Integrace iracionálních funkcí

Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Funkce obsahuje odmocninu z lineárního členu,

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\sqrt{2x+1} = t}$$

proto zavedeme substituci $t = \sqrt{2x+1}$.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{2x+1} = t$$
$$2x+1 = t^2$$

Umocníme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \end{array}\right|$$

Vyjádříme inverzní substituci.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{t}{}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= t \\ 2x+1 &= t^2 \\ x &= \frac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x &= t\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}\,t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Upravíme složený zlomek na jednoduchý.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}\,t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t =$$

Jde o neryze lomenou racionální funkci, proto buď podělíme, nebo upravíme na polynom + ryze lomená funkce. V tomto případě je jednodušší doplnit v čitateli jmenovatel, tj. $-1+1$,

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

a rozdělit na 2 zlomky.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}\,t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

a rozdělit na 2 zlomky.

Najděte $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt{2x+1} = t \\ 2x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}} t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t - \frac{2}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

Integrujeme.

Najděte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\sqrt{2x+1} &= t\\ 2x+1 &= t^2\\ x &= \frac{t^2-1}{2}\\ \mathrm{d}x &= t\,\mathrm{d}t\end{aligned}} = \int \frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}\,t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t - \frac{2}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{2x+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}}\right| + c$$

Upravíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Funkce obsahuje druhou a čtvrtou odmocninu z x, proto hledáme jejich nejmenší společný násobek, číslo 4.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$

Zavedeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt[4]{x} = t$$
$$x = t^4$$

Umocníme, čímž vyjádříme inverzní substituci.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}} \, \mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3 \, \mathrm{d}t \end{vmatrix}$$

Diferencujeme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}}$$

Dosadíme.

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} 4t^3\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$$

Upravíme.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Dostáváme neryze lomenou racionální funkci. Před podělením si můžeme všimnout, že lze krátit t (ve jmenovateli t můžeme vytknout).

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c}\sqrt[4]{x}=t\\ x=t^4\\ \mathrm{d}x=4t^3\,\mathrm{d}t\end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

Dělíme:

$$t^2 : (t+1) = t-1+\frac{1}{t+1}$$

$$\begin{array}{l}\underline{-(t^2+t)}\\ \quad -t\\ \quad \underline{-(-t-1)}\\ \qquad 1\end{array}$$

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sqrt[4]{x} = t \\ x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4} + \sqrt[4]{t^4}} 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2 + t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 4\int t\,\mathrm{d}t - 4\int \mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Sčítance integrujeme každý zvlášť.

Najděte $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c}\sqrt[4]{x}=t\\ x=t^4\\ \mathrm{d}x=4t^3\,\mathrm{d}t\end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 4\int t\,\mathrm{d}t - 4\int \mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\frac{t^2}{2} - 4t + 4\ln|t+1| + c$$

Integrujeme podle vzorců.

Najděte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^{1/4}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^3}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 4\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 4\int t\,\mathrm{d}t - 4\int \mathrm{d}t + 4\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\frac{t^2}{2} - 4t + 4\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x}+1)^4 + c$$

Dosadíme původní proměnnou.

KONEC