 \right] \end{aligned}$$

Argumentem sinu a kosinu není  $x$  ale funkce  $2x$ , užijeme tedy pravidlo pro derivaci složené funkce (řetězové pravidlo).

Derivujte funkci  $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ .

$$\begin{aligned}y &= (x^2 - 1)' \sin(2x) + (x^2 - 1) (\sin(2x))' \\&\quad - \left[ (3x - 1)' \cos(2x) + (3x - 1) (\cos(2x))' \right] \\&= 2x \sin(2x) + (x^2 - 1) \cos(2x) \cdot 2 \\&\quad - \left[ 3 \cos(2x) + (3x - 1) (-\sin(2x)) \cdot 2 \right] \\&= \sin(2x) [2x + 2(3x - 1)] + \cos(2x) [2(x^2 - 1) - 3]\end{aligned}$$

Vytkneme sinus a kosinus ze členů, kde se tyto výrazy vyskytují.

Derivujte funkci  $y = (x^2 - 1) \sin(2x) - (3x - 1) \cos(2x)$ .

$$\begin{aligned}y &= (x^2 - 1)' \sin(2x) + (x^2 - 1) (\sin(2x))' \\ &\quad - \left[ (3x - 1)' \cos(2x) + (3x - 1) (\cos(2x))' \right] \\ &= 2x \sin(2x) + (x^2 - 1) \cos(2x) \cdot 2 \\ &\quad - \left[ 3 \cos(2x) + (3x - 1) (-\sin(2x)) \cdot 2 \right] \\ &= \sin(2x) [2x + 2(3x - 1)] + \cos(2x) [2(x^2 - 1) - 3] \\ &= \sin(2x) [8x - 2] + \cos(2x) [2x^2 - 5]\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$

Derivujte  $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ (2 + \cos(2x))^{\frac{1}{2}} \right]' \\ &= \frac{1}{2} \cdot [2 + \cos(2x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 + \cos(2x)]'\end{aligned}$$

- Odmocninu derivujeme jako mocninnou funkci s exponentem  $\frac{1}{2}$ .
- Pod odmocninou není  $x$ , ale vnitřní složka. Musíme proto násobit derivací vnitřní složky.



Derivujte  $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ (2 + \cos(2x))^{\frac{1}{2}} \right]' \\&= \frac{1}{2} \cdot [2 + \cos(2x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 + \cos(2x)]' \\&= \frac{1}{2\sqrt{2 + \cos(2x)}} \cdot [0 - \sin(2x) \cdot 2]\end{aligned}$$

- Derivujeme součet.
- Při derivaci funkce  $\cos(2x)$  opět užíváme pravidlo pro derivaci složené funkce, protože argumentem není  $x$ , ale  $(2x)$ .

Derivujte  $y = \sqrt{2 + \cos(2x)}$

$$\begin{aligned}y' &= \left[ (2 + \cos(2x))^{\frac{1}{2}} \right]' \\&= \frac{1}{2} \cdot [2 + \cos(2x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot [2 + \cos(2x)]' \\&= \frac{1}{2\sqrt{2 + \cos(2x)}} \cdot [0 - \sin(2x) \cdot 2] \\&= -\frac{\sin(2x)}{\sqrt{2 + \cos(2x)}}\end{aligned}$$

Upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin x}}} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)(\sin x)^{-2} \cdot \cos x$$

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin x}}} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)(\sin x)^{-2} \cdot \cos x \\ &= \sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (-1) \frac{1}{\sin^2 x} \cos x\end{aligned}$$

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin x}}} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)(\sin x)^{-2} \cdot \cos x \\&= \sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sin x} \cdot (-1) \frac{1}{\sin^2 x} \cos x \\&= -\frac{1}{2} \cotg x\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ .

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ .

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot (\ln \sin x)'$$

Nejprve upravíme.

$$y = \ln \sqrt{\sin^{-1} x} = \ln \sin^{-\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{2} \cdot \ln \sin x$$



Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{2} \cdot (\ln \sin x)' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\end{aligned}$$

Derivujeme složenou funkci. Vnější složka je  $\ln(\cdot)$  a vnitřní složka je  $\sin(x)$ .

Derivujte  $y = \ln \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ .

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{2} \cdot (\ln \sin x)' \\&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\&= -\frac{1}{2} \cdot \cotg x\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \ln \sin e^{3x}$ .

Derivujte  $y = \ln \sin e^{3x}$ .

$$y' = \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot (\sin e^{3x})'$$

Derivujeme logaritmus, vnitřní složka je  $\sin e^{3x}$ .

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Derivujte  $y = \ln \sin e^{3x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot (\sin e^{3x})' \\ &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot \cos e^{3x} \cdot (e^{3x})'\end{aligned}$$

Derivujeme sinus, vnitřní složka je  $e^{3x}$ .

$$(\sin x)' = \cos x$$

Derivujte  $y = \ln \sin e^{3x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot (\sin e^{3x})' \\&= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot \cos e^{3x} \cdot (e^{3x})' \\&= \operatorname{cotg}(e^{3x}) \cdot e^{3x} (3x)'\end{aligned}$$

Derivujeme exponenciálu, vnitřní složka je  $3x$ .

$$(e^x)' = e^x$$

Derivujte  $y = \ln \sin e^{3x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot (\sin e^{3x})' \\&= \frac{1}{\sin e^{3x}} \cdot \cos e^{3x} \cdot (e^{3x})' \\&= \operatorname{cotg}(e^{3x}) \cdot e^{3x} (3x)' \\&= \operatorname{cotg}(e^{3x}) \cdot e^{3x} \cdot 3\end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt{x + \ln(9 - x)}$



Derivujte  $y = \sqrt{x + \ln(9 - x)}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x + \ln(9 - x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (x + \ln(9 - x))'$$

Derivujeme odmocninu.

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2} (f(x))^{-\frac{1}{2}} f'(x)$$

Derivujte  $y = \sqrt{x + \ln(9 - x)}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \left(x + \ln(9 - x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x + \ln(9 - x)\right)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \ln(9 - x)}} \left(1 + \frac{1}{9 - x} \cdot (0 - 1)\right) \end{aligned}$$

Upravíme **zápornou mocninu** a doderivujeme vnitřní složku původní odmocniny. U logaritmu se jedná se opět o složenou funkci a derivujeme i **vnitřní složku**.

Derivujte  $y = \sqrt{x + \ln(9 - x)}$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2} \cdot (x + \ln(9 - x))^{-\frac{1}{2}} \cdot (x + \ln(9 - x))' \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \ln(9 - x)}} \left( 1 + \frac{1}{9 - x} \cdot (0 - 1) \right) \\&= \frac{8 - x}{2(9 - x)\sqrt{x + \ln(9 - x)}}\end{aligned}$$

Sečteme výraz v závorce a upravíme. Hotovo!

Derivujte  $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ .

Derivujte  $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ .

$$y' = \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2[(x+1)^3]'}{(x+1)^{3 \cdot 2}}$$

Derivujeme podíl.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivujte  $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2[(x+1)^3]'}{(x+1)^{3 \cdot 2}} \\ &= \frac{2x(x+1)^3 - x^2 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6}\end{aligned}$$

Vypočteme jednotlivé derivace. Funkci  $(x+1)^3$  derivujeme jako funkci složenou.

Derivujte  $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2[(x+1)^3]'}{(x+1)^{3 \cdot 2}} \\&= \frac{2x(x+1)^3 - x^2 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6} \\&= \frac{x(x+1)^2[2(x+1) - 3x]}{(x+1)^6}\end{aligned}$$

Vytkneme.

Derivujte  $y = \frac{x^2}{(x+1)^3}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^2)'(x+1)^3 - x^2[(x+1)^3]'}{(x+1)^{3 \cdot 2}} \\&= \frac{2x(x+1)^3 - x^2 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1}{(x+1)^6} \\&= \frac{x(x+1)^2[2(x+1) - 3x]}{(x+1)^6} \\&= \frac{x(2-x)}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

Zkrátíme  $(x+1)^2$  a upravíme v hranaté závorce. Hotovo!



Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

$$y' = (x)' \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \left( \ln \frac{x^2}{x+1} \right)'$$

Derivujeme součin.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x)' \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \left( \ln \frac{x^2}{x+1} \right)' \\ &= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \frac{x+1}{x^2} \cdot \left( \frac{x^2}{x+1} \right)'\end{aligned}$$

Derivujeme jednotlivé členy. Logaritmus derivujeme jako složenou funkci.

Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x)' \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \left( \ln \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \frac{x+1}{x^2} \cdot \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + 1 \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot (1+0)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Vnitřní složka logaritmu je podíl, použijeme tedy pravidlo pro derivaci podílu.

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x)' \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \left( \ln \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \frac{x+1}{x^2} \cdot \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + 1 \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot (1+0)}{(x+1)^2} \\&= \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x+1}\end{aligned}$$

Zkrátíme  $(x+1)$  a upravíme čitateľ posledného zlomku.

Derivujte  $y = x \ln \frac{x^2}{x+1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x)' \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \left( \ln \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + x \cdot \frac{x+1}{x^2} \cdot \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' \\&= 1 \cdot \ln \frac{x^2}{x+1} + 1 \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot (1+0)}{(x+1)^2} \\&= \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x+1} = \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{x+2}{x+1}\end{aligned}$$

Upravíme do finálního tvaru. Hotovo!

Derivujte  $y = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ .

Derivujte  $y = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ .

$$y' = (2x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot (\operatorname{arctg} x)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)'$$

Derivujeme součin a složenou funkci.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$



Derivujte  $y = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ .

$$\begin{aligned}y' &= (2x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot (\operatorname{arctg} x)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' \\ &= 2 \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x\end{aligned}$$

Dokončíme derivování.

Derivujte  $y = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ .

$$\begin{aligned}y' &= (2x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot (\operatorname{arctg} x)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' \\&= 2 \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \\&= 2 \operatorname{arctg} x\end{aligned}$$

Poslední dva členy se odečtou. Hotovo!

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

$$y' = (x^3)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (\arcsin x)' + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)'$$

Derivujeme součin a složenou funkci.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (\arcsin x)' + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)' \\ &= 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x)\end{aligned}$$

Dokončíme derivování.

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (\arcsin x)' + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)' \\&= 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \\&= 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

Zkrátíme dvojku a sečteme zlomky.

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (\arcsin x)' + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)' \\&= 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \\&= 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x^2}} \\&= 3x^2 \arcsin x - x \cdot \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

Vytkneme  $(-x)$ .

Derivujte  $y = x^3 \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

$$\begin{aligned}y' &= (x^3)' \cdot \arcsin x + x^3 \cdot (\arcsin x)' + \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)' \\&= 3x^2 \cdot \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \\&= 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x^2}} \\&= 3x^2 \arcsin x - x \cdot \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\&= 3x^2 \arcsin x - x \cdot \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

Zkrátíme. Hotovo!



Derivujte  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$ .

Derivujte  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$ .

$$y' = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x}$$

Funkce je ve tvaru podílu, použijeme tedy pravidlo pro derivaci podílu.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Derivujte  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$ .

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} \end{aligned}$$

- Dopočítáme derivace.
- Pod odmocninou je vnitřní složka a uijeme pravidlo pro derivace složené funkce.

Derivujte  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x} \\&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} \\&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \arcsin x}{\arcsin^2 x} - \frac{1}{\arcsin^2 x}\end{aligned}$$

Rozdělíme na dva zlomky a zkrátíme v čitateli druhého zlomku.

$$\text{Derivujte } y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}.$$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x} \\&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} \\&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \arcsin x}{\arcsin^2 x} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \\&= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-x)}{\arcsin x} - \frac{1}{\arcsin^2 x}\end{aligned}$$

Provedeme kráčení.

Derivujte  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}$ .

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\arcsin x}{\arcsin^2 x} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \\
 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-x)}{\arcsin x} - \frac{1}{\arcsin^2 x} \\
 &= \frac{-x}{\arcsin x} - \frac{1}{\arcsin^2 x}
 \end{aligned}$$

Hotovo!

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} \operatorname{arctg} \sqrt{x+1}$ .

Derivujte  $y = \sqrt{x+1} \operatorname{arctg} \sqrt{x+1}$ .

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (1+0) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (1+0)$$

Derivujeme součin a složenou funkci podle pravidel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$



Derivujte  $y = \sqrt{x+1} \operatorname{arctg} \sqrt{x+1}$ .

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (1+0) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + \\ &\quad + \sqrt{x+1} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (1+0) \\ &= \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

Upravíme a zkrátíme.

Konec