

Metoda per partes

Robert Mařík a Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

Metoda per partes	4
$\int (x + 1) \ln x \, dx$	4
$\int x \sin x \, dx$	12
$\int (x - 2) \sin(2x) \, dx$	18
$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$	25
$\int \ln x \, dx$	31
Vícenásobná per partes	37
$\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$	37
$\int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$	47
$\int \ln^2 x \, dx$	55

$$\int x^3 \sin x \, dx \dots\dots\dots 64$$

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} \, dx \dots\dots\dots 68$$

Řešení pomocí rovnice **72**

$$\int e^x \cos x \, dx \dots\dots\dots 72$$

Metoda per partes

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce \rightarrow per partes.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' =$$

$$v' = x + 1 \quad v =$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x + 1 \quad v = \frac{x^2}{2} + x$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x + 1 & v = \frac{x^2}{2} + x \end{array}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x + 1 & v = \frac{x^2}{2} + x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx \end{aligned}$$

Roznásobíme **závorku**.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x + 1 & v = \frac{x^2}{2} + x \end{array}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) + c$$

Dokončíme integraci.

Vypočtete $\int (x + 1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x + 1) \ln x \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x + 1 & v = \frac{x^2}{2} + x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) + c \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + c \end{aligned}$$

Vypočtete $\int x \sin x \, dx$

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \sin x & v = \end{array}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

kde $u = x$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

Upravíme.

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

Integruje druhou část: $\int \cos x \, dx = \sin x$

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

Funkce je součinem polynomu a sinu \rightarrow per partes.

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = \\ v' = \sin(2x) & v = \end{array}$$

Integrujeme per partes pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

kde $u = x - 2$ a $v' = \sin(2x)$.

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

Platí

$$v = \int v'(x) dx = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x),$$

protože

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad \text{a} \quad \int f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

Vypočtěte $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$u = x - 2$	$u' = 1$
$v' = \sin(2x)$	$v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Vypočtěte $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx = \begin{array}{l} u = x - 2 \quad u' = 1 \\ v' = \sin(2x) \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$
$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

Vytkneme konstantu $\left(-\frac{1}{2}\right)$ z integrálu.

Vypočtěte $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + c \end{aligned}$$

Platí $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x)$, protože

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \text{a} \quad \int f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b).$$

Vypočtete $\int (x - 2) \cdot \sin(2x) dx$

$$\int (x - 2) \sin(2x) dx =$$

$$\begin{array}{ll} u = x - 2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array}$$

$$= (x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) + c$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 2) \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + c$$

Upravíme.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Jedná se o součin polynomu a funkce arkustangens.

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$u = \operatorname{arctg} x \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v' = x \quad v = \frac{x^2}{2}$$

Budeme integrovat metodou per partes. Budeme integrovat polynom a derivovat arkustangens.

Vypočtete $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$u = \operatorname{arctg} x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = x$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$u = \operatorname{arctg} x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = x$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Racionální funkci, která není ryze lomená, dělíme:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - 1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$u = \operatorname{arctg} x$	$u' = \frac{1}{1+x^2}$
$v' = x$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

K dokončení zbývá integrovat jedničku a jeden parciální zlomek. To provedeme pomocí příslušných vzorců.

Vypočtete $\int \ln x \, dx$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \quad u' =$$

$$v' = 1 \quad v =$$

Funkci je součinem polynomu a logaritmické funkce:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Integrujeme per partes při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

Note: A yellow arrow points from $\ln x$ to x , and another yellow arrow points from $\frac{1}{x}$ to x .

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Užijeme vztah $\frac{1}{x}x = 1$.

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x \ln x - x + c$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x \ln x - x + c$$
$$= x(\ln x - 1) + c$$

Hotovo.

Vícenásobná per partes

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' =$$

$$v' = \sin x \quad v =$$

- Funkce je součinem polynomu a funkce sinus.
- Budeme integrovat per partes podle vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při volbě $u = (x^2 + 1)$ a $v' = \sin x$.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$(x^2 + 1)' = 2x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

(Note: In the original image, yellow arrows point from $x^2 + 1$ to $-\cos x$ and from $2x$ to $-\cos x$)

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Konstantní násobek 2 a znaménko minus dáme před integrál.

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' =$$

$$v' = \cos x \quad v =$$

Ještě jednou integrujeme per partes. Nyní $u = x$ a $v' = \cos x$.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$x' = 1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right) + c$$

Integrujeme sinus: $\int \sin x \, dx = -\cos x$

Vypočtete $\int (x^2 + 1) \sin x \, dx$

$$\int (x^2 + 1) \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad u' = 2x$$

$$v' = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = \cos x \quad v = \sin x$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1) \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right) + c$$

$$= (1 - x^2) \cos x + 2x \sin x + c$$

Upravíme.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

Integruje součin polynomu a exponenciální funkce.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

- Integrujeme per partes.
- Polynom budeme derivovat a exponenciálu integrovat.
- Nezapomeňme, že $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$$

$u = x^2 + 1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

Vzorec je

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

- Opět polynom krát exponenciální funkce.
- Opět integrujeme per partes. Opět derivujeme polynom.

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx)$$

Vzorec pro **červenou část** je $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, zbytek zůstane.

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

Vypočtete $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

$$\int (x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \quad \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$= -(x^2 + 1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c = -e^{-x}(x^2 + 2x + 3) + c,$$

Vytkneme $(-e^{-x})$.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

Vypočtete $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$u = \ln^2 x \quad u' =$$

$$v' = 1 \quad v =$$

- Je zde součin polynomu a druhé mocniny logaritmu.
- Upravíme funkci $\ln^2 x$ na součin $(1) \cdot (\ln^2 x)$ a integrujeme per partes při volbě $u = \ln^2 x$ a $v' = 1$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$v' = 1 \quad v = x$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$u = \ln^2 x$	$u' = \frac{2 \ln x}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \\ v' = 1 \quad v = \end{array}$$

Tento trik již známe: Napíšeme funkci $\ln x$ jako součin $(1) \cdot \ln x$ a integrujeme per partes při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + c$$

Dopočítáme integrál z jedničky.

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad u' = \frac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

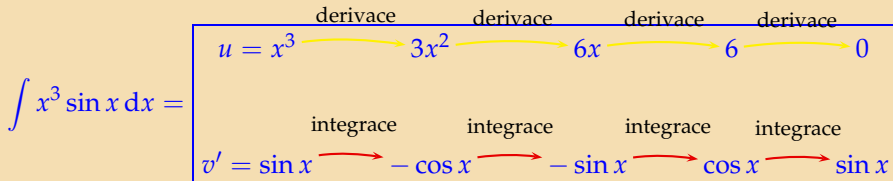
$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - x \right) + c$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

Upravíme. Hotovo.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.



- Třikrát integrujeme per partes, ale všechno zapíšeme do jednoho schématu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx =$$

$u = x^3$	$3x^2$	$6x$	6	0
	<i>součin</i>	<i>součin</i>	<i>součin</i>	<i>součin</i>
$v' = \sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx =$$

$u = x^3$	$3x^2$	$6x$	6	0
$v' = \sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$
$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin x + c$$

Upravíme.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

	derivace	derivace	derivace	derivace				
$u = x^3 + 2x$	\rightarrow	$3x^2 + 2$	\rightarrow	$6x$	\rightarrow	6	\rightarrow	0
$=$	integrace	integrace	integrace	integrace				
$v' = e^{-x}$	\rightarrow	$-e^{-x}$	\rightarrow	e^{-x}	\rightarrow	$-e^{-x}$	\rightarrow	e^{-x}

- Třikrát integrujeme per partes, ale všechno zapíšeme do jednoho schematu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

$u = x^3 + 2x$	$3x^2 + 2$	$6x$	6	0
	<i>součin</i>	<i>součin</i>	<i>součin</i>	<i>součin</i>
$v' = e^{-x}$	$-e^{-x}$	e^{-x}	$-e^{-x}$	e^{-x}

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x} + c$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

Najděte $\int (x^3 + 2)e^{-x} dx$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x} dx$$

$u = x^3 + 2x$	$3x^2 + 2$	$6x$	6	0
$v' = e^{-x}$	$-e^{-x}$	e^{-x}	$-e^{-x}$	e^{-x}

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 2x + 3x^2 + 2 + 6x + 6) + c$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 8x + 8) + c$$

Upravíme.

Řešení pomocí rovnice

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

Vypočtěte $\int e^x \cos x dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x dx$$

Integrujeme součin exponenciální a goniometrické funkce.

Vypočtete $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$u = e^x$	$u' = e^x$
$v' = \cos x$	$v = \sin x$

- Integrujeme per partes.
- Je jedno, jak zvolíme u a v' .

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$u = e^x$	$u' = e^x$
$v' = \cos x$	$v = \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Vzorec je

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Vypočtete $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \quad \begin{array}{ll} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}$$

- Opět součin exponenciální a goniometrické funkce.
- Integrujeme per partes, nyní musíme zachovat stejnou volbu u a v' .

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad \begin{array}{l} u = e^x \quad u' = e^x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$u = e^x$	$u' = e^x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx \right)$$

Vzorec pro **červenou část** je $\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$, zbytek zůstane.

Vypočtete $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

Po dvou per partes jsme se dostali zpátky k integrálu, který chceme spočítat.

Vypočtete $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

Řešíme jako rovnici s neznámým integrálem, proto jej převedeme na levou stranu. Připíšeme integrační konstantu.

Vypočtěte $\int e^x \cos x \, dx$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

Dělíme dvěma a dostáváme výsledek.

KONEC