Kontingenční tabulky

Test dobré shody
Fisherův přesný test
McNemar test

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Anotace

- Analýza kontingenčních tabulek umožňuje analyzovat vazbu mezi dvěma kategoriálními proměnnými. Základním způsobem testování je tzv. chi-square test, který srovnává pozorované četnosti kombinací kategorií oproti očekávaným četnostem, které vychází z teoretické situace, kdy je vztah mezi proměnnými náhodný.
- Test dobré shody je využíván také pro srovnání pozorovaných četností proti očekávaným četnostem daným určitým pravidlem (typickým příkladem je Hardy-Weinbergova rovnováha v genetice)
- Specifickým typem výstupů odvozených z kontingenčních tabulek jsou tzv. odds ratia a relativní rizika, využívaná často v medicíně pro identifikaci a popis rizikových skupin pacientů.

Test dobré shody - základní teorie

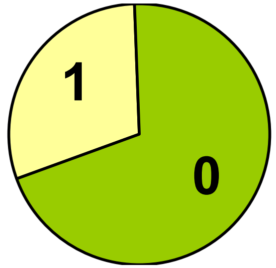
$$\chi^2_{(s.v.)} = \sum \frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$

$$\chi^2_{(s.v.)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{1. jev}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{2. jev}} + \ldots$$

Test dobré shody - základní teorie

Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{I. jev 1}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{II. jev 2}}$$



Příklad

✓ **10 000 lidí hází mincí** → **rub: 4 000 případů (R)**, **líc: 6 000 případů (L)**

? **Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru R : L = 1 : 1 ?**

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota: $\chi^2_{(0,95)}(\nu = 1) = \underline{\underline{3,84}}$ $\qquad (0,95 = 1 - \alpha)$

Rozdíl je vysoce statisticky významný (p << 0,001]

Test dobré shody: příklad I

? **Ověřte na datech z pokusu se 100 květinkami určitého druhu, že barva květů se geneticky štěpí v poměru žlutá : červená = 3 : 1.**

✓ **H_0: Pozorovaná frekvence pro jednotlivé barvy květů jsou vzorkem populace mající poměr mezi žlutými a červenými květy 3 :1.**
Součet frekvencí u obou barev květů (f_i) se rovná 100 a pozorované frekvence u kategorií barvy budou srovnány s očekávanými frekvencemi (uvedeny v závorkách):

	Kategorie barvy		
	Žlutá	Červená	n
$f_{poz.}$	84	16	100
$f_{oček.}$	75	25	

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_{poz.} - f_{oč.})^2}{f_{oč.}} = \frac{(84-75)^2}{75} + \frac{(16-25)^2}{25} = 4{,}320$$

St. volnosti = n = k - 1 = 1 → **Zamítáme hypotézu shody srovnávaných četností**

Při testování H_0 jsme použili matematický zápis (0,025 < P < 0,05). Z tabulek $\chi 2$ rozložení vidíme, že pravděpodobnost překročení hranice 2,706 je 0,1 (10 %), což může být stručně zapsáno jako
P ($\chi 2 \geq 2{,}706$) = 0,10.
Dále lze zjistit pro P ($\chi 2 \geq 3{,}841$) = 0,05. V řešené úloze jsme dospěli k hodnotě testové statistiky $\chi 2$ = 4,320.
Pro tento případ lze tedy psát 0,025 < P ($\chi 2 \geq 4{,}320$) < 0,05; a jednodušeji 0,025 < P < 0,05. Jde v podstatě o přibližné určení hranic chyby 1. druhu.

Test dobré shody: příklad II

Tento příklad je rozšířením problému z příkladu 1 na srovnání pozorovaných a očekávaných frekvencí pro více kategorií sledovaného znaku:

- Celkem bylo zkoumáno 250 semen určitého druhu rostliny a roztříděno do následujících kategorií: žluté/hladké; žluté/vrásčité; zelené/hladké; zelené/vrásčité. Předpokládaný poměr výskytu těchto kategorií v populaci je 9 : 3 : 3 : 1. Následující tabulka obsahuje původní data z pozorování a dále postup při testování H_0.

	žluté/hladké	žluté/vrásčité	zelené/hladké	zelené/vrásčité	n
$f_{poz.}$	152	39	53	6	250
$f_{oček.}$	140,6250	46,8750	46,8750	15,6250	

$\nu = k - 1 = 3$

$$\chi^2 = \frac{11{,}3750^2}{140{,}6250} + \frac{7{,}8750^2}{46{,}8750} + \frac{6{,}1250^2}{46{,}8750} + \frac{9{,}6250^2}{15{,}6250} = 8{,}972$$

Zamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými

Test dobré shody: příklad III

Složitější příklady řešené srovnáváním frekvencí je možné rozdělit na testování dílčích hypotéz:

- Předpokládejme, že chceme pro data z předchozí úlohy testovat hypotézu existence štěpného poměru 9 : 3 : 3 pro první tři kategorie semen:

	žluté/hladké	žluté/vrásčité	zelené/hladké	n
$f_{poz.}$	152	39	53	244
$f_{oček.}$	146,400	48,800	48,800	

n = k - 1 = 2

$$\chi^2 = \frac{5{,}600^2}{146{,}40} + \frac{9{,}800^2}{48{,}80} + \frac{4{,}200^2}{48{,}80} = 2{,}544$$

Nezamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými.

- Nyní otestujeme hypotézu štěpného poměru kategorií zelené/vrásčité:ostatní typy = 1:15

	zelené/vrásčité	ostatní	n
$f_{poz.}$	6	244	25
$f_{oček}$	15,625	234,375	

n = k - 1 = 1

$$\chi^2 = \frac{9{,}625^2}{15{,}625} + \frac{9{,}625^2}{234{,}375} = 6{,}324$$

Zamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými.

Kontingenční tabulka I

- Máme dvě nominální veličiny, X (má r variant) a Y (má s variant)
- Kontingenční tabulka typu **r** x **s**

$x_{[j]}$ \ $y_{[k]}$	$y_{[1]}$	.....	.....	$y_{[s]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	n_{11}	.....	.....	n_{1s}	$n_{1.}$
.	.	.....	.....	.	.
.	.	.....	.....	.	.
$x_{[r]}$	n_{r1}	.....	.....	n_{rs}	$n_{r.}$
$n_{.k}$	$n_{.1}$	.	.	$n_{.s}$	n

- Označení:

n_{jk}- simultánní absolutní četnost,

$n_{j.}$- marginální absolutní četnost

Kontingenční tabulka II

- Kontingenční tabulka umožňuje testování následujících hypotéz:

1. **Hypotézu o nezávislosti,**
2. **Hypotézu o shodnosti struktury (test homogenity)**
3. **Hypotézu o symetrii**

Testování nezávislosti I

- Motivace: Souvisí spolu výskyt dvou nominálních znaků měřených na jediném výběru?
- Příklad: Barva očí (modrá, zelená, hnědá) a barva vlasů (hnědá, černá, blond) u vybraných 30 studentů jsou nezávislé.
- Nulová hypotéza: Znaky X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
- Alternativní hypotéza: Znaky X a Y jsou závislé náhodné veličiny.
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

$$K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{(n_{jk} - e_{jk})^2}{e_{jk}} \overset{H_0 \text{ platí}}{\approx} \chi^2\big((r-1)(s-1)\big)$$

Očekávané (teoretické) četnosti e_{jk}: $e_{jk} = \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$

- H_0 zamítáme na hladině významnosti α, pokud $K \geq \chi^2_{1-\alpha}\big((r-1)(s-1)\big)$
- **Předpoklady testu ?**

Testování nezávislosti II

- **Předpoklady Pearsonova chí-kvadrát testu**:

1. Jednotlivá pozorování shrnutá v kontingenční tabulce jsou nezávislá, tj. každý prvek patří jen do jedné buňky kont. tabulky, nemůže zároveň patřit do dvou.
2. **Podmínky dobré aproximace**: Očekávané (teoretické) četnosti jsou aspoň v 80 % případů větší nebo rovné 5 a ve 100 % případů nesmí být pod 2. (Pokud není tento předpoklad splněn, je vhodné sloučit kategorie s nízkými četnostmi).

- **Měření síly závislosti:**

Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}, kde \quad m = \min\{r,s\}, V \ je\ z\ \mathrm{int}\,ervalu\ (0,1)$

Význam hodnot: 0-0,1….zanedbatelná závislost

0,1-0,3…slabá závislost

0,3-0,7…střední závislost

0,7-1 silná závislost

Kontingenční tabulky
H0 :Nezávislost dvou jevů A a B

B ↓ \ A →	+	-	Podíl (+)
+	a	b	$\frac{a}{(a+b)}$ p1
-	c	d	$\frac{c}{(c+d)}$ p2
Podíl (+)	$\frac{a}{(a+c)}$	$\frac{b}{(b+d)}$	

N = a + b + c + d

$$P(B^+) = \frac{(a+b)}{N}$$

$$P(B^-) = \frac{(c+d)}{N}$$

Kontingenční tabulka 2 x 2

Očekávané četnosti:

$$F_{(A)} = \frac{(a+b)(a+c)}{N} \qquad F_{(C)} = \frac{(a+c)(d+c)}{N}$$

$$F_{(B)} = \frac{(a+b)(b+d)}{N} \qquad F_{(D)} = \frac{(b+d)(c+d)}{N}$$

$$\chi^2_{\nu=1} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

$$\nu = 1 = (r-1)*(c-1)$$

$$P_{(A)};\ P_{(B)}$$

$$\chi^2_c = \sum \sum \frac{\left(\left|f_{ij} - F_{ij}\right| - 0{,}5\right)^2}{F_{ij}}$$

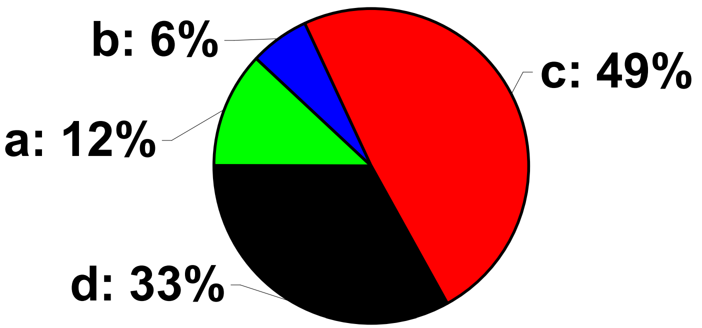
Kontingenční tabulky: příklad

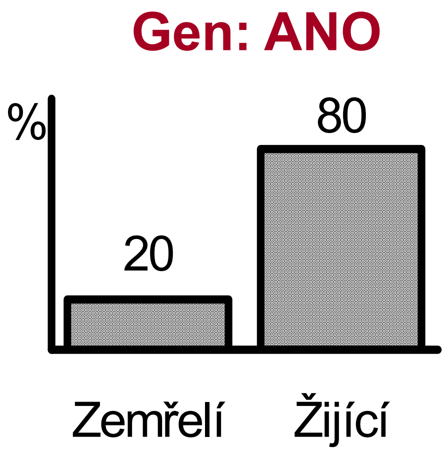
gen \ †	Ano	Ne	Σ
Ano	20	82	102
Ne	10	54	64
Σ	30	136	166

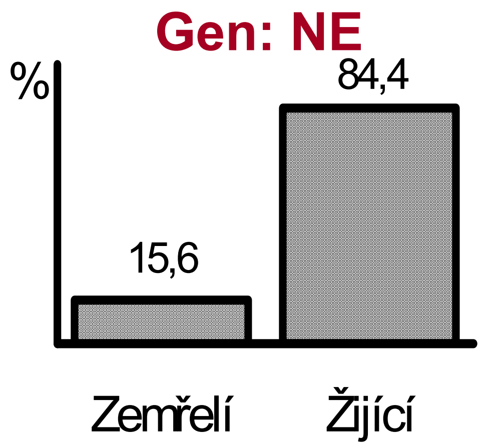
$F_A = 102 * 30 / 166 = 18{,}43$
$F_B = 102 * 136 / 166 = 83{,}57$
$F_C = 11{,}57$
$F_D = 52{,}43$

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(20-18{,}43)^2}{18{,}43} + \frac{(82-83{,}57)^2}{83{,}57} + \frac{(10-11{,}57)^2}{11{,}57} + \frac{(54-52{,}43)^2}{52{,}43} = 0{,}423 \qquad 0{,}423 < \chi^{2\ (1)}_{0,95} = 3{,}84$$

Kontingenční tabulka v obrázku



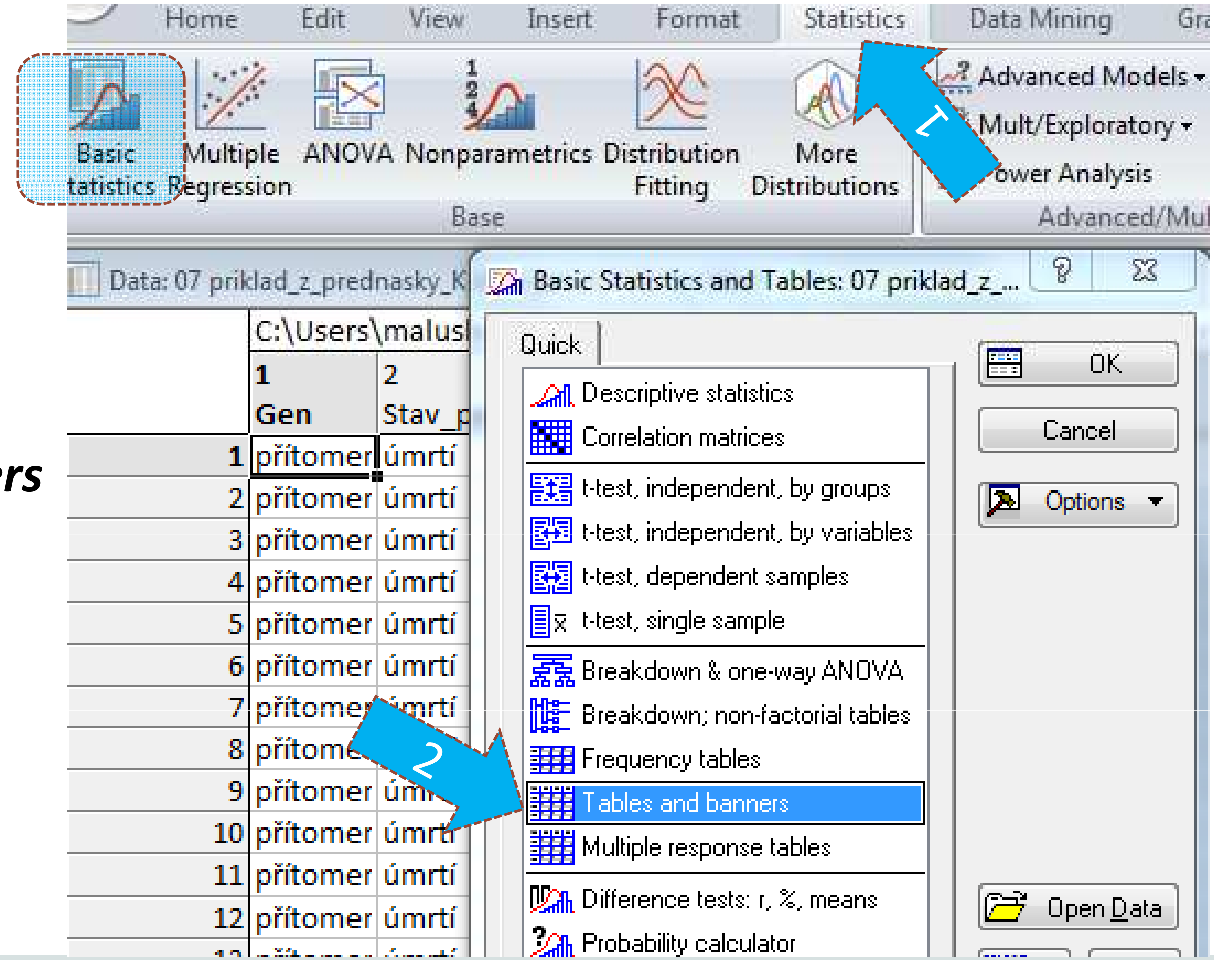




MU IBA
Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica I

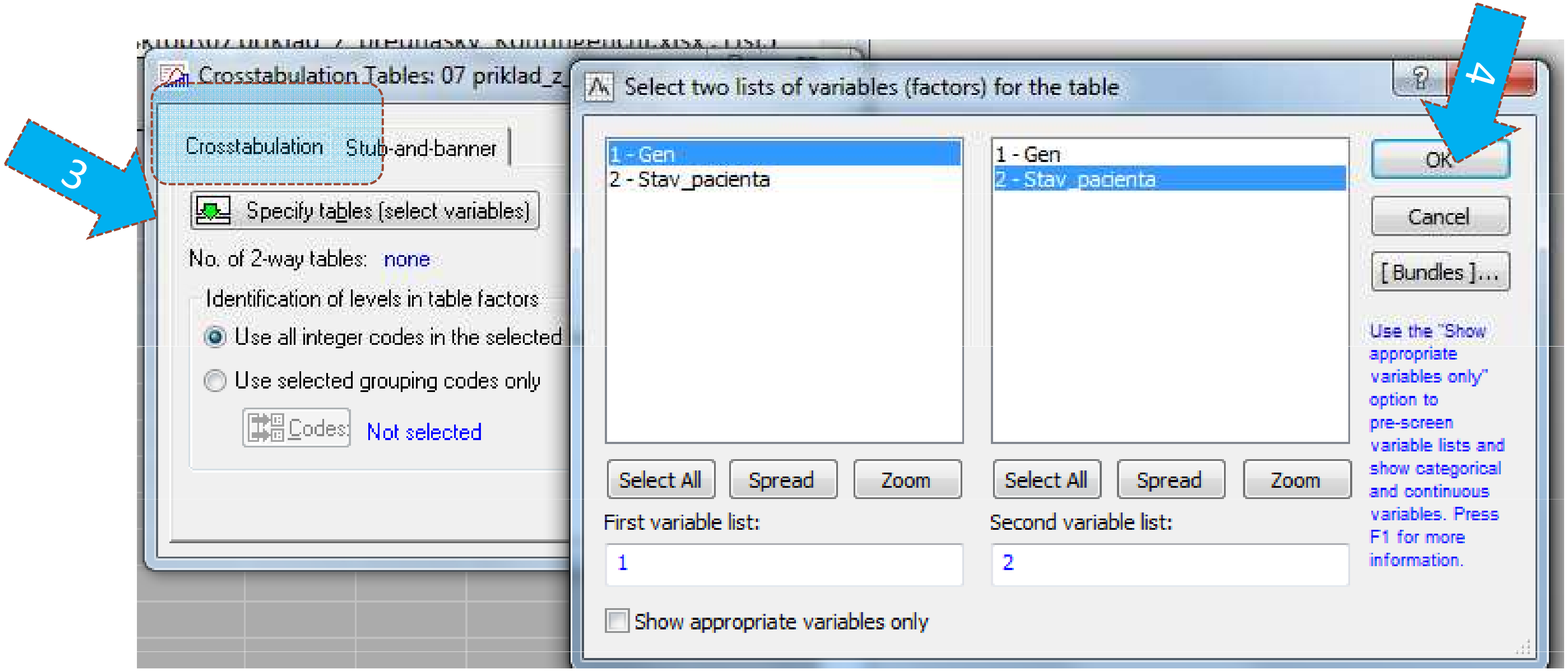
- Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti genu a stavu pacienta. Simultánní četnosti znázorněte graficky.



- V menu ***Statistics*** zvolíme ***Basic statistics,*** Vybereme ***Tables and banners***

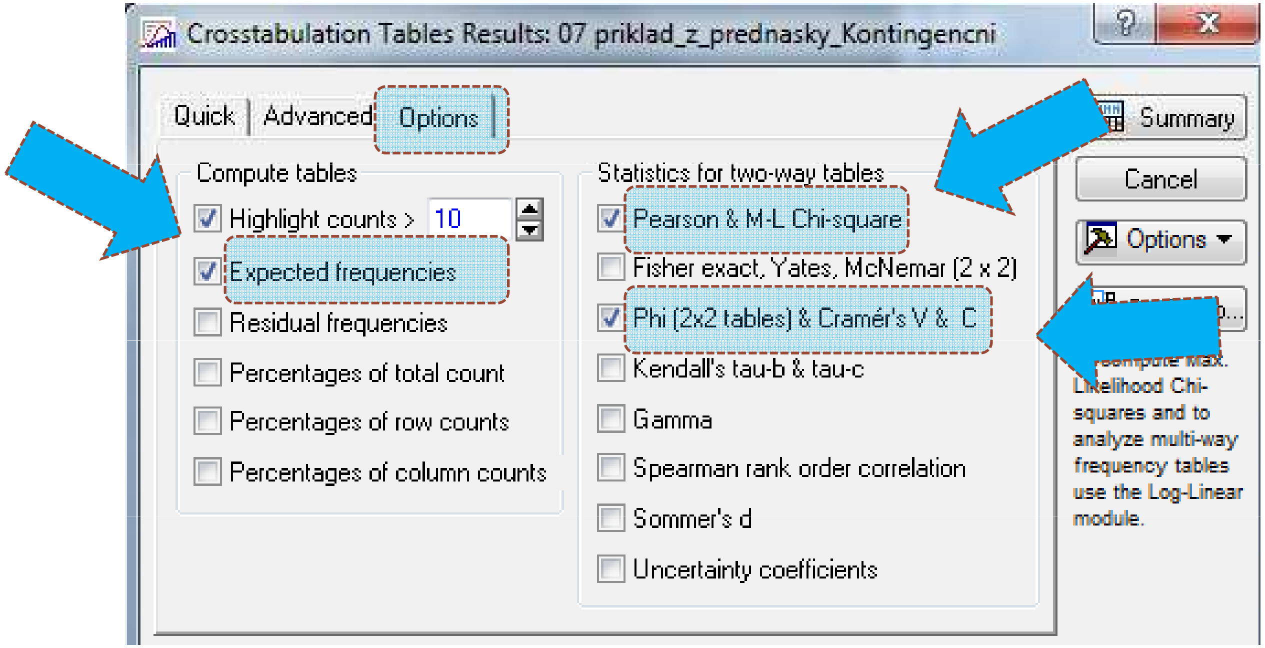
Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica II

- Vybereme proměnné, které chceme testovat



Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica III

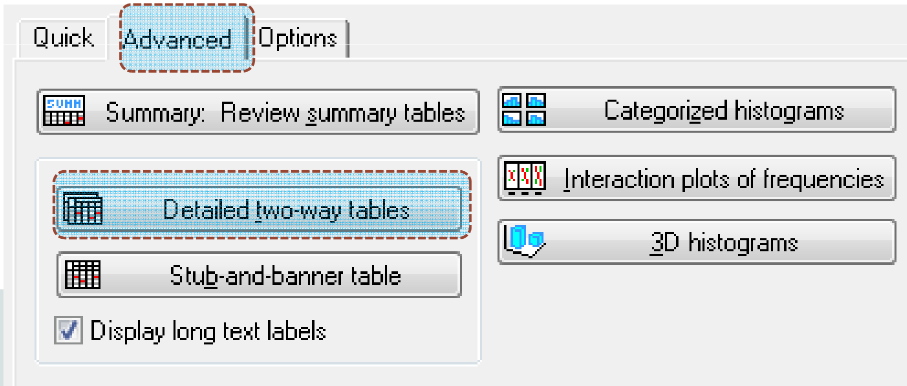
- Na záložce **Options** zaškrtneme ***Expected frequencies*** (***Očekávané četnosti***) (k ověření podmínek dobré aproximace)



- Zaškrtneme Pearsonův chí-kvadrát

- Pokud chceme vypočítat i Cramérův koeficient zaškrtneme Phi & Cramer's V

- Poté se vrátíme na záložku **Advanced,** kde a zvolíme ***Detailed two-way tables***



Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica IV

Tab.1: Pozorované četnosti

Summary Frequency Table (07 priklad_z_prednasky_K
Marked cells have counts > 10
(Marginal summaries are not marked)

Gen	Stav_pacienta úmrtí	Stav_pacienta žijící	Row Totals
přítomen	20	82	102
nepřítomen	10	54	64
All Grps	30	136	166

Tab. 2: Očekávané četnosti

Summary Table: Expected Frequencies (07 priklad_z_pre
Marked cells have counts > 10
Pearson Chi-square: ,421322, df=1, p=,516278

Gen	Stav_pacienta úmrtí	Stav_pacienta žijící	Row Totals
přítomen	18,43373	83,5663	102,0000
nepřítomen	11,56627	52,4337	64,0000
All Grps	30,00000	136,0000	166,0000

Jsou splněny podmínky dobré aproximace? **ANO**

Tab. 3: Paersonův chí-kvadrát

Hodnota testové statistiky

Počet stupňů volnosti

p- hodnota

Statistics: Gen(2) x Stav_pacienta(2)

Statistic	Chi-square	df	p
Pearson Chi-square	,4213223	df=1	p=,51628
M-L Chi-square	,4277117	df=1	p=,51311
Phi for 2 x 2 tables	,0503794		
Tetrachoric correlation	,0949754		
Contingency coefficient	,0503156		

R x C kontingenční tabulka

Výběr: N lidí ze sociologického průzkumu (delikventi)
Jev **A**: Původ z rozvrácených rodin
Jev **B**: Stupeň zločinnosti I < II < III < IV

A \ B	I.	II.	III.	IV.	Σ
ANO	a	b	c	d	číslo 1
NE	e	f	g	h	
Σ	číslo2				

Stupně volnosti:
(R-1) * (C-1) = 1 * 3 = 3

$$F_a = \frac{\check{c}\acute{\imath}slo\,1 \cdot \check{c}\acute{\imath}slo\,2}{N}$$

Tabulky: $\chi^2_{(1-\alpha)}(\nu)$

Očekávané četnosti:

$$p_a = \frac{a}{a+e} \qquad p_b = \frac{b}{b+f} \qquad p_c = \frac{c}{c+g} \qquad p_d = \frac{d}{d+h}$$

Čtyřpolní tabulky

- Máme dvě nominální veličiny, X (má dvě varianty) a Y (má dvě varianty)
- Kontingenční tabulka typu **2** x **2**

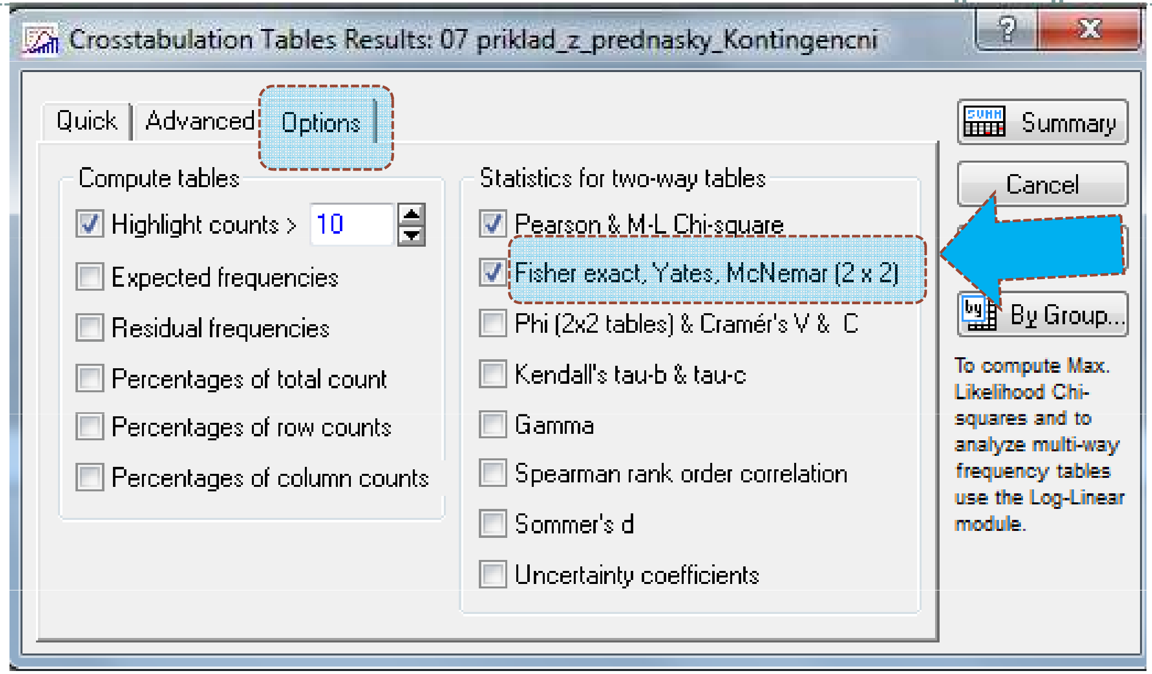
	$y_{[1]}$	$y_{[2]}$	$n_{j.}$
$x_{[1]}$	*a*	b	a+b
$x_{[2]}$	*c*	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

Výsledek pokusu	okolnosti		$n_{j.}$
	I	II	
úspěch	*a*	b	a+b
neúspěch	*c*	d	c+d
$n_{.k}$	a+c	b+d	n

- Definice: **podíl šancí (odds ratio)** $OR = \frac{ad}{bc}$

  Jestliže asymptotický 100(1-α)% interval spolehlivosti $\ln OR \pm \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}u_{1-\alpha/2}$ neobsahuje 1, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.
- Test: **Fisherův přesný (exaktní) test (<u>slouží též k testování v tabulce r x s, když nemáme splněny podmínky dobré aproximace</u>)**

Řešení v softwaru Statistica: Fisherův přesný test



- Na záložce **Options** zaškrtneme ***Fisher exact***

- Výstupní tabulka

Statistic	Statistics: Gen(2) x Stav_paci Chi-square	df	p
Pearson Chi-square	,4213223	df=1	p=,51628
M-L Chi-square	,4277117	df=1	p=,51311
Yates Chi-square	,1952605	df=1	p=,65857
Fisher exact, one-tailed			p=,33259
two-tailed			p=,54314
McNemar Chi-square (A/D)	14,71622	df=1	p=,00012
(B/C)	54,79348	df=1	p=,00000

Pro jednostranný test

Pro oboustranný test

Testování homogenity (testování shody struktury)

- Motivace: Zajímá nás výskyt nominálního znaku u *r* nezávislých výběrů z *r* různých populací.
- Příklad: Je zájem o sport stejný u děvčat jako u chlapců?
- Nulová hypotéza: pravděpodobnostní rozdělení kategoriální proměnné je stejné v různých populací
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

		Dívky	**Chlapci**	
Zájem o sport	**Ano**	*a*	b	a+b
	Ne	*c*	d	c+d
		a+c	b+d	n

Některé marginální četnosti (buď sloupcové nebo řádkové) jsou předem pevně stanoveny

Testování homogenity: příklad I

Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou, 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Je to dostatečný důkaz, že očkovací látka byla účinná?

Nulová hypotéza: Procento výskytu chřipky je v očkované a kontrolní skupině stejné.

Test hypotézy o symetrii (McNemarův test pro čtyřpolní tabulku)

- Motivace: Na osobách sledujeme binární proměnnou před pokusem a po něm, cílem je zjistit, zda došlo ke změně v rozdělení této proměnné.
- **Analýza párových dichotomických proměnných**

Četnostní tabulka

		po		
		+	**-**	$n_{j.}$
před	**+**	*a*	*b*	*a+b*
	-	*c*	*d*	*c+d*
	$n_{.k}$	*a+c*	*b+d*	*n*

Tabulka teoretických pravděpodobností

		po		
		+	**-**	
před	**+**	p_{11}	p_{12}	$p_{1.}$
	-	p_{21}	p_{22}	$p_{2.}$
		$p_{.1}$	$p_{.2}$	

- Nulová hypotéza: $p_{ij} = p_{ji}$, pokus nemá vliv na výskyt daného znaku
- Testová statistika: $\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$ pokud je větší než kritická hodnota χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti (vhodné pro počty údajů b+c > 8), pak nulovou hypotézu zamítáme

Mc Nemarrův test: příklad I

Zjistěte, zda výuka o pozitivním působení sportu na zdraví vede ke změně postojů žáků ke sportování.

Nulová hypotéza: Počet žáků, kteří změní svůj postoj pozitivním směrem, je pouze náhodně odlišný od počtu žáků, kteří změní svůj postoj negativním směrem.

		Postoj po výuce		
		+	-	
Postoj před výukou	+	*5*	3	8
	-	*16*	2	18
		21	5	26

$$\chi^2 = \frac{(3-16)^2}{3+16} = 8,89$$

Tabulky: $\chi^2_{1-\alpha}(\nu = 1) = 3,84$

→ **H_0 zamítnuta**

Závěr: Výuka má pozitivní vliv na postoj žáků vzhledem k provozování sportu.