# Kontingenční tabulky

## Test dobré shody
## Fisherův přesný test
## McNemar test

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
*J. Jarkovský, L. Dušek*

# Anotace

- Analýza kontingenčních tabulek umožňuje analyzovat vazbu mezi dvěma kategoriálními proměnnými. Základním způsobem testování je tzv. chi-square test, který srovnává pozorované četnosti kombinací kategorií oproti očekávaným četnostem, které vychází z teoretické situace, kdy je vztah mezi proměnnými náhodný.
- Test dobré shody je využíván také pro srovnání pozorovaných četností proti očekávaným četnostem daným určitým pravidlem (typickým příkladem je Hardy-Weinbergova rovnováha v genetice)
- Specifickým typem výstupů odvozených z kontingenčních tabulek jsou tzv. odds ratia a relativní rizika, využívaná často v medicíně pro identifikaci a popis rizikových skupin pacientů.

# Test dobré shody - základní teorie

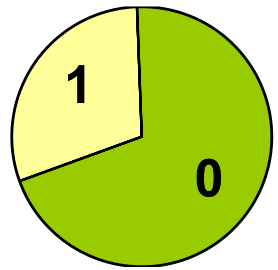
$$\chi^2_{(s.v.)} = \sum \frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}$$

$$\chi^2_{(s.v.)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{1. jev}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{2. jev}} + \ldots$$

# Test dobré shody - základní teorie

## Binomické jevy (1/0)

$$\chi^2_{(1)} = \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{I. jev 1}} + \underbrace{\frac{\left[\text{pozorovaná četnost} - \text{očekávaná četnost}\right]^2}{\text{očekávaná četnost}}}_{\text{II. jev 2}}$$




**Příklad**

✓ **10 000 lidí hází mincí** → **rub: 4 000 případů (R)**; **líc: 6 000 případů (L)**

**?** **Lze výsledek považovat za statisticky významně odlišný (nebo neodlišný) od očekávaného poměru R : L = 1 : 1 ?**

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(4000 - 5000)^2}{5000} + \frac{(6000 - 5000)^2}{5000} = 400$$

Tabulková hodnota: $\chi^2_{(0,95)}(\nu = 1) = \underline{\underline{3,84}}$ $\quad (0,95 = 1 - \alpha)$

⇒ **Rozdíl je vysoce statisticky významný (p << 0,001]**

# Test dobré shody: příklad I

**?** **Ověřte na datech z pokusu se 100 květinkami určitého druhu, že barva květů se geneticky štěpí v poměru žlutá : červená = 3 : 1.**

**✓** **$H_0$: Pozorovaná frekvence pro jednotlivé barvy květů jsou vzorkem populace mající poměr mezi žlutými a červenými květy 3 :1.**
**Součet frekvencí u obou barev květů ($f_i$) se rovná 100 a pozorované frekvence u kategorií barvy budou srovnány s očekávanými frekvencemi (uvedeny v závorkách):**

| | Kategorie barvy | | |
|---|---|---|---|
| | Žlutá | Červená | n |
| $f_{poz.}$ | 84 | 16 | 100 |
| $f_{oček.}$ | 75 | 25 | |

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_{poz.} - f_{oč.})^2}{f_{oč.}} = \frac{(84-75)^2}{75} + \frac{(16-25)^2}{25} = 4{,}320$$

***St. volnosti = n = k - 1 = 1***

**Zamítáme hypotézu shody srovnávaných četností**

Při testování $H_0$ jsme použili matematický zápis (0,025 < P < 0,05). Z tabulek $\chi 2$ rozložení vidíme, že pravděpodobnost překročení hranice 2,706 je 0,1 (10 %), což může být stručně zapsáno jako
P ($\chi 2 \geq$ 2,706) = 0,10.
Dále lze zjistit pro P ($\chi 2 \geq$ 3,841) = 0,05. V řešené úloze jsme dospěli k hodnotě testové statistiky $\chi 2$ = 4,320. Pro tento případ lze tedy psát 0,025 < P ($\chi 2 \geq$ 4,320) < 0,05; a jednodušeji 0,025 < P < 0,05. Jde v podstatě o přibližné určení hranic chyby 1. druhu.

# Test dobré shody: příklad II

**Tento příklad je rozšířením problému z příkladu 1 na srovnání pozorovaných a očekávaných frekvencí pro více kategorií sledovaného znaku:**

✓ Celkem bylo zkoumáno 250 semen určitého druhu rostliny a roztříděno do následujících kategorií: žluté/hladké; žluté/vrásčité; zelené/hladké; zelené/vrásčité. Předpokládaný poměr výskytu těchto kategorií v populaci je 9 : 3 : 3 : 1. Následující tabulka obsahuje původní data z pozorování a dále postup při testování $H_0$.

| | žluté/hladké | žluté/vrásčité | zelené/hladké | zelené/vrásčité | n |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_{poz.}$ | 152 | 39 | 53 | 6 | 250 |
| $f_{oček.}$ | 140,6250 | 46,8750 | 46,8750 | 15,6250 | |

$\nu = k - 1 = 3$

$$\chi^2 = \frac{11{,}3750^2}{140{,}6250} + \frac{7{,}8750^2}{46{,}8750} + \frac{6{,}1250^2}{46{,}8750} + \frac{9{,}6250^2}{15{,}6250} = 8{,}972$$

**Zamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými**

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
*J. Jarkovský, L. Dušek*

# Test dobré shody: příklad III

**Složitější příklady řešené srovnáváním frekvencí je možné rozdělit na testování dílčích hypotéz:**

✓ Předpokládejme, že chceme pro data z předchozí úlohy testovat hypotézu existence štěpného poměru 9 : 3 : 3 pro první tři kategorie semen:

| | žluté/hladké | žluté/vrásčité | zelené/hladké | n |
|---|---|---|---|---|
| $f_{poz.}$ | 152 | 39 | 53 | 244 |
| $f_{oček.}$ | 146,400 | 48,800 | 48,800 | |

***n = k - 1 = 2***

$$\chi^2 = \frac{5,600^2}{146,40} + \frac{9,800^2}{48,80} + \frac{4,200^2}{48,80} = 2,544$$

**Nezamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými.**

✓ Nyní otestujeme hypotézu štěpného poměru kategorií zelené/vrásčité:ostatní typy = 1:15

| | zelené/vrásčité | ostatní | n |
|---|---|---|---|
| $f_{poz.}$ | 6 | 244 | 25 |
| $f_{oček}$ | 15,625 | 234,375 | |

***n = k - 1 = 1***

$$\chi^2 = \frac{9,625^2}{15,625} + \frac{9,625^2}{234,375} = 6,324$$

**Zamítáme hypotézu shody pozorovaných četností s očekávanými.**

# Kontingenční tabulka I

- Máme dvě nominální veličiny, X (má r variant) a Y (má s variant)
- Kontingenční tabulka typu **r** x **s**

| $x_{[j]}$ \ $y_{[k]}$ | $y_{[1]}$ | ..... | ..... | $y_{[s]}$ | $n_{j.}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_{[1]}$ | $n_{11}$ | ..... | ..... | $n_{1s}$ | $n_{1.}$ |
| . | . | ..... | ..... | . | . |
| . | . | ..... | ..... | . | . |
| $x_{[r]}$ | $n_{r1}$ | ..... | ..... | $n_{rs}$ | $n_{r.}$ |
| $n_{.k}$ | $n_{.1}$ | . | . | $n_{.s}$ | n |

- Označení:

  $n_{jk}$- simultánní absolutní četnost,

  $n_{j.}$- marginální absolutní četnost

# Kontingenční tabulka II

- Kontingenční tabulka umožňuje testování následujících hypotéz:

1. **Hypotézu o nezávislosti,**
2. **Hypotézu o shodnosti struktury (test homogenity)**
3. **Hypotézu o symetrii**

# Testování nezávislosti I

- Motivace: Souvisí spolu výskyt dvou nominálních znaků měřených na jediném výběru?
- Příklad: Barva očí (modrá, zelená, hnědá) a barva vlasů (hnědá, černá, blond) u vybraných 30 studentů jsou nezávislé.
- Nulová hypotéza: Znaky X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
- Alternativní hypotéza: Znaky X a Y jsou závislé náhodné veličiny.
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

$$K = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \frac{(n_{jk} - e_{jk})^2}{e_{jk}} \overset{H_0 \text{ platí}}{\approx} \chi^2\big((r-1)(s-1)\big)$$

Očekávané (teoretické) četnosti $e_{jk}$: $e_{jk} = \frac{n_{j.} n_{.k}}{n}$

- $H_0$ zamítáme na hladině významnosti α, pokud $K \geq \chi^2_{1-\alpha}\big((r-1)(s-1)\big)$
- **Předpoklady testu ?**

# Testování nezávislosti II

- **<u>Předpoklady Pearsonova chí-kvadrát testu</u>**:

1. Jednotlivá pozorování shrnutá v kontingenční tabulce jsou nezávislá, tj. každý prvek patří jen do jedné buňky kont. tabulky, nemůže zároveň patřit do dvou.
2. **Podmínky dobré aproximace**: Očekávané (teoretické) četnosti jsou aspoň v 80 % případů větší nebo rovné 5 a ve 100 % případů nesmí být pod 2. (Pokud není tento předpoklad splněn, je vhodné sloučit kategorie s nízkými četnostmi).

- **<u>Měření síly závislosti:</u>**

Cramérův koeficient: $V = \sqrt{\frac{K}{n(m-1)}}, kde \quad m = \min\{r,s\}, V \ je\ z\ \text{interval}u\ (0,1)$

Význam hodnot: 0-0,1….zanedbatelná závislost

0,1-0,3…slabá závislost

0,3-0,7…střední závislost

0,7-1 silná závislost

# Kontingenční tabulky
# H0 :Nezávislost dvou jevů A a B

**Kontingenční tabulka 2 x 2**

| B ↓ \ A → | + | - | Podíl (+) |
|---|---|---|---|
| + | a | b | $\frac{a}{(a+b)}$ p1 |
| - | c | d | $\frac{c}{(c+d)}$ p2 |
| Podíl (+) | $\frac{a}{(a+c)}$ | $\frac{b}{(b+d)}$ | |

N = a + b + c + d

$$P(B^+) = \frac{(a+b)}{N}$$

$$P(B^-) = \frac{(c+d)}{N}$$

**Očekávané četnosti:**

$$F_{(A)} = \frac{(a+b)(a+c)}{N} \qquad F_{(C)} = \frac{(a+c)(d+c)}{N}$$

$$F_{(B)} = \frac{(a+b)(b+d)}{N} \qquad F_{(D)} = \frac{(b+d)(c+d)}{N}$$

$$\chi^2_{\nu=1} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

$$\nu = 1 = (r-1)*(c-1)$$

$$P_{(A)}; P_{(B)}$$

$$\chi^2_c = \sum \sum \frac{(|f_{ij} - F_{ij}| - 0{,}5)^2}{F_{ij}}$$

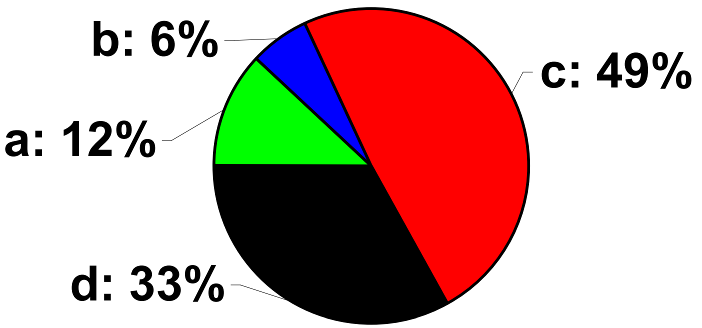
# Kontingenční tabulky: příklad

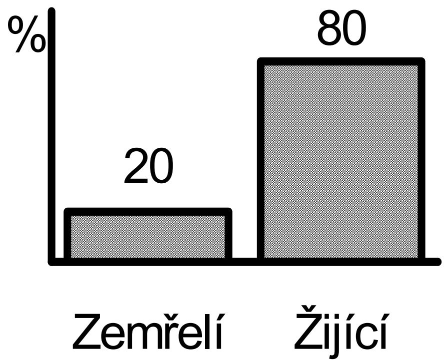
| gen \ † | Ano | Ne | Σ |
|---|---|---|---|
| **Ano** | 20 | 82 | 102 |
| **Ne** | 10 | 54 | 64 |
| **Σ** | 30 | 136 | 166 |

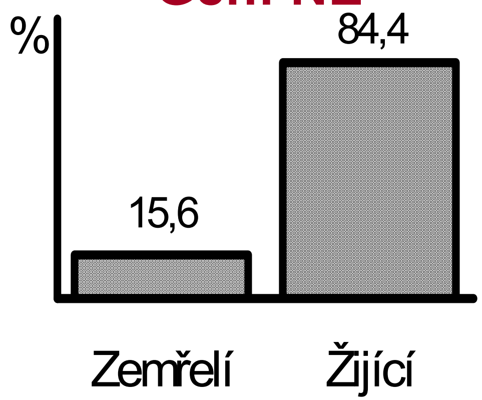
$F_A = 102 * 30 / 166 = 18,43$
$F_B = 102 * 136 / 166 = 83,57$
$F_C = 11,57$
$F_D = 52,43$

$$\chi^2_{(1)} = \frac{(20-18{,}43)^2}{18{,}43} + \frac{(82-83{,}57)^2}{83{,}57} + \frac{(10-11{,}57)^2}{11{,}57} + \frac{(54-52{,}43)^2}{52{,}43} = 0{,}423 \qquad 0{,}423 < \chi^2_{0,95}{}^{(1)} = 3{,}84$$

## Kontingenční tabulka v obrázku



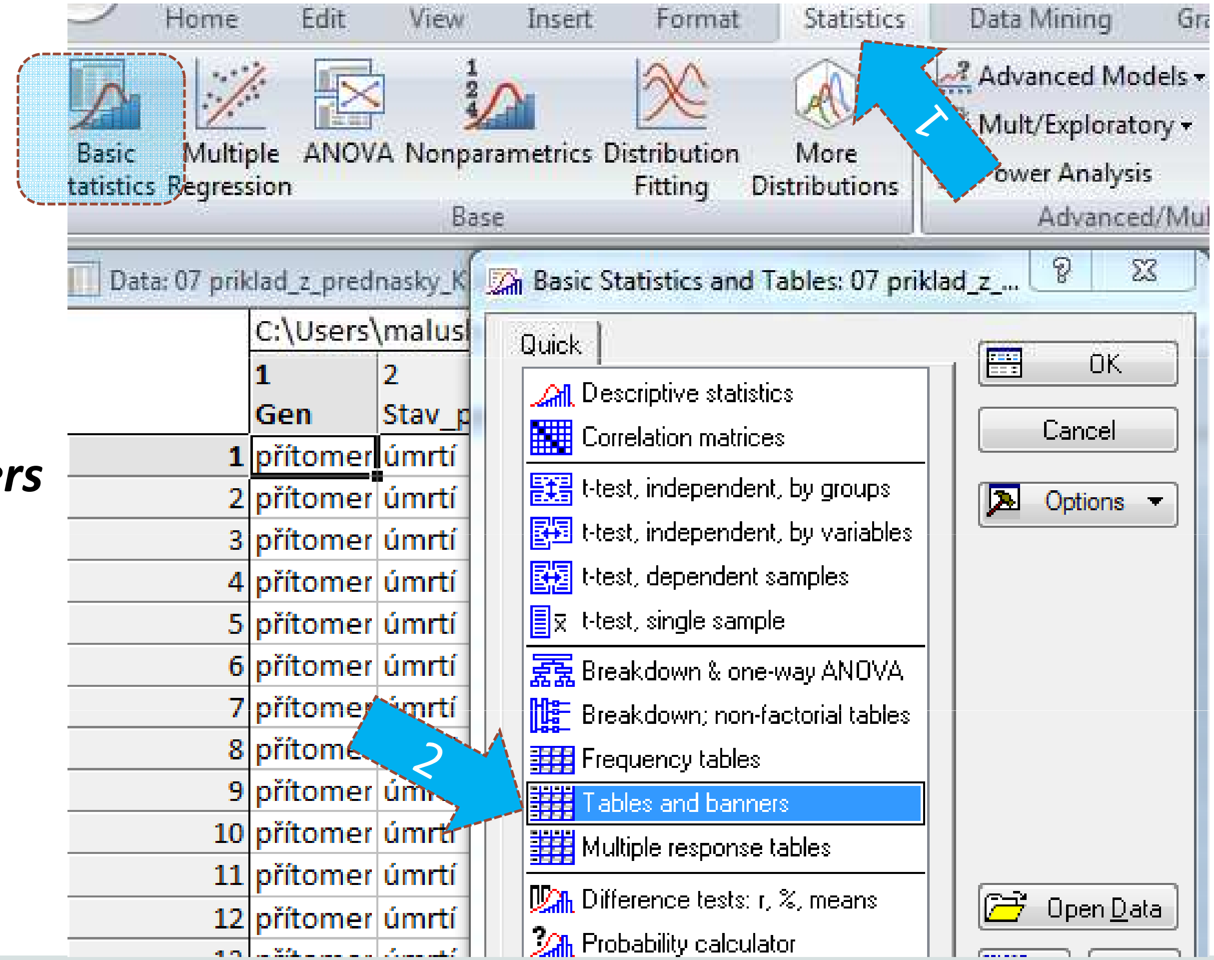




Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
*J. Jarkovský, L. Dušek*

# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica I

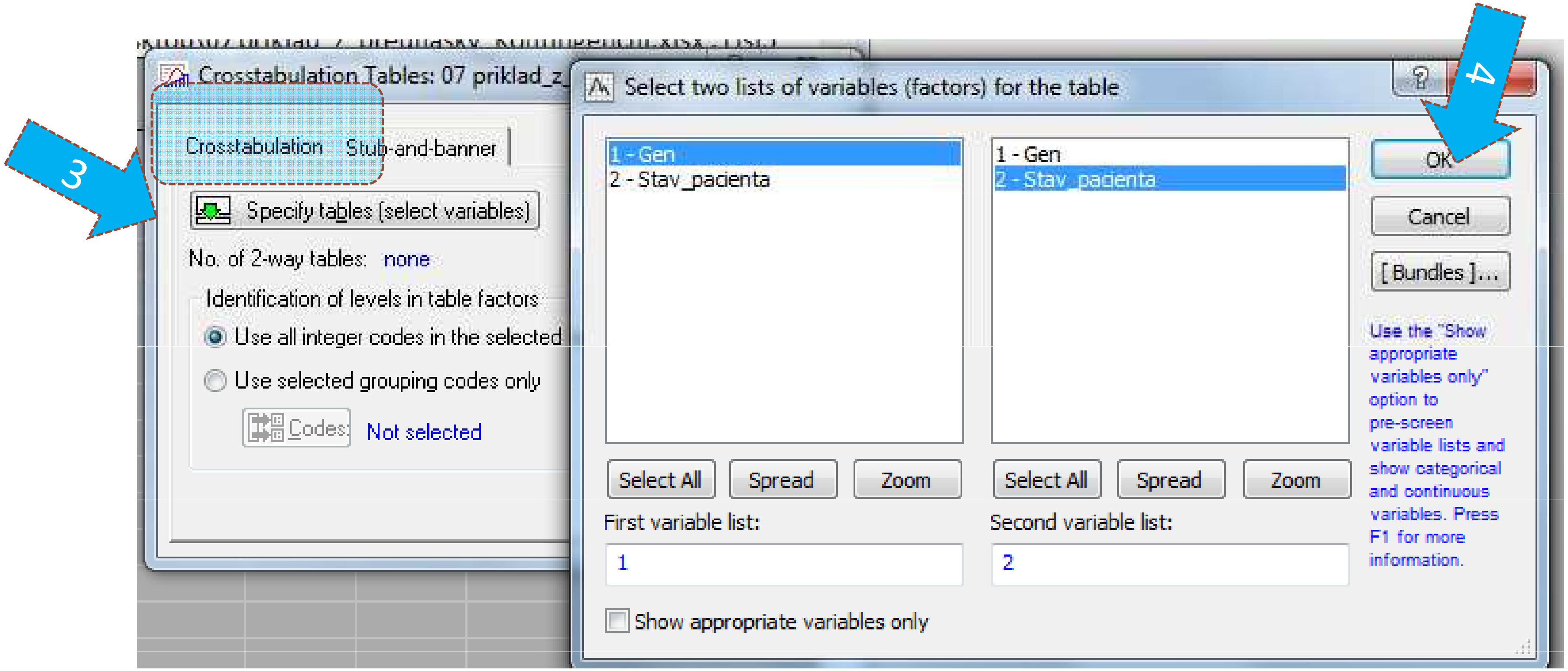
- Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti genu a stavu pacienta. Simultánní četnosti znázorněte graficky.




- V menu ***Statistics*** zvolíme ***Basic statistics,*** Vybereme ***Tables and banners***

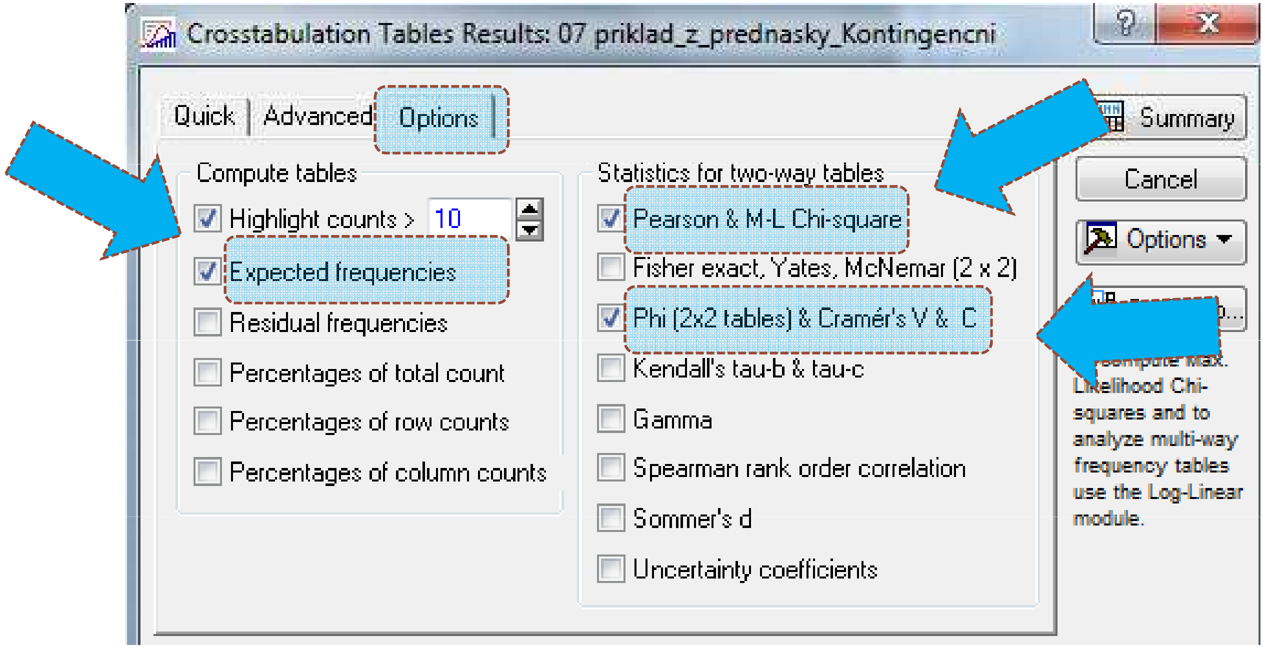
# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica II

- Vybereme proměnné, které chceme testovat



# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica III

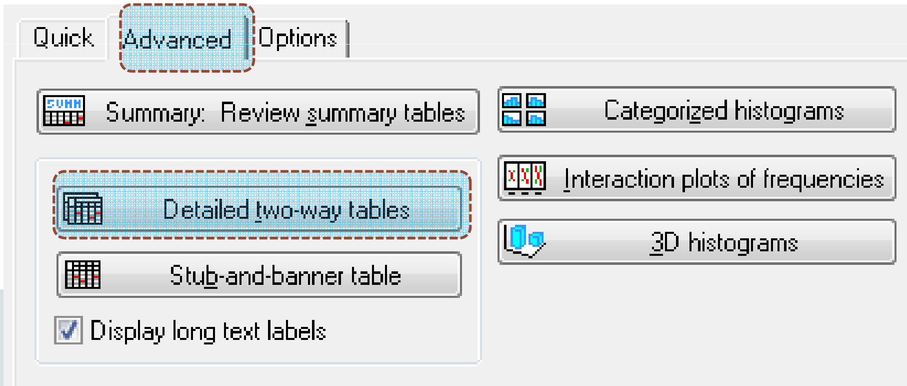
• Na záložce **Options** zaškrtneme ***Expected frequencies*** (***Očekávané četnosti***) (k ověření podmínek dobré aproximace)




• Zaškrtneme Pearsonův chí-kvadrát

• Pokud chceme vypočítat i Cramérův koeficient zaškrtneme Phi & Cramer‘s V

• Poté se vrátíme na záložku **Advanced,** kde a zvolíme ***Detailed two-way tables***



# Příklad 1: Řešení v softwaru Statistica IV

**Tab.1: Pozorované četnosti**

Summary Frequency Table (07 priklad_z_prednasky_K
Marked cells have counts > 10
(Marginal summaries are not marked)

| Gen | Stav_pacienta úmrtí | Stav_pacienta žijící | Row Totals |
|---|---|---|---|
| přítomen | 20 | 82 | 102 |
| nepřítomen | 10 | 54 | 64 |
| All Grps | 30 | 136 | 166 |

**Tab. 2: Očekávané četnosti**

Summary Table: Expected Frequencies (07 priklad_z_pre
Marked cells have counts > 10
Pearson Chi-square: ,421322, df=1, p=,516278

| Gen | Stav_pacienta úmrtí | Stav_pacienta žijící | Row Totals |
|---|---|---|---|
| přítomen | 18,43373 | 83,5663 | 102,0000 |
| nepřítomen | 11,56627 | 52,4337 | 64,0000 |
| All Grps | 30,00000 | 136,0000 | 166,0000 |

Jsou splněny <u>podmínky dobré aproximace</u>? ANO

**Tab. 3: Paersonův chí-kvadrát**

Hodnota testové statistiky

Počet stupňů volnosti

p- hodnota

| Statistic | Statistics: Gen(2) x Stav_pacienta(2) Chi-square | df | p |
|---|---|---|---|
| Pearson Chi-square | ,4213223 | df=1 | p=,51628 |
| M-L Chi-square | ,4277117 | df=1 | p=,51311 |
| Phi for 2 x 2 tables | ,0503794 | | |
| Tetrachoric correlation | ,0949754 | | |
| Contingency coefficient | ,0503156 | | |

# R x C kontingenční tabulka

Výběr: N lidí ze sociologického průzkumu (delikventi)
Jev **A**: Původ z rozvrácených rodin
Jev **B**: Stupeň zločinnosti I < II < III < IV

| A \ B | I. | II. | III. | IV. | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ANO | a | b | c | d | číslo 1 |
| NE | e | f | g | h | |
| $\Sigma$ | číslo2 | | | | |

*Stupně volnosti:*
(R-1) * (C-1) = 1 * 3 = 3

$$F_a = \frac{\check{c}\acute{\imath}slo\,1 \cdot \check{c}\acute{\imath}slo\,2}{N}$$

Tabulky: $\chi^2_{(1-\alpha)}(\nu)$

**Očekávané četnosti:**

$$p_a = \frac{a}{a+e} \qquad p_b = \frac{b}{b+f} \qquad p_c = \frac{c}{c+g} \qquad p_d = \frac{d}{d+h}$$

# Čtyřpolní tabulky

- Máme dvě nominální veličiny, X (má dvě varianty) a Y (má dvě varianty)
- Kontingenční tabulka typu **2** x **2**

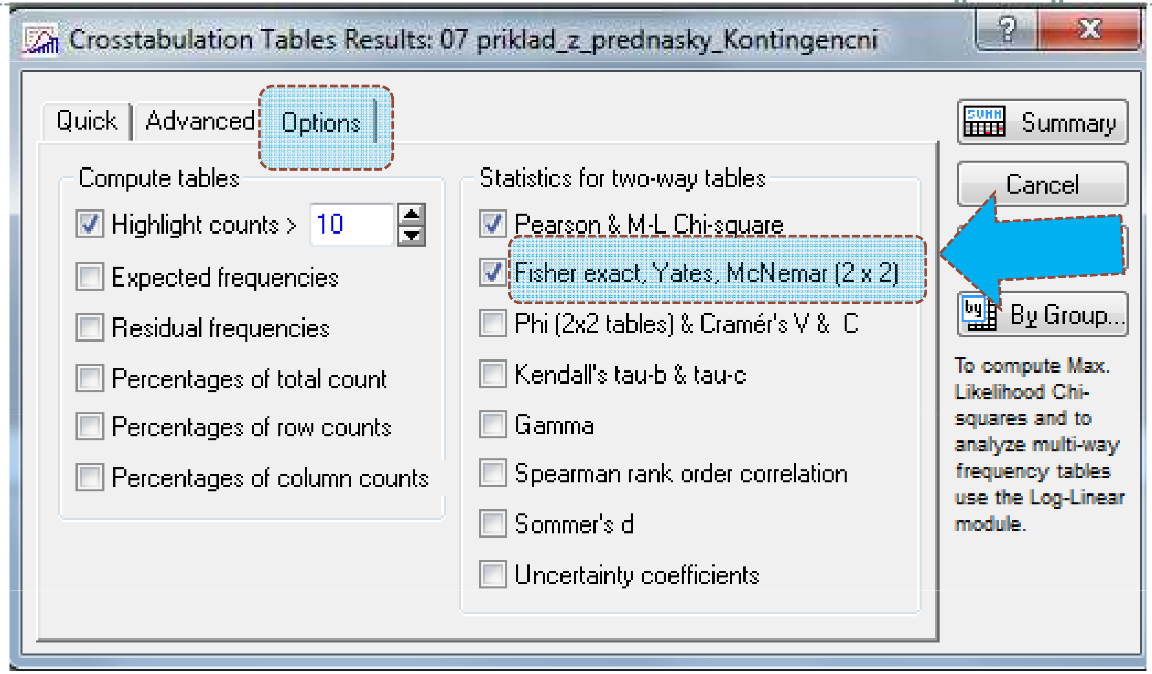
| | $y_{[1]}$ | $y_{[2]}$ | $n_{j.}$ |
|---|---|---|---|
| $x_{[1]}$ | *a* | b | a+b |
| $x_{[2]}$ | *c* | d | c+d |
| $n_{.k}$ | a+c | b+d | n |

| **Výsledek pokusu** | **okolnosti** | | $n_{j.}$ |
|---|---|---|---|
| | **I** | **II** | |
| **úspěch** | *a* | b | a+b |
| **neúspěch** | *c* | d | c+d |
| $n_{.k}$ | a+c | b+d | n |

- Definice: **podíl šancí (odds ratio)** $OR = \frac{ad}{bc}$

  Jestliže asymptotický 100(1-α)% interval spolehlivosti $\ln OR \pm \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\, u_{1-\alpha/2}$ neobsahuje 1, pak hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti α.
- Test: **Fisherův přesný (exaktní) test (slouží též k testování v tabulce r x s, když nemáme splněny podmínky dobré aproximace)**

# Řešení v softwaru Statistica: Fisherův přesný test




- Na záložce **Options** zaškrtneme ***Fisher exact***

- Výstupní tabulka

| Statistic | Statistics: Gen(2) x Stav_paci | | |
|---|---|---|---|
| | **Chi-square** | df | p |
| **Pearson Chi-square** | ,4213223 | df=1 | p=,51628 |
| M-L Chi-square | ,4277117 | df=1 | p=,51311 |
| Yates Chi-square | ,1952605 | df=1 | p=,65857 |
| Fisher exact, one-tailed | | | p=,33259 |
| two-tailed | | | p=,54314 |
| McNemar Chi-square (A/D) | 14,71622 | df=1 | p=,00012 |
| (B/C) | 54,79348 | df=1 | p=,00000 |

Pro jednostranný test

**Pro oboustranný test**

# Testování homogenity (testování shody struktury)

- Motivace: Zajímá nás výskyt nominálního znaku u *r* nezávislých výběrů z *r* různých populací.
- Příklad: Je zájem o sport stejný u děvčat jako u chlapců?
- Nulová hypotéza: pravděpodobnostní rozdělení kategoriální proměnné je stejné v různých populací
- Test: **Pearsonův chí-kvadrát**

| | | Dívky | Chlapci | |
|---|---|---|---|---|
| **Zájem o sport** | **Ano** | *a* | b | a+b |
| | **Ne** | *c* | d | c+d |
| | | a+c | b+d | n |

***Některé marginální četnosti (buď sloupcové nebo řádkové) jsou předem pevně stanoveny***

# Testování homogenity: příklad I

Očkování proti chřipce se zúčastnilo 460 dospělých, z nichž 240 dostalo očkovací látku proti chřipce a 220 dostalo placebo. Na konci experimentu onemocnělo 100 lidí chřipkou, 20 z nich bylo z očkované skupiny a 80 z kontrolní skupiny. Je to dostatečný důkaz, že očkovací látka byla účinná?

**Nulová hypotéza:** Procento výskytu chřipky je v očkované a kontrolní skupině stejné.

# Test hypotézy o symetrii (McNemarův test pro čtyřpolní tabulku)

- Motivace: Na osobách sledujeme binární proměnnou před pokusem a po něm, cílem je zjistit, zda došlo ke změně v rozdělení této proměnné.
- **Analýza párových dichotomických proměnných**

*Četnostní tabulka*

| | | po | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **+** | **-** | $n_{j.}$ |
| **před** | **+** | *a* | *b* | *a+b* |
| | **-** | *c* | *d* | *c+d* |
| | $n_{.k}$ | *a+c* | *b+d* | *n* |

*Tabulka teoretických pravděpodobností*

| | | po | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **+** | **-** | |
| **před** | **+** | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{1.}$ |
| | **-** | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{2.}$ |
| | | $p_{.1}$ | $p_{.2}$ | |

- Nulová hypotéza: $p_{ij} = p_{ji}$, pokus nemá vliv na výskyt daného znaku
- Testová statistika: $\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$ pokud je větší než kritická hodnota $\chi^2$ rozdělení o jednom stupni volnosti (vhodné pro počty údajů b+c > 8), pak nulovou hypotézu zamítáme

# Mc Nemarrův test: příklad I

Zjistěte, zda výuka o pozitivním působení sportu na zdraví vede ke změně postojů žáků ke sportování.

**Nulová hypotéza:** Počet žáků, kteří změní svůj postoj pozitivním směrem, je pouze náhodně odlišný od počtu žáků, kteří změní svůj postoj negativním směrem.

| | | Postoj po výuce | | |
|---|---|---|---|---|
| | | + | - | |
| Postoj před výukou | + | *5* | 3 | 8 |
| | - | *16* | 2 | 18 |
| | | 21 | 5 | 26 |

$$\chi^2 = \frac{(3-16)^2}{3+16} = 8{,}89$$

*Tabulky*: $\chi^2_{1-\alpha}(\nu = 1) = 3{,}84$

**$H_0$ zamítnuta**

Závěr: Výuka má pozitivní vliv na postoj žáků vzhledem k provozování sportu.