Určitý integrál

Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

$\int_{-2}^{1}(3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x$ 3

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 14

$\int_{3}^{7}\frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ 16

$\int_{1}^{2}x\ln x\,\mathrm{d}x$ 24

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$ 32

Najděte $\displaystyle\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x$$

Počítáme určitý integrál z polynomu na intervalu $\langle -2, 1\rangle$. Polynom je spojitá funkce na celém $\mathbb{R}$, proto můžeme k výpočtu použít Newton-Leibnitzovu větu.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x = \Big[3\frac{x^3}{3}$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x = \Big[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}$$

Najdeme primitivní funkci k danému polynomu

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1}$$

a zapíšeme ji do hranatých závorek s dolní a horní mezí intervalu. Tento zápis značí odčítání $F(1) - F(-2)$. Integrační konstantu nemusíme psát, protože by se v rozdílu stejně odečetla.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1} = \left[x^3 + x^2 - 9x\right]_{-2}^{1}$$

Před dosazováním upravíme.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1} = \left[x^3 + x^2 - 9x\right]_{-2}^{1}$$

$$= 1 + 1 - 9$$

Dosadíme do primitivní funkce horní mez

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1} = \left[x^3 + x^2 - 9x\right]_{-2}^{1}$$
$$= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18)$$

a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1} = \left[x^3 + x^2 - 9x\right]_{-2}^{1}$$

$$= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21$$

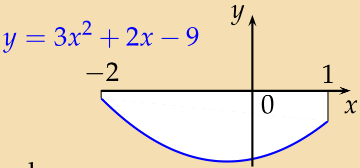
Dostali jsme výsledek, kterým je vždy číslo, protože představuje obsah plochy pod křivkou $y = 3x^2 + 2x - 9$.

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{1} (3x^2+2x-9)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 9x\right]_{-2}^{1} = \left[x^3 + x^2 - 9x\right]_{-2}^{1}$$
$$= 1 + 1 - 9 - (-8 + 4 + 18) = -7 - 14 = -21$$

Proč je určitý integrál záporný?

Najděte $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x - 9)\,\mathrm{d}x.$



Graf funkce je pod osou x,

proto v integrálním součtu $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ je $f(\xi_i)$ záporné číslo. Integrální součet je tedy záporný a také jeho limita – určitý integrál – je záporné číslo. Obsah útvaru omezeného osou x a křivkou na daném intervalu je tedy absolutní hodnota určitého integrálu: $S = 21$.

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Funkce není na intervalu spojitá, jelikož v bodě 0 není definovaná.
Určitý integrál neexistuje.

Najděte $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

Funkce není definovaná a spojitá v bodech, kde je jmenovatel nulový: $x^2 - 4 = 0$. Není tedy definovaná v bodech 2 a -2. Na celém intervalu $\langle 3, 7\rangle$ je tedy funkce definovaná a spojitá, můžeme proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x =$$

Jde o ryze lomenou funkci. V čitateli vytvoříme derivaci jmenovatele $(x^2-4)' = 2x$.

Najděte $\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7$$

Použijeme vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$$

Najděte $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7$$

$$= \frac{1}{2}\ln 45$$

Dosadíme horní mez: $7^2-4=45$

Najděte $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7$$

$$= \frac{1}{2}\ln 45 - \frac{1}{2}\ln 5$$

a dolní mez: $3^2 - 4 = 5$

Najděte $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7$$
$$= \frac{1}{2}\ln 45 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln 9$$

Při úpravě použijeme vzorec pro práci s logaritmy:

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

Najděte $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7$$
$$= \frac{1}{2}\ln 45 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 3$$

a další vzorec $a\ln b = \ln b^a$.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$.

$$\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce. Tyto funkce jsou na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ spojité. Použijeme Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}} =$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x$.

$$\boxed{\text{Najděte } \int_1^2 x \ln x \, dx.}$$

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \begin{array}{|ll|} \hline u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \\ \hline \end{array} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

Primitivní funkci hledáme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x$. První část vzorce $u \cdot v$ už je součástí primitivní funkce, proto ji musíme zapsat do hranatých závorek. Druhá část je určitý integrál, musíme tedy psát meze.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$.

$$\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, \mathrm{d}x$$

Dosadíme horní mez a odečteme hodnotu v dolní mezi.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \,\mathrm{d}x = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

Najdeme primitivní funkci.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

Dosadíme.

Najděte $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

Upravíme.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, tedy i na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Můžeme použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$.

$\sin x = t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

Primitivní funkci nalezneme pomocí substituce $t = \sin x$, protože jde o funkci goniometrickou typu $R(\sin x)\cos x$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \boxed{\begin{aligned} \sin x &= t \\ \cos x \, dx &= dt \end{aligned}}$$

Diferencujeme.

$$\boxed{\text{Najděte } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \\ \\ \end{array}} = \int t^2 \, \mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \boxed{\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array}} = \int_0^1 t^2 \, dt$$

Pro původní proměnnou x integrujeme na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Při přechodu k proměnné t musíme spolu s proměnnou x změnit i její interval integrace, protože $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \boxed{\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array}} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

Integrujeme v proměnné t.

Najděte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \boxed{\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array}} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Dosadíme meze proměnné t. Získáváme tedy výsledek aniž bychom se vraceli k původní proměnné.

KONEC