

▪

2021

Optometrie – poznámky- Gravitační pole

Škorpíková

Gravitační pole

Matematická formulace zákona gravitačního silového působení byla historicky spojena s vyjádřením zákonů pohybu planet v heliocentrické soustavě, ve které je Slunce v počátku souřadnic a souřadné osy míří k určitým hvězdám.

Johanus Kepler (1571-1630).

Analýzou těchto zákonů pohybu planet a spojením s obecnými zákony pohybu (Newtonovy pohybové zákony), odvodil I. Newton v r. 1666 zákon všeobecné gravitace (publikován v r. 1687)

Gravitační zákon

Matematické vyjádření síly, kterou na sebe působí dva hmotné body je dáno vztahem /1/:

$$\mathbf{F}_{12} = - \kappa \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \mathbf{r}_{12}^0$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$
Gravitační interakce mezi dvěma tělesy, které můžeme považovat za bodová, je vyjádřena přitažlivou centrální silou, přímo úměrná hmotnosti těles a nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti mezi tělesy.

Na povrch Země působí dle N.z. na těleso hmotnosti m gravitační síla Země

$$F = \kappa \frac{m \cdot M}{R^2}$$

-
- Vzájemný pohyb v soustavě Země + těleso, který vznikne působením gravitační síly vzájemného působení, lze interpretovat jako pohyb těles vzhledem k Zemi.
- Vztah pro gravitační zrychlení vyplývá z II. Newtonova pohybového zákona, protože působí-li na těleso m síla F_g , platí

$$F_g = \kappa m \cdot M/R^2 = m a_g$$

$$a_g = \kappa M/R^2$$

$$g = \kappa M/R^2$$

Gravitační potenciální energie

Gravitační síla F_g (vyjádřená vztahem 1) vykoná při přemístění tělesa m_2 práci, která závisí jen na počáteční a konečné poloze působících těles.

$$W = \int \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = -\int \kappa m_1 m_2 / r_{12}^2 \cdot \mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{r} = \kappa m_1 m_2 / r_2 - \kappa m_1 m_2 / r_1$$

$$W = E_p(r_2) - E_p(r_1)$$

porovnáním rovnic pak dostaneme pro potenciální energii v bodě \mathbf{r}_1

$$E_p(\mathbf{r}_1) = -\kappa m_1 \cdot m_2 / r_1 + C$$

Hodnotu poten. energie volíme nulovou v nekonečnu a pak $C=0$

▪
Pokud platí $C=0$ je tedy potenciální energie soustavy dvou těles ve vzájemné vzdálenosti r

$$E_p (r) = - \kappa m_1 \cdot m_2 / r .$$

Potenciální energie je pro konečné vzdálenosti záporná.

(poznámka- lze ukázat , že potenciální energie přejde ve známý výraz $E_p = mgy$ při volbě $E_p = 0$ pro $r = R$ země při $y \ll R$)

Celková energie soustavy je $E = E_{k1} + E_{k2} + E_p$

Celková energie může být kladná i záporná v závislosti na počátečních podmínkách v soustavě

Intenzita a potenciál gravitačního pole

Příklad – gravitační interakce dvou těles je vyjádřena grav.silou \mathbf{F}_{12}

Vektorová veličina intenzita gravitačního pole

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_{12} / m_2$$

Charakterizuje gravitační pole tělesa hmotnosti m_1 v každém místě r . Nezávisí na veličinách charakterizujících jiná tělesa a umožňuje určit sílu, kterou bude pole působit na jakékoliv jiné těleso hmotnosti m vztahem

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{K} \cdot m \quad /K/ = \text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$F_g = m a_g \quad \mathbf{a}_g = \mathbf{K}$$

pro pole hmot.bodu m_1 je $\mathbf{K} = \mathbf{F}_{12}/m_2 = - \gamma m_1 / r^2 \cdot \mathbf{r}^0$

Potenciál gravitačního pole

Potenciál gravitačního pole definujeme jako potenciální energii hmotného bodu v daném místě pole, dělenou hmotností tohoto bodu - označení symbolem V .

$$V = E_p(m) / m \quad / \quad V = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \quad /$$

Stejně jako potenciální energie závisí na volbě místa kde je $E_p = 0$

Potenciál grav.pole hm.bodu m_1 ve vzdálenosti r od něj vyjádříme

$$V = - \kappa m_1 / r$$

Potenciál pole pro n hmotných bodů $V = - \{ \kappa m_i / r_i \}$.

Vztah mezi intenzitou a potenciálem gravitačního pole

Plyne z definice potenciální energie

$$dE_p = - \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} \quad \text{dělením hmotností dostaneme} \quad dV = - \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} .$$

Rovnici lze zapsat pomocí operace grad $\mathbf{K} = - \text{grad } V$

Známe-li intenzitu můžeme integrací $dV = - \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$ určit potenciál v místě r pole $V(r) = - \int^r \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$

Potenciál daného místa pole je roven záporně vzatému integrálu intenzity pole z místa kde volíme potenciál nulový, do místa jehož potenciál určujeme.

Siločáry pole . Ekvipotenciální plochy.