

XII. Binomické rozložení



Popis binomického rozložení
Testování hypotéz binomicky rozložených dat

Anotace



- Kromě spojitých dat se setkáváme také s daty **kategoriálními**, jejichž nejjednodušším případem jsou data **binární**. Binární data jsou popsána **binomickým rozložením**, od chování binomického rozložení je odvozena **popisná statistika binárních dat** (procento výskytu jevu), její **interval spolehlivosti** a **binomické testy** pro srovnání procentuálního výskytů jevů v různých skupinách.

Alternativní rozložení

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE DISKRÉTNÍHO ROZDĚLENÍ

$$P(x) = \pi \text{ pro } x = 1$$

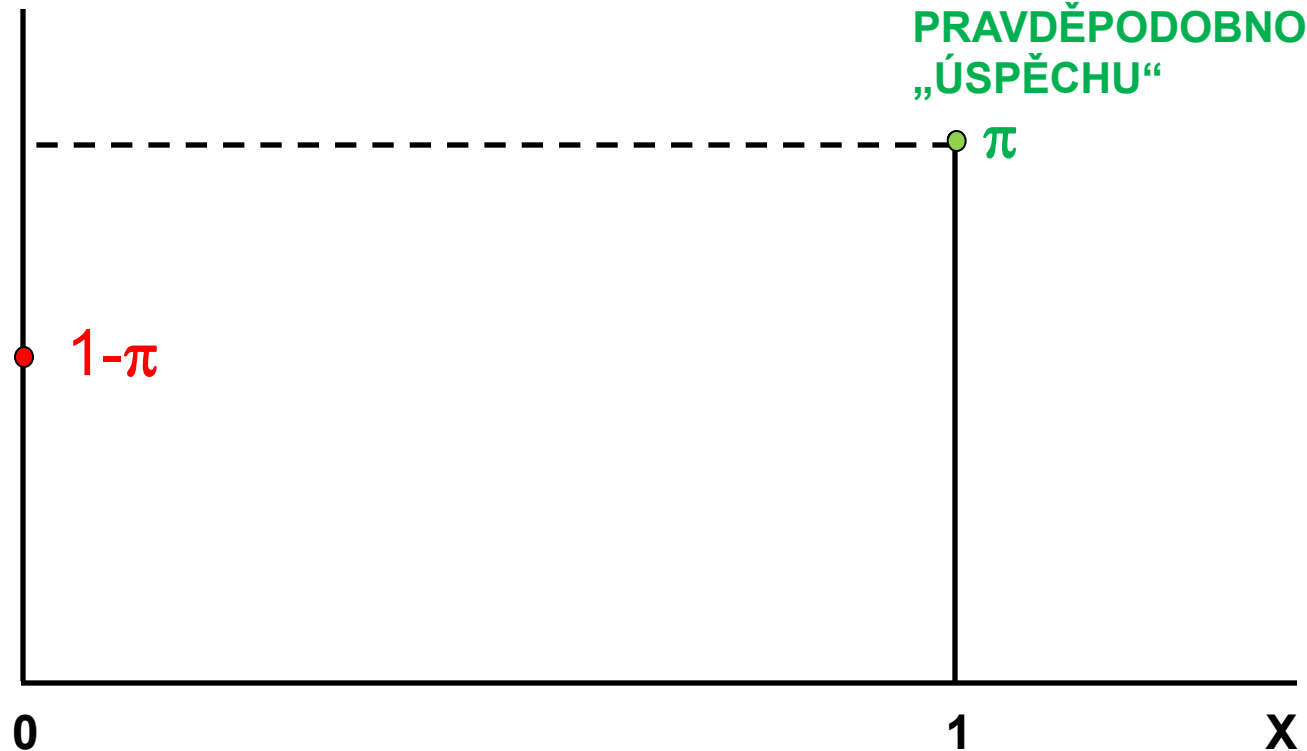
$$P(x) = 1 - \pi \text{ pro } x = 0$$

$$P(x) = 0 \text{ jinak}$$

PROVEDEME
JEDNODUCHÝ
„POKUS“

PRAVDĚPODOBNOST
„ÚSPĚCHU“

PRAVDĚPODOBNOST
„NEÚSPĚCHU“



Binomické rozložení

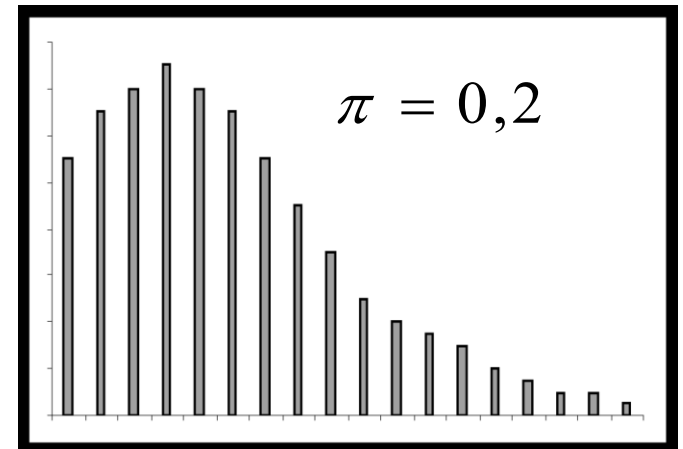
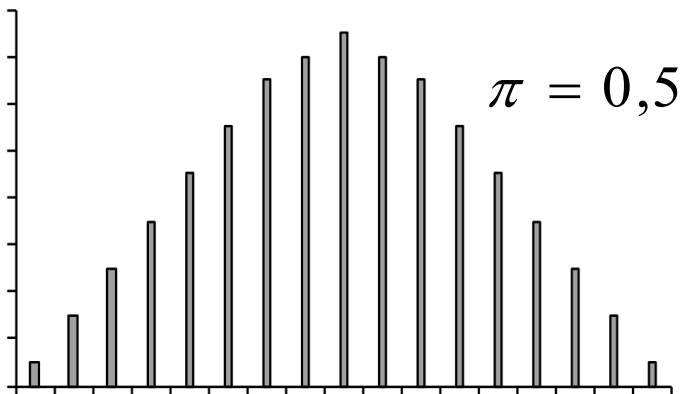


X celkový počet nastání jevu v n **nezávislých** pokusech
SOUČET ALTERNATIVNÍCH ROZDĚLENÍ

$$E(X) = n \cdot \pi$$

$$D(X) = n \cdot \pi (1 - \pi)$$

π  **jediný parametr distribuce
určuje tvar distribuce**



Binomické rozložení jako model pro zkoumání výskytu sledovaného jevu

n počet nezávislých opakování experimentu

r znamená celkový počet nastání jevu v **n** nezávislých experimentech

r : 0 n

p odhad parametru π

$$p = \frac{r}{n}$$

π .. jediný parametr binomického rozložení

X: Binomická proměnná

Střed rozložení:

Rozptyl: $E(x) = n \cdot \pi$

$$D(x) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$$

Binomické rozložení jako model

BINOMICKÁ VĚTA

Jev: narození chlapce $\pi = 0,5$
n : rodina s 5 dětmi
r: 0,1,2,3,4,5 chlapců

$$P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(n-r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot q^{(n-r)}$$

$$r = 0: \frac{5!}{(0! 5!)} (0,5)^0 \cdot (0,5)^5 = 0,031$$

$$r = 1: \frac{5!}{(1! 4!)} (0,5)^1 \cdot (0,5)^4 = 0,15625$$

$$r = 2: P(r) = 0,3125$$

$$r = 3: P(r) = 0,3125$$

$$r = 4: P(r) = 0,15625$$

$$r = 5: P(r) = 0,031$$

BINOMICKÝ KOEFICIENT

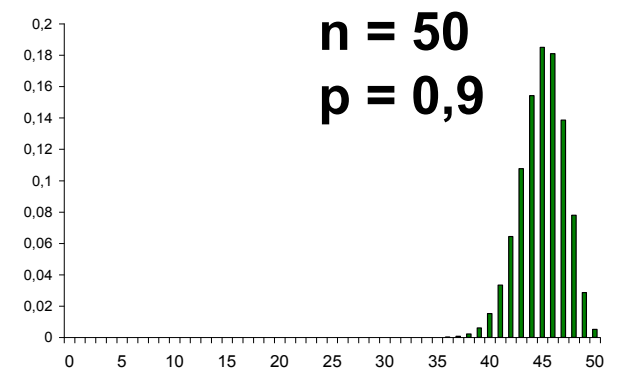
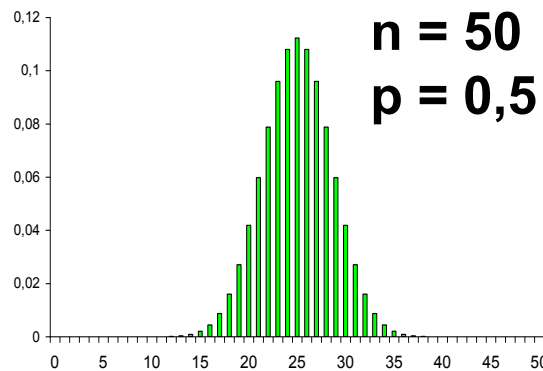
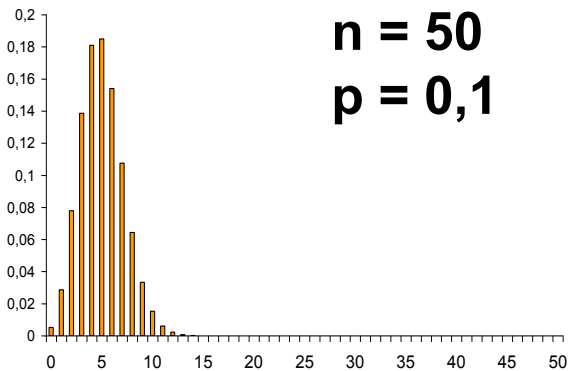
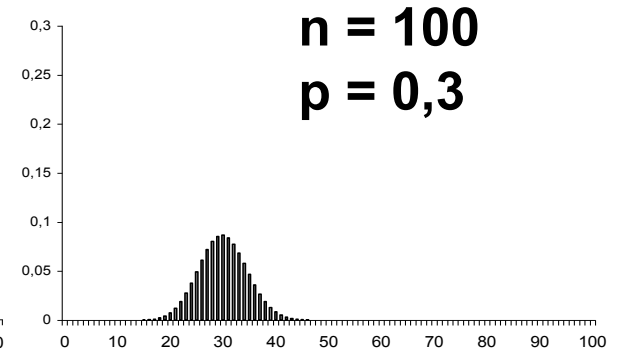
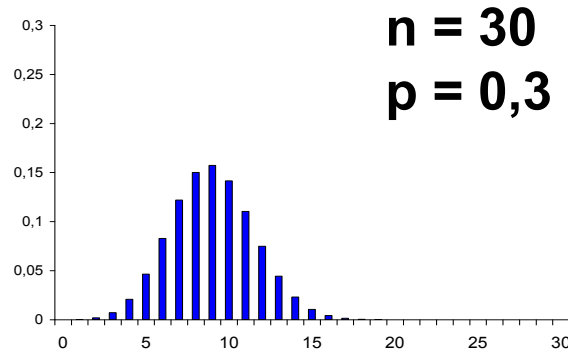
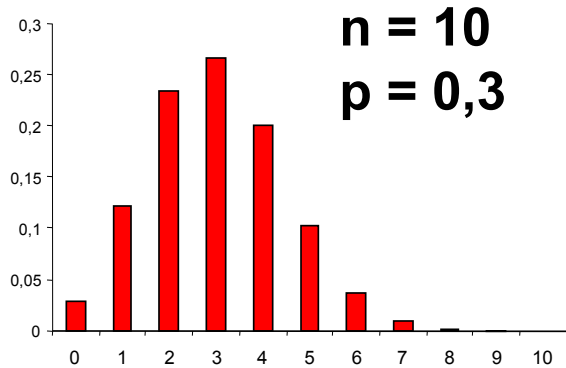
počet **r**-členných kombinací
z **n** objektů

Binomické rozložení jako model



$$P(x = r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot q^{(n-r)}$$

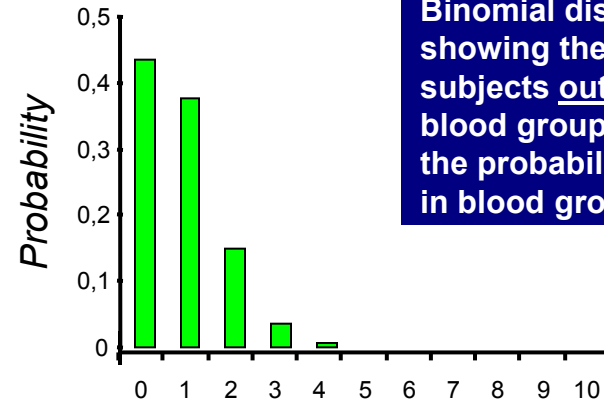
$$q = 1 - p$$



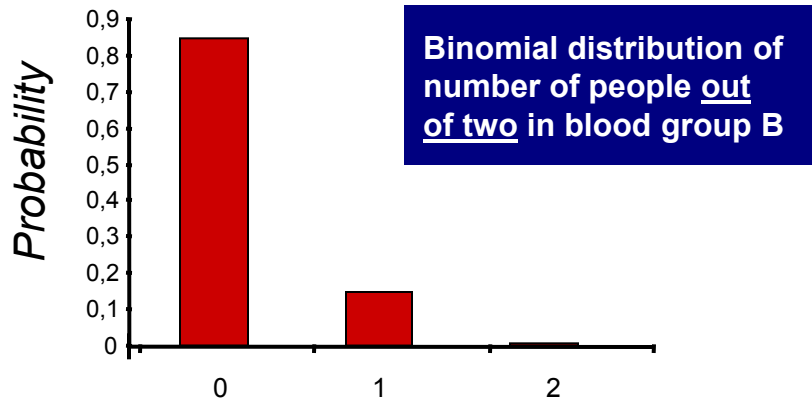
Aplikace binomického rozložení

Výskyt krevní skupiny B v určité populaci: $p = 0,08$

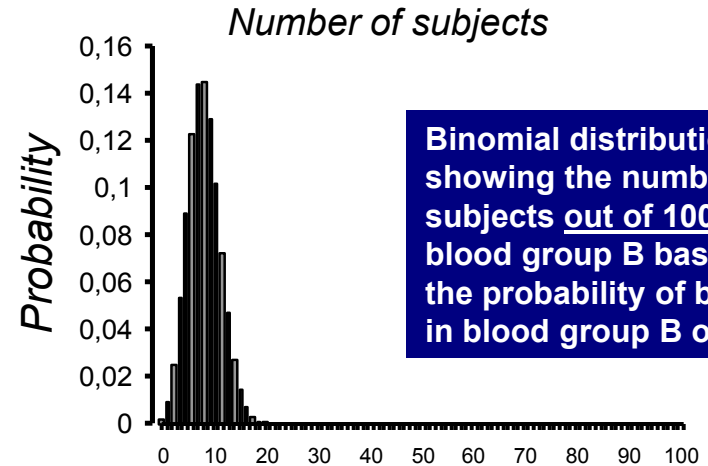
		<i>Number in blood group B</i>	<i>Probability</i>
B	B	2	0,0064
not B	B	1	0,0736
B	not B	1	0,0736
not B	not B	0	0,8464



Binomial distribution showing the number of subjects out of ten in blood group B based on the probability of being in blood group B of 0,08.



Binomial distribution of number of people out of two in blood group B



Binomial distribution showing the number of subjects out of 100 in blood group B based on the probability of being in blood group B of 0,08.

Number: blood group B in 2 cases

Number of subjects

Aplikace binomického rozložení

Populace: 60% jedinců má zvýšenou hladinu cholesterolu

Výběr: 5 lidí

I. Kolik lidí očekáváme ve výběru s vyšší hladinu cholesterolu ?

$$n \cdot p = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ lidé} \quad \sim E(x)$$

$$n \cdot p (1-p) = 1,2 \quad \sim D(x)$$

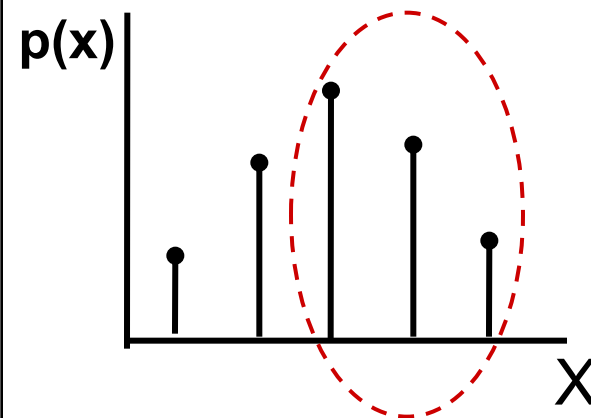
II. Jaká je P, že právě 3 lidé budou mít vyšší hladinu cholesterolu ? ~ Tzn. Výběr přesně odpovídá dané populaci ?

$$P(3) = ? \quad P_{(3)} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^2 = 0,346$$

$$P(3) = 35\%$$

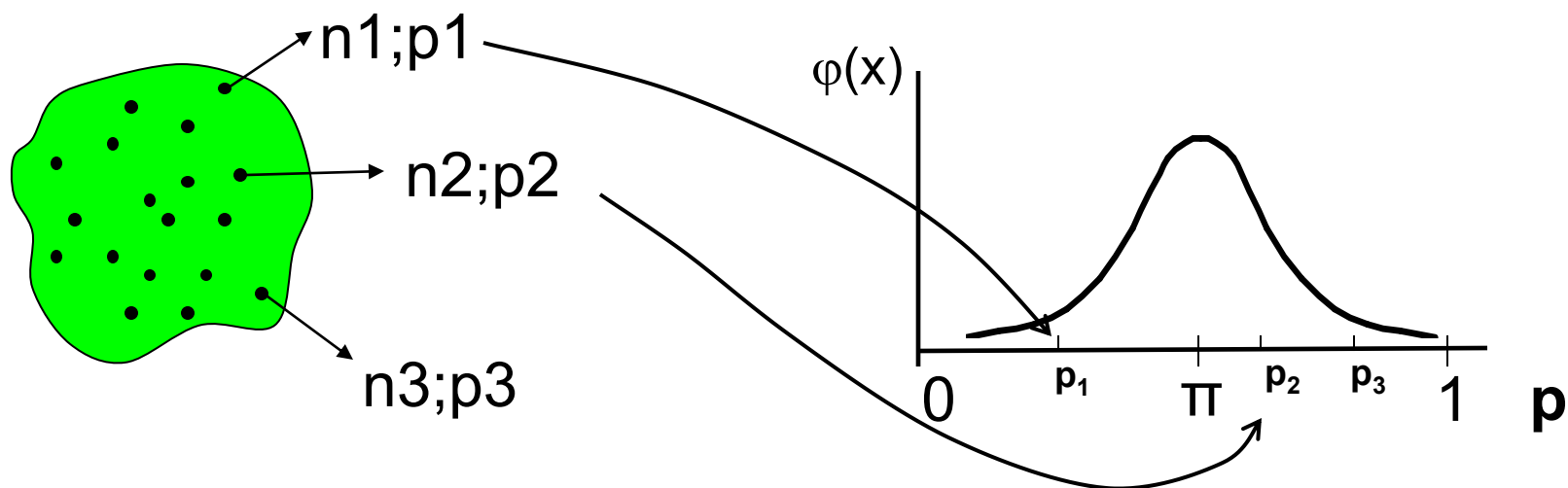
III. Jaká je P, že většina jedinců (tedy minimálně 3) má vyšší hladinu cholesterolu ? ~ Tzn. výběr alespoň obecně odpovídá zkoumané populaci ?

$$P(X > 3) = P(3) + P(4) + P(5) = 0,346 + 0,259 + 0,078 = 68 \%$$

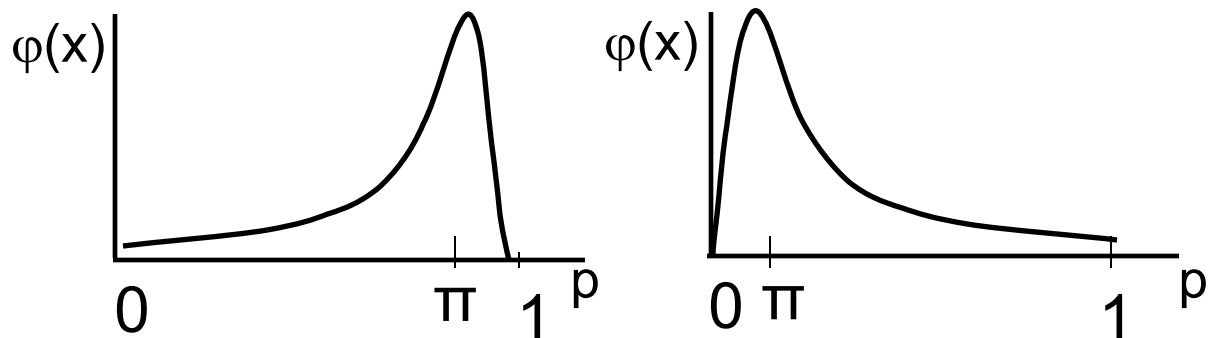


Odhad parametru π binomického rozložení

Při vícenásobném odhadu se odhad parametru π chová jako normálně rozložen



U malých nebo velkých hodnot p (π) je však předpoklad normality omezen



Odhad parametru π binomického rozložení

NORMÁLNÍ APROXIMACE



$$\hat{p} \rightarrow \pi ; \quad \hat{p} = \frac{r}{n}$$

1) Bodový

$$\hat{p}; \quad s_{\frac{2}{\hat{p}}}^2 = \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n - 1}$$

2) Intervalový – aproximace

$$\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n - 1}} \leq \pi \leq \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n - 1}}$$

$$\pi : \hat{p} \pm Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n - 1}}$$

Odhad parametru π binomického rozložení: příklad I



X: % jedinců s daným znakem

n = 100 jedinců

r = 60; $\hat{p} = 0,6$

$s_{\hat{p}} = 0,049$

Interval spolehlivosti : 95 %

$Z_{0,975} = 1,96$

$$0,6 - 1,96 \cdot 0,049 \leq \pi \leq 0,6 + 1,96 \cdot 0,049$$

$$0,504 \leq \pi \leq 0,697$$



$$P(0,504 \leq \pi \leq 0,697) \geq 0,95$$

Odhad parametru π binomického rozložení

Intervalový odhad bez aproximací na normální rozložení

$$L_1 = \frac{r}{r + (n - r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v_1; v_2)}}$$



spodní limit intervalu

$$v_1 = 2(n - r + 1); \quad v_2 = 2r$$

$$L_2 = \frac{(r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v'_1; v'_2)}}{n - r + (r + 1) \cdot F_{\alpha/2}^{(v'_1; v'_2)}}$$



horní limit intervalu

$$v'_1 = 2(r + 1) = v_2 + 2$$

$$v'_2 = 2(n - r) = v_1 - 2$$

$$P(L_1 \leq \pi \leq L_2) \geq 1 - \alpha$$

Odhad parametru π binomického rozložení: příklad II



Náhodný vzorek $n = 200$ jedinců.

Zjištěno pouze $r = 4$ jedinci bez určitého znaku.

$$\hat{p} = \frac{4}{200} = \underline{\underline{0,02}}$$

95% interval spolehlivosti = ?

Spodní hranice

$$v_1 = 2(n - r + 1) = 2(200 - 4 + 1) = 394$$

$$v_2 = 2r = 2 \cdot 4 = 8$$

$$F_{1-\alpha/2}^{(394;8)} = \underline{\underline{3,67}}$$

$$L_1 = \frac{4}{4 + (200 - 4 + 1) \cdot 3,67} = \underline{\underline{0,0055}}$$

Horní hranice

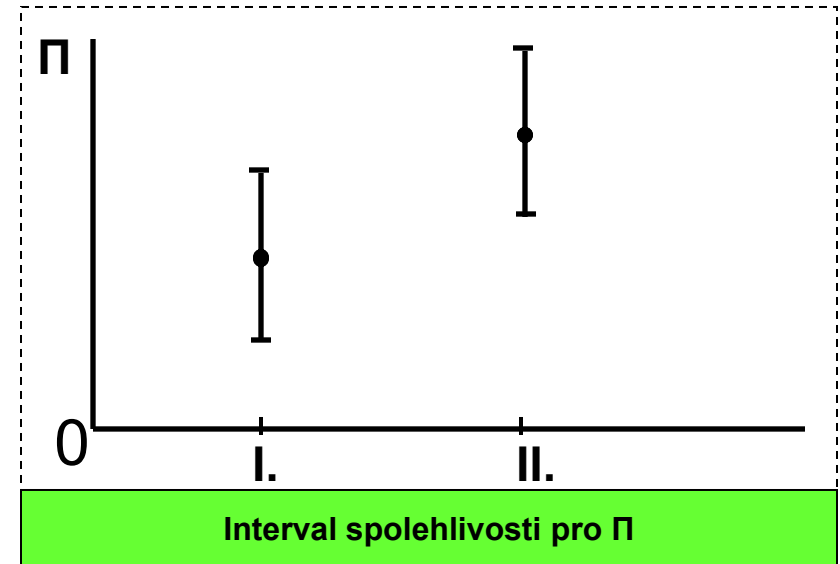
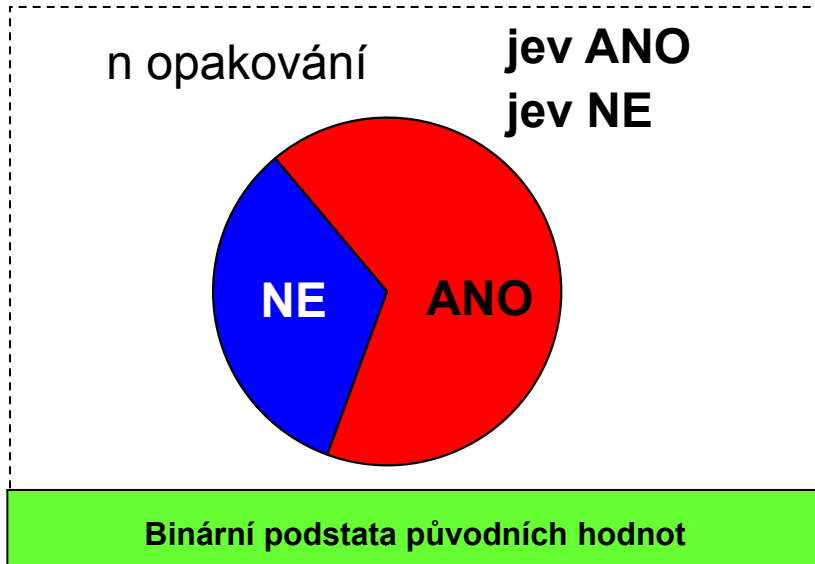
$$v'_1 = 2(r + 1) = 10$$

$$v'_2 = 2(n - r) = 2(200 - 4) = 392$$

$$F_{1-\alpha/2}^{(10;392)} = \underline{\underline{2,08}}$$

$$L_2 = \frac{(4 + 1) \cdot 2,08}{200 - 4 + (4 + 1) \cdot 2,08} = \underline{\underline{0,051}}$$

Binomické rozložení v datech: vizualizace



Statistické testování binomických dat

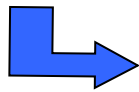


I.

Liší se odhad \underline{p} od předpokládané hodnoty P ?
jednovýběrový test

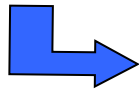
II.

Liší se dva nebo více odhadů \underline{p} ?



- závislé odhady -

dvouvýběrový
test



- nezávislé odhady -

III.

Je výskyt kategorií dvou jevů nezávislý ?

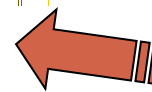
IV.

Hodnocení relativního rizika z výskytu určitého jevu v rámci skupiny lidí

Jednovýběrový binomický test

H_0	H_A	Testová statistika	Kritický obor
$p \leq \Pi$	$p > \Pi$	z	$z > z_{1-\alpha}$
$p \geq \Pi$	$p < \Pi$	z	$z < z_{\alpha}$
$p = \Pi$	$p \neq \Pi$	z	$ z > z_{1-\alpha/2}$

$$Z = \frac{n \cdot \hat{p} - n \cdot \pi}{\sqrt{n \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}} \cong \frac{|n \cdot \hat{p} - n \cdot \pi| - 0,5}{\sqrt{n \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}}$$



Korekce na kontinuitu

H_0	H_A	Testová statistika	Interval spolehlivosti
$p \leq \Pi$	$p > \Pi$	$L_1 = \frac{(r + 1)F_{\alpha, v_1', v_2'}}{n - r + (r + 1)F_{\alpha, v_1', v_2'}}$	$p = r / n > L_1$
$p \geq \Pi$	$p < \Pi$	$L_2 = \frac{r}{r + (n - r + 1)F_{\alpha, v_1', v_2'}}$	$p < L_2$
$p = \Pi$	$p \neq \Pi$	$L_1; L_2 (F_{\alpha/2}; F_{1-\alpha/2})$	$p < L_2 \vee p > L_1$

Test $\pi ? p$: PŘÍKLAD 1

Příklad testu s aproximací na normální rozložení

✓ Stromy s pozmeněným tvarem koruny

$n = 9\,000$ jedinců

$r = 2\,250$ změněných jedinců

?

Jak je pravděpodobná změna u až 1/3 jedinců?

?

$$Z = \frac{n \cdot p - n \cdot \pi}{\sqrt{p(1-p) \cdot n}} = \frac{2250 - 3000}{\sqrt{0,25 \cdot 0,75 \cdot 9000}} = \underline{\underline{-18,26}}$$

$$\alpha = 5\%; \quad Z_{1-\alpha/2} = 1,96; \quad Z_{1-\alpha} = 1,645$$

$Z < -Z_{1-\alpha/2}$ zamítáme $H_0: p < 0,01$

95 % Interval spolehlivosti ... p : (0,241; 0,258)

Test $\pi ? p$: PŘÍKLAD 2

Příklad testu bez aproximace na normální rozložení

✓ 12 jedinců bylo zkoumáno pro výskyt určitého znaku,
10 jedinců znak nemělo

? Jak hodně se tento výsledek liší od výsledku 6 - 6:
tedy od situace, kdy polovina jedinců znak má?

H_0	H_A
$p = 0,5$	$p > 0,5$

a) Využití distribuční funkce

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(r)	0,00024	0,00293	0,01611	0,05371	0,12085	0,19335	0,22559	0,19336	0,12085	0,05371	0,01611	0,00293	0,00024

$$P(r \geq 10) = 0,01611 + 0,00293 + 0,00024 = 0,01928$$

$H_0: p = 0,5$ je tedy značně nepravděpodobná

b) Pozorované $\hat{p} = \frac{10}{12} = 0,833$ překročilo horní limit 95 % intervalu
spolehlivosti pro p:

$$p = 0,5 : L_2 = \frac{(6 + 1) \cdot 2,64}{12 - 6 + (6 + 1) \cdot 2,64} = \underline{\underline{0,755}}$$

Kvantil Fischerova rozdělení
 $F_{1-\alpha, 14, 12} = 2,64$

Test $\pi ? p$: PŘÍKLAD 3



Pravděpodobnost narození chlapce je asi 1/2. Máte zhodnotit výsledky průzkumu populace, která žije v silně poškozeném životním prostředí. Průzkum se týká 1000 náhodně vybraných rodin a zjištěný podíl narozených chlapců je 0.41.

Jaké jsou vaše závěry o této populaci?

Jak se váš odhad zpřesní, když použijete vzorek $n = 10\ 000$ rodin při zachování odhadu $p = 0.41$?

Použijeme **jednovýběrový binomický test s nulovou hypotézou $H_0: p = \pi$** , hladina významnosti $\alpha = 0,05$

testová statistika $Z = \frac{n \cdot \hat{p} - n \cdot \pi}{\sqrt{n \cdot \hat{p}(1 - \hat{p})}} = \frac{1000 \cdot 0,41 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,41 \cdot 0,59}} = -5,79$ a příslušný kvantil $Z_{1 - \frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$

protože $|Z| > Z_{0,975}$ **NULOVOU HYPOTÉZU ZAMÍTÁME**. Chlapci se ve zkoumavé populaci nerodí s pravděpodobností 0,5.

interval spolehlivosti π : $\hat{p} \pm Z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n - 1}} = 0,4 \pm Z_{0,975} \cdot 0,046 = 0,41 \pm 1,96 \cdot 0,016 = 0,41 \pm 0,03$

pokud použijeme $n = 10\ 000$, bude int. spolehlivosti užší π : $\hat{p} \pm Z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n - 1}} = 0,41 \pm 1,96 \cdot 0,005 = 0,41 \pm 0,01$

Dvouvýběrový binomický test ($p_1 \neq p_2$)



$$Z = \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2}}}$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 \cdot \bar{p}_1 + n_2 \cdot \bar{p}_2}{n_1 + n_2}$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{(1-\alpha/2)} \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_1} + \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_2}}$$

Dvouvýběrový binomický test ($p_1 ? p_2$)

Tento příklad je ukázkou testování rozdílů mezi dvěma binomickými populacemi (tedy srovnání dvou odhadů parametru p).

✓ Celkem 49 pokusných myší bylo použito k testování léčivého preparátu během dvouměsíční terapie. Následující tabulka obsahuje původní data zároveň s testem nulové hypotézy: **Podíl přežívajících jedinců je u léčené populace stejný.**

	Alive	Dead	Total	Proportion alive	Proportion dead
Treated	15	9	24	$\hat{p}_1 = 0,625$	$\hat{q}_1 = 0,375$
Not Treated	10	15	25	$\hat{p}_2 = 0,400$	$\hat{q}_2 = 0,600$
Total	25	24	49	$\hat{p} = 0,510$	$\hat{q} = 0,490$

$$Z = \frac{0,625 - 0,400}{\sqrt{\frac{(0,510)(0,490)}{24} + \frac{(0,510)(0,490)}{25}}} = \frac{0,225}{\sqrt{0,010413 + 0,009996}} = 1,573$$

➡ **Nezamítáme H_0 : $p = 0,116$**

Kvantil standardizovaného normálního rozdělení
= **KRITICKÁ HODNOTA TESTU**
 $Z_{0,05}(2) = 1,96$

**S korekcí
na spojitost:**

$$Z = \frac{\frac{15 - 0,5}{24} - \frac{10 + 0,5}{25}}{\sqrt{\frac{0,604 - 0,420}{0,143}}} = 1,287$$

➡ **Nezamítáme H_0 : $p = 0,198$**

Korekce na spojitost, vhodná u malých vzorků