Inženýrská matematika Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Robert Mařík

12. září 2006

Obsah

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y \quad , \qquad z'_y = 4y^3 - 4x \quad ,$

- Vypočteme parciální derivace.
- Při derivování podle x považujeme y za konstantu a naopak.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

Hledáme stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0, \\ 4y^3 - 4x &= 0. \end{aligned}}$$

Toto je soustava, kterou řešíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0, \\ 4y^3 - 4x &= 0. \end{aligned}}$$

$$y = x^3$$

Osamostatníme y z první rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} &4x^3 - 4y = 0,\\ &4y^3 - 4x = 0.\end{aligned}}$$

$y = x^3$

$4(x^3)^3 - 4x = 0,$

Dosadíme za y do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0, \\ 4y^3 - 4x &= 0. \end{aligned}}$$

$$y = x^3$$

$$4(x^3)^3 - 4x = 0,$$

$$4x^9 - 4x = 0,$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0, \\ 4y^3 - 4x &= 0. \end{aligned}} \qquad y = x^3 \qquad \begin{aligned} 4(x^3)^3 - 4x &= 0, \\ x^9 - \ x &= 0, \\ x(x^8 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Rozložíme na součin.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0,\qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0,\\ 4y^3 - 4x &= 0. \end{aligned}} \qquad y = x^3 \qquad \begin{aligned} 4(x^3)^3 - 4x &= 0,\\ x^9 - x &= 0,\\ x(x^8 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Případ 1:	Případ 2:	Případ 3:
$x = 0$,	$x = 1$,	$x = -1$,

- Buď $x = 0$, nebo $(x^8 - 1) = 0$.
- Druhý případ dává $x^8 = 1$ a $x = \pm 1$.
- Uvažujme tedy tři různé případy

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y = 0,\qquad z'_y = 4y^3 - 4x = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0,\\ 4y^3 - 4x &= 0.\end{aligned}} \qquad y = x^3 \qquad \begin{aligned} 4(x^3)^3 - 4x &= 0,\\ x^9 - \ x &= 0,\\ x(x^8 - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Případ 1:

$x = 0$, $y = 0$

$S_1 = [0, 0]$,

Případ 2:

$x = 1$, $y = 1$

$S_2 = [1, 1]$,

Případ 3:

$x = -1$, $y = -1$

$S_3 = [-1, -1]$.

Najdeme odpovídající y ke každému x ($y = x^3$). Dostáváme tři stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y$, $z'_y = 4y^3 - 4x$,

$S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [1, 1]$, $S_3 = [-1, -1]$.

$z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$, $z''_{yy} = 12y^2$.

- Funkce má tři stacionární body.
- Kvalitu těchto stacionárních bodů vyšetříme pomocí druhé derivace a Hessiánu.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y$, $z'_y = 4y^3 - 4x$,

$S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [1, 1]$, $S_3 = [-1, -1]$.

$z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$, $z''_{yy} = 12y^2$.

$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, sedlo v bodě $[0, 0]$

- Vypočteme Hessián ve stacionárním bodě S_1.
- Hessián je záporný a funkce v tomto bodě nemá lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y$, $z'_y = 4y^3 - 4x$,

$S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [1, 1]$, $S_3 = [-1, -1]$.

$z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$, $z''_{yy} = 12y^2$.

$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, sedlo v bodě $[0, 0]$

$H(S_2) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 16^2 - 16 > 0$, lok. min. v bodě $[1, 1]$

- V bodě S_2 je Hessián kladný a funkce zde má lokální extrém.
- Protože $z''_{xx} = 16 > 0$, funkce má v bodě S_2 lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y$, $z'_y = 4y^3 - 4x$,

$S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [1, 1]$, $S_3 = [-1, -1]$.

$z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$, $z''_{yy} = 12y^2$.

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ sedlo v bodě } [0, 0]$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 16^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [1, 1]$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 16^2 - 16 > 0, \text{ lok. min. v bodě } [-1, -1]$$

- Hessián je kladný v bodě S_3 a funkce zde tedy má lokální extrém.
- Protože $z''_{xx} = 16 > 0$, má funkce v bodě S_3 lokální minimum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$

$z'_x = 4x^3 - 4y$, $z'_y = 4y^3 - 4x$,

$S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [1, 1]$, $S_3 = [-1, -1]$.

$z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$, $z''_{yy} = 12y^2$.

$H(S_1) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$, sedlo v bodě $[0, 0]$

$H(S_2) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 16^2 - 16 > 0$, lok. min. v bodě $[1, 1]$

$H(S_3) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 16^2 - 16 > 0$, lok. min. v bodě $[-1, -1]$

Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x$$

$$z'_y$$

Budeme hledat parciální derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x$$

$$z'_y$$

Derivujeme nejprve podle x. Derivujeme podle pravidla pro derivaci součtu a konstantního násobku.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$z'_x = y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x$$

$$z'_y$$

Vypočteme derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$
\begin{aligned}
z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\
&= 2x(y^2 - 1)
\end{aligned}
$$

$$z'_y$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1) \\ z'_y &= x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y \end{aligned}$$

Podobně derivujeme podle y.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1) \\ z'_y &= x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y = x^2 2y - 2y \end{aligned}$$

Vypočteme jednotlivé derivace.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} z'_x &= y^2(x^2)'_x - (x^2)'_x = y^2 2x - 2x \\ &= 2x(y^2 - 1) \\ z'_y &= x^2(y^2)'_y - (y^2)'_y = x^2 2y - 2y \\ &= 2y(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

Máme první derivace, které použijeme pro hledání stacionárních bodů.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0$; $\qquad z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Položíme derivace rovny nule.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0$; $\quad z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

- Řešíme soustavu nelineárních rovnic
- Začneme s první rovnicí.
- Tato rovnice je ve tvaru "součin rovná se nule".

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$ $z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

- Jeden ze součinitelů na levé straně první rovnice musí být nula.
- Budeme zpracovávat odděleně případy, kdy $x = 0$ a $(y^2 - 1) = 0$, t.j., $y = \pm 1$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$ $z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

$2y(0 - 1) = 0$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

- Případ 1.
- Dosadíme $x = 0$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$ $z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$S_1 = [0, 0];$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

Najdeme y. Dostáváme stacionární bod S_1.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$ $z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

$S_1 = [0, 0];$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

- Podobně pro Případ 2.
- Dosadíme $y = 1$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1) = 0;$ $z'_y = 2y(x^2 - 1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

$$2y(0 - 1) = 0$$

$$y = 0$$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = \pm 1$$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$;

- Vyřešíme vzhledem k x.
- Dostáváme dvě řešení a tedy i dva stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2-1) = 0$; $z'_y = 2y(x^2-1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$

$$2y(0-1) = 0$$

$$y = 0$$

Případ 2: $\boxed{y = 1}$

$$2(x^2-1) = 0$$

$$x^2 = \pm 1$$

Případ 3: $\boxed{y = -1}$

$$-2(x^2-1) = 0$$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$;

- Podobně Případ 3.
- Dosadíme $y = -1$ do druhé rovnice.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2-1) = 0$; $z'_y = 2y(x^2-1) = 0$

Případ 1: $\boxed{x = 0}$	Případ 2: $\boxed{y = 1}$	Případ 3: $\boxed{y = -1}$
$2y(0-1) = 0$	$2(x^2-1) = 0$	$-2(x^2-1) = 0$
$y = 0$	$x^2 = \pm 1$	$x^2 = \pm 1$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

- Řešíme kvadratickou rovnici pro x.
- Máme dvě řešení a dva další stacionární body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

z''_{xx}

z''_{xy}

z''_{yy}

Celkem má funkce pět stacionárních bodů. Nyní budeme vyšetřovat tyto body pomocí druhé derivace. .

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$

$$z''_{xy}$$

$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle x a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$
$$z''_{xy} = 2x(y^2 - 1)'_y = 2x \cdot (2y + 0) = 4xy$$
$$z''_{yy}$$

Derivujeme z'_x podle y a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

$$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)(x)'_x = 2(y^2 - 1) \cdot 1$$
$$z''_{xy} = 2x(y^2 - 1)'_y = 2x \cdot (2y + 0) = 4xy$$
$$z''_{yy} = 2(x^2 - 1)(y)'_y = 2(x^2 - 1) \cdot 1$$

Derivujeme z'_y podle y a upravíme.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Použijeme druhé derivace pro testování stacionárních bodů na existenci a kvalitu lokáního extrému. Začneme bodem S_1 a vypočteme Hessián

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[0,0]} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

V bodě S_1 má funkce lokální maximum.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2-1)$; $z'_y = 2y(x^2-1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$z''_{xx} = 2(y^2-1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2-1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[1,1]} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_2 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2-1)$; $z'_y = 2y(x^2-1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$z''_{xx} = 2(y^2-1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2-1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[-1,1]} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_3 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_4) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[1,-1]} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_4 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \qquad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_5) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}_{[x,y]=[-1,-1]} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

V bodě S_5 není lokální extrém.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2 - 1)$; $z'_y = 2y(x^2 - 1)$

$S_1 = [0, 0]$; $S_2 = [1, 1]$; $S_3 = [-1, 1]$; $S_4 = [1, -1]$; $S_5 = [-1, -1]$

$z''_{xx} = 2(y^2 - 1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2 - 1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \qquad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

- Jediný lokální extrém je v bodě $S_1 = [0, 0]$. Jedná se o lokální maximum.
- Ostatní stacionární body jsou sedlové body.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$z'_x = 2x(y^2-1)$; $z'_y = 2y(x^2-1)$

$S_1 = [0,0]$; $S_2 = [1,1]$; $S_3 = [-1,1]$; $S_4 = [1,-1]$; $S_5 = [-1,-1]$

$z''_{xx} = 2(y^2-1)$; $z''_{xy} = 4xy$; $z''_{yy} = 2(x^2-1)$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad H(S_4) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0 \qquad H(S_5) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Hotovo!

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

The $\ln(\cdot)$ function yields restrictions to the domain of the function.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y}$,

We find the partial derivatives. Differentiating with respect to x we use the constant multiple rule, since in the product $y\ln(x^2+y)$ the factor y is treated as a constant. The chain rule follows, since the function $\ln(x^2+y)$ is a composite function with inside function (x^2+y).

$$(y\ln(x^2+y))'_x = y(\ln(x^2+y))'_x = y\frac{1}{x^2+y}(2x+0)$$

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y>0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y} \quad , \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

Differentiating with respect to y we use the product rule, since both factors y and $\ln(x^2+y)$ are functions (x is treated as a constant and y as a variable).

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y>0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y} = 0$$

To find stationary points we put the derivatives equal to zero.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y} = 0$$

$$2xy = 0$$

- We start with the first (simpler) equation.
- The fraction equals zero iff the numerator is zero.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2 + y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \dfrac{y}{x^2 + y} = 0$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

CASE 2: $y = 0$

- To ensure that a product is zero, (at least) one of the factors has to be zero.
- We distinguish two possible cases.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \dfrac{y}{x^2+y} = 0$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$

$$\ln y = -1,$$

CASE 2: $y = 0$

We substitute $x = 0$ into the second equation and simplify.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2 + y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2 + y} = 0, \quad z'_y = \ln(x^2 + y) + \dfrac{y}{x^2 + y} = 0$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$
$$\ln y = -1,$$
$$y = e^{-1}$$

CASE 2: $y = 0$

The inverse function to ln function is an exponential function.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2 + y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \qquad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$
$$\ln y = -1,$$
$$y = e^{-1}$$

$\boxed{S_1 = [0, e^{-1}]}$

CASE 2: $y = 0$

- We have the stationary point $S_1 = [0, e^{-1}]$. We check that $S_1 \in \mathrm{Dom}(f)$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2 + y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2 + y} = 0, \qquad z'_y = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y} = 0$$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$
$$\ln y = -1,$$
$$y = e^{-1}$$

$S = [0, e^{-1}]$

CASE 2: $y = 0$

$$\ln(x^2) = 0$$

- We return to the Case 2.
- We put $y = 0$ into the red equation.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y} = 0, \qquad z'_y = \ln(x^2+y) + \dfrac{y}{x^2+y} = 0$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\ln y + \frac{y}{y} = 0,$$
$$\ln y = -1,$$
$$y = e^{-1}$$

$$\boxed{S_1 = [0, e^{-1}]}$$

CASE 2: $y = 0$

$$\ln(x^2) = 0$$
$$x^2 = e^0 = 1$$
$$x = \pm 1$$

We isolate x^2 and solve for x.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y > 0\}$

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y}$, $z'_y = \ln(x^2+y) + \dfrac{y}{x^2+y} = 0$

$2xy = 0$

CASE 1: $x = 0$

$$\begin{aligned} \ln y + \frac{y}{y} &= 0, \\ \ln y &= -1, \\ y &= e^{-1} \end{aligned}$$

$\boxed{S_1 = [0, e^{-1}]}$

CASE 2: $y = 0$

$$\begin{aligned} \ln(x^2) &= 0 \\ x^2 &= e^0 = 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$\boxed{S_2 = [1, 0]}$ and $\boxed{S_3 = [-1, 0]}$.

We have two stationary points. We check that both belong to $\mathrm{Dom}(f)$.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y \ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y} \quad , \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

Up to now we have this.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y} \quad , \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

z''_{xx}

z''_{xy}

z''_{yy}

We will use the second derivative test to recognize, whether a local extremum appears at the stationary points.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y}$, $z'_y = \ln(x^2+y) + \dfrac{y}{x^2+y}$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2+y) - 2xy2x}{(x^2+y)^2},$$

z''_{xy}

z''_{yy}

We differentiate z'_x with respect to x. This gives z''_{xx}.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$z'_x = \dfrac{2xy}{x^2+y}$, $z'_y = \ln(x^2+y) + \dfrac{y}{x^2+y}$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2+y) - 2xy2x}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2+y) - 2xy}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy}$$

We differentiate z'_x with respect to y. This gives z''_{xy}.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y}, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2+y) - 2xy2x}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2+y) - 2xy}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2+y-y}{(x^2+y)^2}.$$

We differentiate z''_{yy} with respect to y. This gives z''_{yy}.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y}, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y(x^2+y) - 2xy2x}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x(x^2+y) - 2xy}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2+y-y}{(x^2+y)^2}.$$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2}{(x^2+y)^2}.$$

We simplify.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2 + y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y}\quad , \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2}{(x^2+y)^2}.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} > 0,$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

We evaluate the hessian at each of the stationary points.

Najděte lokální extrémy funkce $z = y\ln(x^2+y)$.

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2+y}, \quad z'_y = \ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}$$

$S_1 = [0, e^{-1}]$, $S_2 = [1, 0]$, $S_3 = [-1, 0]$

$$z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{2x^3}{(x^2+y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{x^2+y} + \frac{x^2}{(x^2+y)^2}.$$

$$H(S_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} > 0,$$

$$H(S_2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

$$H(S_3) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Local minimum at $[0, e^{-1}]$. No other local extremum.

According to the second derivative test we obtain the following conclusion.

Konec