

# 10. Ověřování předpokladů parametrických testů

# Normalita dat

- Normální rozložení vstupních dat – klíčový předpoklad pro použití parametrických metod
- Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (t-rozložení) a test tak může lhát
- Řešení:
  - a) transformace dat
  - b) neparametrické metody

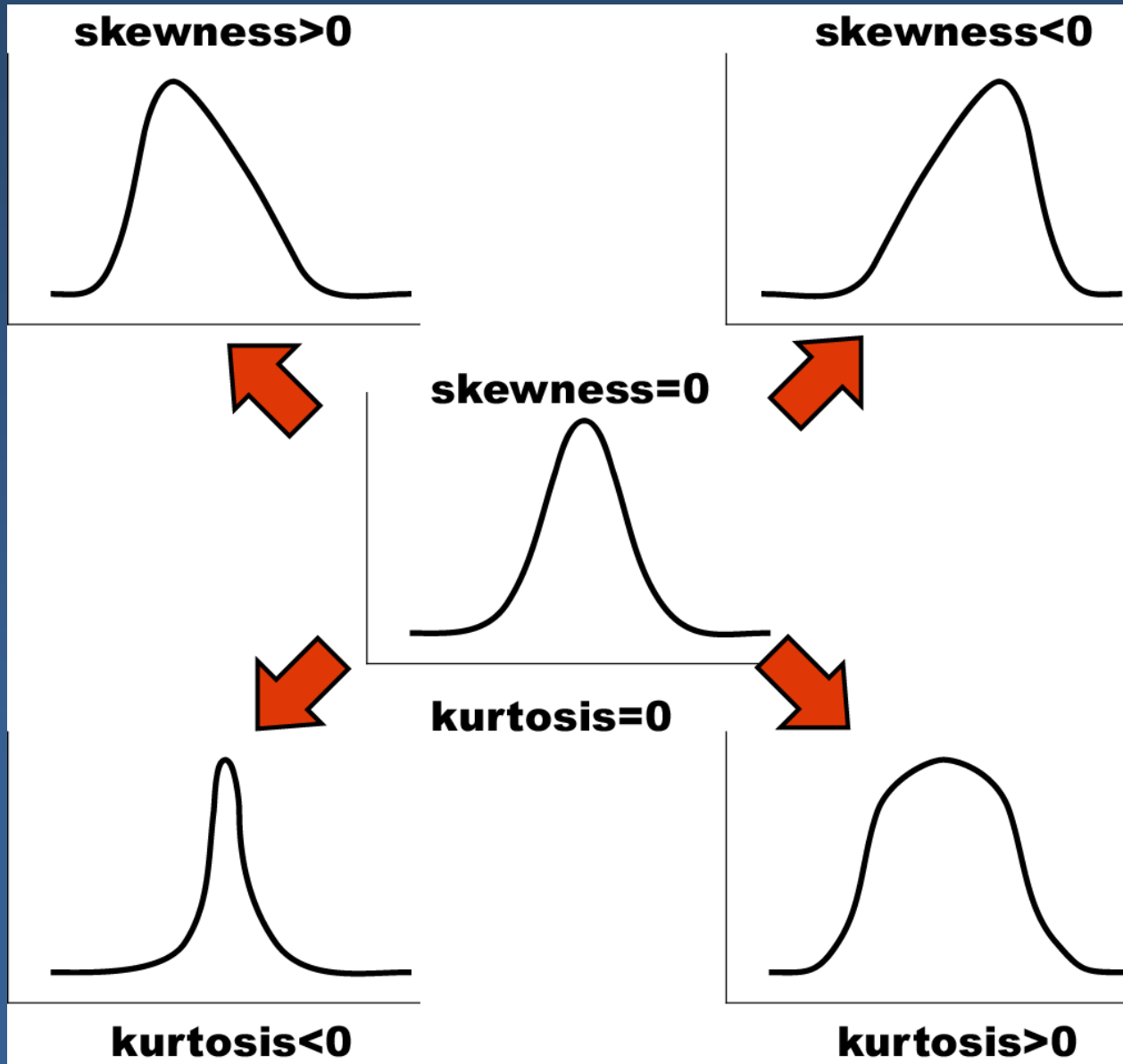
# Parametrické a neparametrické testy

Typ srovnání	Parametrický test	Neparametrický test
2 skupiny dat nepárově	Nepárový t-test	Mann-Whitney test
2 skupiny dat párově	Párový t-test	Wilcoxonův test, znaménkový test
Více skupin nepárově	ANOVA	Kruskal-Wallis ANOVA
Korelace	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient

# Testy normality

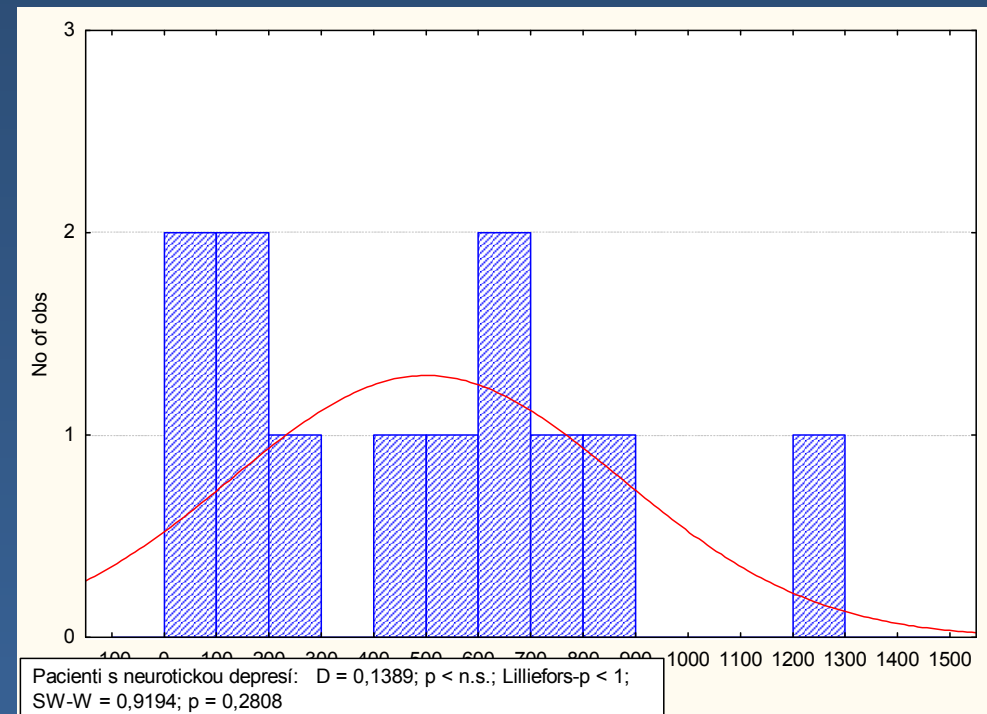
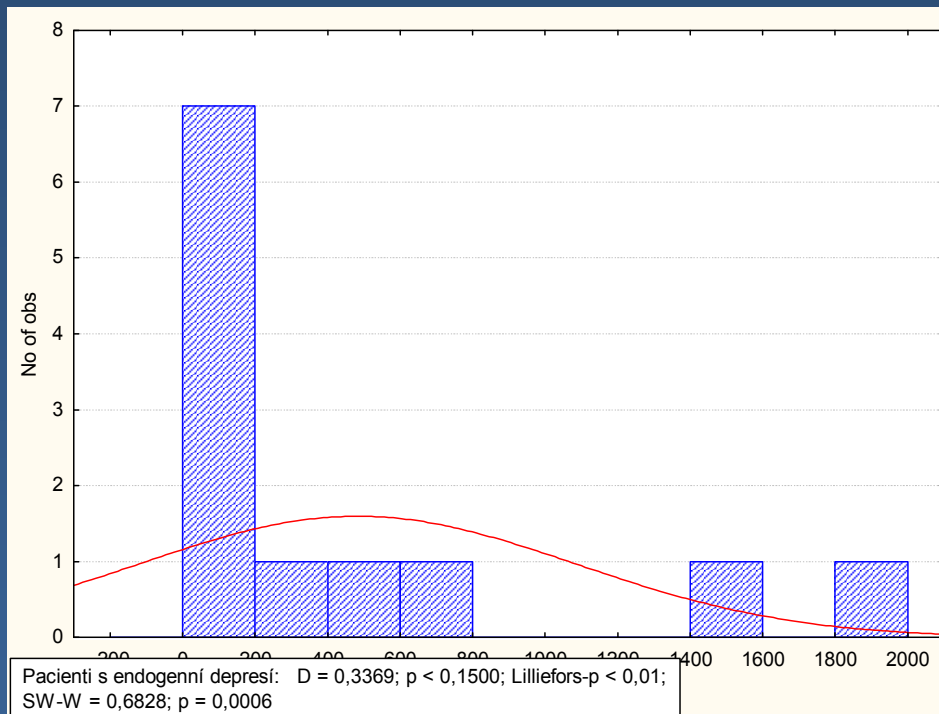
- $H_0$ : není rozdíl mezi zpracovávaným rozložením a normálním rozložením
- Kombinovat test a grafickou reprezentaci zkoumaných dat
- Testy:
  - Test dobré shody
  - Kolmogorov-Smirnov test (K-S test, Lilieforsův test)
  - Shapiro-Wilk's test

# Šikmost a špičatost



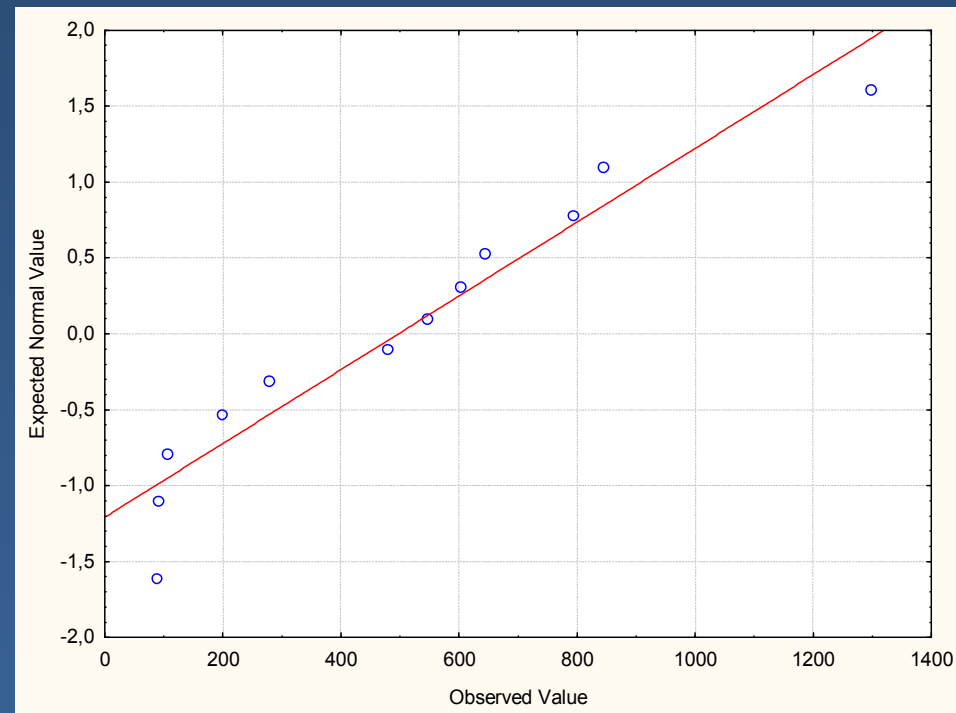
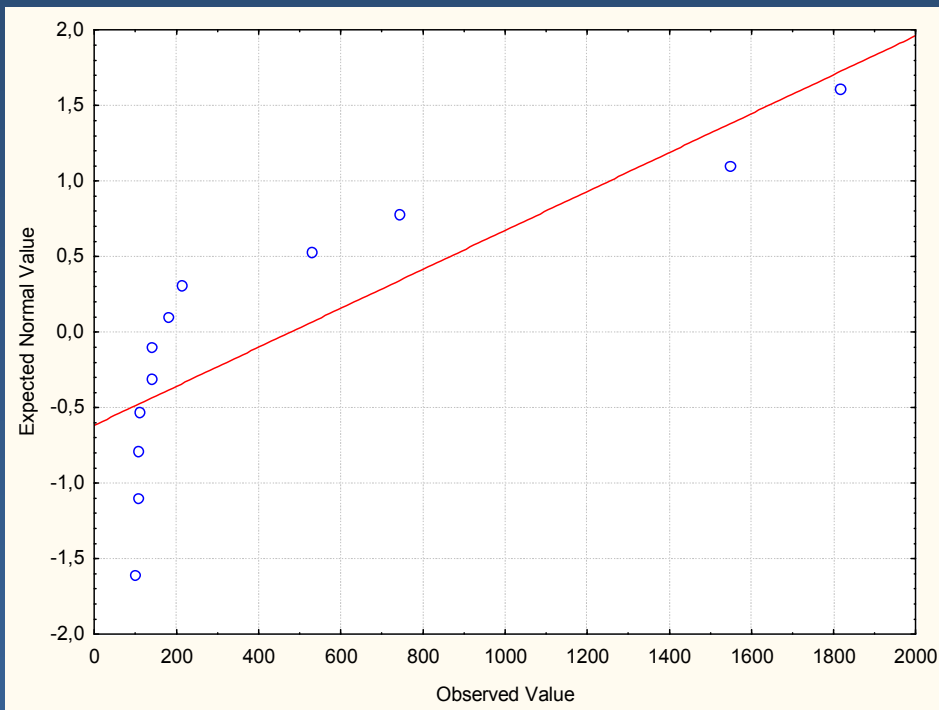
# Grafická diagnostika normality

## - histogram



# Grafická diagnostika normality

## - Normální graf



# Test shody rozptylů

- *F-test*

- $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

- $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{v čitateli je větší z obou } s^2!$$

- $F$  má Fisher-Snedecorovo ( $F$ ) rozdělení se dvěma parametry: stupni volnosti čitatele a jmenovatele

- $H_0$  zamítáme pro  $F \geq F_{\alpha, df_1, df_2}$



# 11. Neparametrické metody

# Neparametrické metody

- Parametrické metody – předpoklady o rozložení dat
- Neparametrické metody – nepředpokládají konkrétní rozložení
- Pro data nevyhovující předpokladům parametrických metod
- Ordinální data, pořadí nebo četnosti
- Mohou vyžadovat velmi obecné předpoklady na rozložení dat výběru – např. symetrie
- Slabší než odpovídající parametrické testy

# Pořadí

- Reálná čísla uspořádaná podle velikosti  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Pro různá čísla je pořadí čísla  $x_i$  dáno indexem  $i$
- Pořadí  $R_i$  udává počet čísel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , která jsou menší nebo rovna číslu  $x_i$

Vzestupně uspořádané hodnoty $x_i$	-2	0	5	7	18
Pořadí $R_i$	1	2	3	4	5

- Čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nejsou různá, vytvářejí shody => průměrné pořadí

Vzestupně uspořádané hodnoty $x_i$	-5	-5	0	0	0	10	21	21
Očíslování hodnot $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Pořadí $R_i$	1,5	1,5	4	4	4	6	7,5	7,5

# Kvantilový test

$$H_0: x_q = c$$

- $100q\%$  kvantil základního souboru  $x_q$  je roven konstantě  $c$
- Z rozsahu výběru  $n$  stanovíme počet členů  $m$ , kde  $x < c$  (odstranit hodnoty rovny  $c$  a zmenšit  $n$ )

$$Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \sim N(0,1)$$

- Předpoklady:  $n > 30$  a  $0,10 < q < 0,90$

# Kvantilový test

$$H_1 : x_q \neq c$$

- Kritická hodnota:  $z_{1-\alpha/2}$  = kvantil standardizovaného normálního rozložení

- $H_0$  zamítáme pro  $|Z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$H_1 : x_q > c$$

- Kritická hodnota:  $z_\alpha$

- $H_0$  zamítáme pro  $Z \leq z_\alpha$

$$H_1 : x_q < c$$

- Kritická hodnota:  $z_{1-\alpha}$

- $H_0$  zamítáme pro  $Z \geq z_{1-\alpha}$

# Mediánový test

-  $q = 0,50$

$$Z = \frac{2m - n}{\sqrt{n}}$$

# Mediánový test - příklad

Ve skupině 49 chlapců ve věku 9,5-10 let dispenzarizovaných v roce 1960 po dobu nejméně čtyř let pro jisté onemocnění bylo nalezeno 27 chlapců menších než 138,5 cm, kde 138,5 cm je zjištěný průměr tělesné výšky v populaci chlapců stejného věku při celostátním šetření. Ověřte na 5% hladině významnosti, zda u nemocných dětí je průměrná výška menší než v odpovídající věkové skupině zdravých dětí.

Řešení:  $H_0: x_{0,50} = 138,5$ ;  $H_1: x_{0,50} < 138,5$

$$Z = \frac{2 \cdot 27 - 49}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7} = 0,714$$

Pro jednostrannou alternativu a  $\alpha=0,05$  je kvantil  $z_{1-\alpha}=1,645$

Na 5% hladině významnosti nelze zamítnout nulovou hypotézu => naše pozorování neprokázalo, že onemocnění brzdí růst dětí

# Znaménkový test

- Mediánový test pro rozdíly párových pozorování
- Jednoduchý, ale velmi slabý
- Pro alespoň ordinální stupnici
- Testová statistika: počet znamének vyskytujících se méně často nebo stejná jako pro mediánový test



# Znaménkový test - příklad

U skupiny 15 dětí byla měřena frekvence mrkání oka v klidové situaci (při volné hře) a při sledování napínavého televizního programu. Máme rozhodnout, zda při sledování napínavého televizního programu je frekvence mrkání oka vyšší než v klidové situaci.

Dítě číslo	Frekvence mrkání oka		Změna
	V klidu	Při sledování TV	
1	10	11	+
2	8	10	+
3	9	8	-
4	15	14	-
5	12	13	+
6	13	15	+
7	11	13	+
8	14	12	-
9	10	11	+
10	11	13	+
11	12	14	+
12	13	14	+
13	17	16	-
14	16	19	+
15	12	15	+

$H_0$ : mezi frekvencí mrkání oka v klidové situaci a frekvencí mrkání oka při sledování napínavého programu není rozdíl ( $x_{0,50} = 0$ )

$H_1$ : Frekvence mrkání oka je při sledování napínavého televizního programu vyšší než v klidové situaci ( $x_{0,50} > 0$ )

$$Z = \frac{2 \cdot 4 - 15}{\sqrt{15}} = -\frac{7}{3,87} = -1,81$$

$$\alpha = 0,05; z_\alpha = -1,645$$

$$Z = -1,81 < -1,645 \Rightarrow \text{zamítáme } H_0$$

# Wilcoxonův párový test

- Obdoba párového t-testu
- Při nesplnění předpokladu normality rozdílů
- $H_0$ : medián rozdílů je nulový (není systematická diference uvnitř párů)
- $H_1$ : medián rozdílů je různý od nuly (je systematická diference uvnitř párů)
- Stanovení rozdílů, přiřazení pořadí bez ohledu na znaménko
- Testová statistika =  $\min(T_+, T_-) - T_+$  - součet kladných pořadí,  $T_-$  - součet záporných pořadí

# Wilcoxonův párový test

- Oboustranný test:  $H_0$  zamítáme
- pro  $\min(T_+, T_-) < T_{\alpha, n}$

# Wilcoxonův párový test - příklad

Osmi rostlinám tabáku byl odebrán druhý list. Jedna náhodně vybraná polovina listu byla ošetřena přípravkem A, druhá přípravkem B. Potom byly listy potřeny suspenzí agresora a byl sledován počet skvrn na každé polovině.

Rostlina	Počet skvrn		Rozdíl
	Přípravek A	Přípravek B	
1	9	10	-1
2	17	11	6
3	31	18	13
4	18	14	4
5	7	6	1
6	8	7	1
7	20	17	3
8	10	5	5

$$T_- = 2$$

$$T_+ = 34$$

$$\min(T_-, T_+) = 2$$

Uspořádáme rozdíly:

Uspořádané rozdíly	1	-1	1	3	4	5	6	13
Pořadí rozdílů	2	2	2	4	5	6	7	8

Počet nenulových rozdílů je  $n = 8$ ; pro  $\alpha = 0,05$  je kritická hodnota 3  
 $\min(T_-, T_+) = 2 < 3 \Rightarrow$  zamítáme hypotézu stejné účinnosti přípravků A a B

# Mann-Whitney U test

- Někdy název dvouvýběrový Wilcoxonův test
- Obdoba dvouvýběrového t-testu
- $H_0$ : rozdělení obou skupin je shodné
- $H_1$ : rozdělení obou skupin se liší
- Kombinace obou výběrů, vzestupné seřazení hodnot, stanovení pořadí jednotlivých pozorování, stejným hodnotám dáváme průměrné pořadí

# Mann-Whitney U test

$$U_1 = S_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$$U_2 = S_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

- $S_i$  – součet pořadí v souboru  $i$
- $n_i$  – počet prvků v souboru  $i$
- $U_1 + U_2 = n_1 n_2$
- $\min(U_1, U_2)$  porovnááme s kritickou hodnotou
- Pro  $\min(U_1, U_2) <$  kritická hodnota zamítáme  $H_0$

# Mann-Whitney U test

- Pro  $n_1 > 30$  a  $n_2 > 20$  lze použít normální aproximaci

$$Z = \frac{U_1 - \frac{1}{2}n_1n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1n_2(n_1 + n_2 + 1)}}$$

- Kritickou hodnotou je kvantil  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  standardizovaného normálního rozdělení
- $H_0$  zamítáme pro  $|Z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

# Mann-Whitney U test - příklad

Výkon 18 gymnastek byl ohodnocen stanovením jejich pořadí od nejlepší (pořadí 1) po nejslabší (pořadí 18). V této skupině bylo  $n_1 = 11$  zákyň trenérky A a  $n_2 = 7$  zákyň trenérky B. Na základě výsledků (pořadí) shrnutých v tabulce se má posoudit nulová hypotéza  $H_0$ : „účinnost výukových metod obou trenérek se neliší“

Trenérka:

A	B
1	2
4	3
5	6
7	9
8	12
10	15
11	18
13	
14	
16	
17	

$$n_1 = 11$$

$$n_2 = 7$$

$$S_1 = 106$$

$$S_2 = 65$$

$$U_1 = S_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} = 106 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 40$$

$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 77 - 40 = 37$$

$$\text{Min}(U_1, U_2) = 37$$

$$U_{0,05}(7, 11) = 16$$

$37 > 16 \Rightarrow$  nelze zamítnout  $H_0$ , že účinnost výukových metod obou trenérek se neliší