# 9. Testování hypotéz o průměru pro jeden výběr a porovnávání dvou skupin

# Jednovýběrový t-test

- Test hypotézy, že průměr populace, z níž pochází náš výběr je roven určitému číslu – očekávané hodnotě
- Testová statistika:

Z=(pozorovaná hodnota – očekávaná hodnota)/

standardní chyba pozorované hodnoty

- Pozorovaná hodnota = průměr naměřených hodnot $\bar{x}$
- standardní chyba pozorované hodnoty $\sigma_x$
- $Z \sim N(0,1)$ pro dostatečně velké $n$

# Jednovýběrový t-test

- $\sigma_x$ obvykle neznáme => nahrazujeme odhadem $s_x$ vypočteným z našeho výběru

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \cdot \sqrt{n}$$

- *T* má *Studentovo t rozdělení* o *n-1* stupních volnosti
- => jednovýběrový t-test

# Normální x Studentovo *t* rozdělení

Pro malý rozsah výběru se můžou změnit dvě věci:

- Výběrová odchylka ($s$) nemusí být spolehlivým odhadem populační směrodatné odchylky ($\sigma$)
- Pokud není rozdělení populace normální, nemusí být normální ani rozdělení výběrových průměrů – velmi malý výběr (<15), extrémní odchylka od normálního rozdělení

Centrální limitní věta: i když náhodná veličina není rozdělena normálně, rozdělení výběrových průměrů se blíží normálnímu rozdělení

# Normální x Studentovo *t* rozdělení

- => nutno použít Studentovo *t* rozdělení
- V podstatě celá řada *t* rozdělení pro různé stupně volnosti (df)
- *t* rozdělení o jednom, dvou, třech, … stupních volnosti
- Jednovýběrové testy – df = *n-1*

# Oboustranná a jednostranná alternativa

- Oboustranná alternativa: $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- $\mu_0$ je konstanta (nejčastěji $\mu_0 = 0$)
- Zamítáme $H_0$ pro $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(df)$ nebo $T \leq t_{-1-\frac{\alpha}{2}}(df)$
- Jednostranná alternativa: $H_1 : \mu > \mu_0$
- Zamítáme $H_0$ pro $T \geq t_{1-\alpha}(df)$
- Jednostranná alternativa: $H_1 : \mu < \mu_0$
- Zamítáme $H_0$ pro $T \leq t_{\alpha}(df)$
- Symetrické rozdělení => $t_{\alpha}(df) = -t_{1-\alpha}(df)$

# Porovnání průměrů pro dva nezávislé výběry

- Srovnání dvou souborů
- Rozdíl mezi populačním průměrem v léčené a kontrolní skupině

$\Rightarrow$ rozdíl mezi dvěma výběrovými průměry

- Výběrové průměry se mezi výběry liší => liší se i rozdíly mezi výběrovými průměry
- Rozdělení rozdílů výběrových průměrů má nulovou střední hodnotu se standardní chybou, která je určena směrodatnou odchylkou celé populace (směrodatné odchylky výběrů) a *n*

# Dvouvýběrový t-test

- Předpokládáme platnost $H_0$ a spočteme pst, s jakou dostaneme náš výsledek nebo ještě extrémnější hodnotu
- Pro výpočet této psti potřebujeme vědět něco o rozdělení rozdílu průměrů obou výběrů
- Předpokládáme normální rozdělení výběrových průměrů (základní rozdělení skupiny podobné normálnímu)

# Dvouvýběrový t-test

$\Rightarrow$ *T* = (rozdíl výběrových průměrů – očekávaný rozdíl za platnosti $H_0$) / odhad standardní chyby rozdílu výběrových průměrů

- *T* má Studentovo *t* rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti
- Standardní chyba rozdílu výběrových průměrů je směrodatná odchylka rozdělení rozdílu výběrových průměrů, který označíme $\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

$\Rightarrow$ $s_{\bar{d}} = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ $n_1$, $n_2$ – rozsahy výběrů, s- sm. odchylka obou skupin

# Dvouvýběrový t-test

- s – sdružený odhad směrodatné odchylky
- Sdružený odhad rozptylu:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- $s_1^2$, $s_2^2$ - výběrové rozptyly pro jednotlivé skupiny
- Sdružený odhad směrodatné odchylky $\sqrt{s^2}$
- Odhad standardní chyby rozdílu výběrových průměrů $s_{\overline{d}}$

$$s_{\overline{d}} = s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

# Dvouvýběrový t-test

=> $$T = \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}}$$

- 0 je pokud $H_0$: neexistuje žádný rozdíl
- Lze testovat i konkrétní libovolný rozdíl

# Předpoklady!!!

- Nezávislost výběrů
- Normální rozdělení
- Prosté náhodné výběry (kvůli nezávislosti pozorování)
- Shodné rozptyly ve skupinách

# Interval spolehlivosti pro rozdíl mezi dvěma průměry

- Odhad rozdílu mezi dvěma průměry
- Krajní body intervalu spolehlivosti:

$$\overline{d} \pm t s_{\overline{d}}$$

- *t* – příslušný kvantil Studentova *t* rozdělení
- Např. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$

# Porovnání populačních pravděpodobností

- Porovnání pravděpodobností výskytu daného jevu ve dvou různých populacích (dva nezávislé výběry)
- Pro dostatečně velké rozsahy $n_1$ a $n_2$

$$p_1 \sim N\left(\pi_1, \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}\right)$$

$$p_2 \sim N\left(\pi_2, \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}\right)$$

- $p_1$, $p_2$ – populační pravděpodobnosti výskytu jevu

# Porovnání populačních pravděpodobností

- $r_1$, $r_2$ – počty případů ve výběrech
- Společný odhad relativní četnosti:

$$p = \frac{r_1 + r_2}{n_1 + n_2}$$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

- Podmínka: $n_i p_i (1 - p_i) > 9$ pro oba výběry

# Párový t-test

- Párování dle podobnosti, která může ovlivnit výsledek, časová měření, …
- Testujeme významnost průměrného rozdílu
- Rozdíly jsou normálně rozdělené s průměrem $\mu$ a rozptylem $\sigma^2$
- Průměr z $n$ rozdílů $\bar{d}$ bude mít průměrnou hodnotu $\mu$ a rozptyl $\sigma^2/n$

# Párový t-test

$$H_0 : \mu = 0$$

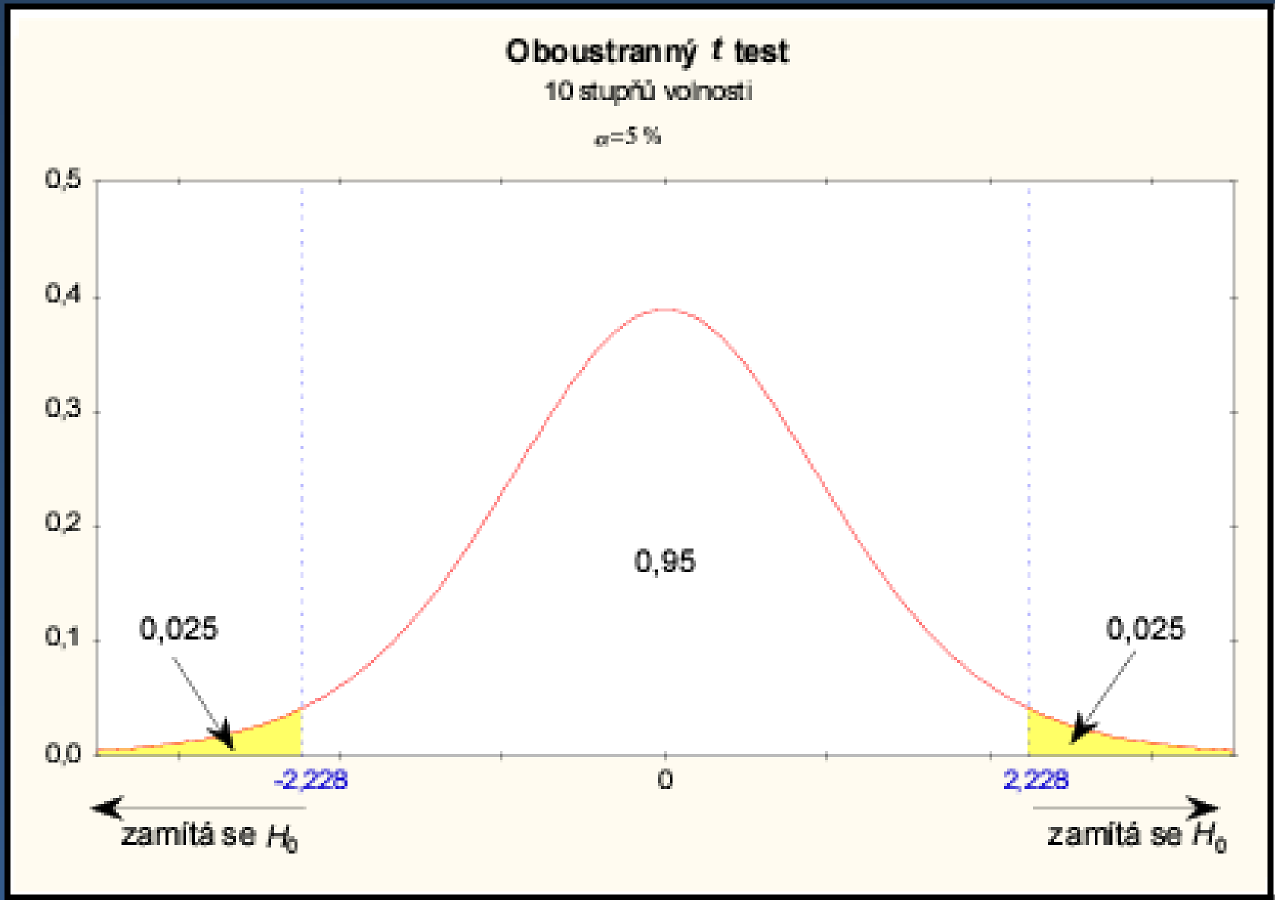
$$H_1 : \mu \neq 0$$

*T* = (pozorovaná hodnota – předpokládaná hodnota)/odhad směrodatné chyby $= \dfrac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}}$

$s_{\bar{d}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$, *s* – směrodatná odchylka rozdílů

$$T = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

má *t* rozdělení o *n-1* stupních volnosti




Za platnosti nulové hypotézy (průměrný rozdíl $\mu = 0$) bude hodnota testovacího kritéria s 95% pstí mezi

-2,228 a 2,228

# Testování hypotéz

- Stanovíme nulovou a alternativní hypotézu
- Určíme rozdělení pravděpodobnosti testové statistiky při nulové hypotéze
- Zvolíme hladinu významnosti testu $\alpha$ (doplněk koeficientu spolehlivosti $P$)
- Na základě zvolené hladiny významnosti vypočteme tzv. kritické hodnoty (příslušného rozdělení psti), které ohraničují kritický obor
- Vypočítáme hodnotu testové statistiky, pokud padne do kritického oboru, zamítáme $H_0$ na hladině významnosti $\alpha$
- V opačném případě na základě zkoumaných dat nemůžeme zamítnout $H_0$ na hladině významnosti $\alpha$ ($H_0$ nemusí být pravdivá)