10. Ověřování předpokladů parametrických testů

Normalita dat

- Normální rozložení vstupních dat – klíčový předpoklad pro použití parametrických metod
- Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (t-rozložení) a test tak může lhát
- Řešení:
- a) transformace dat
- b) neparametrické metody

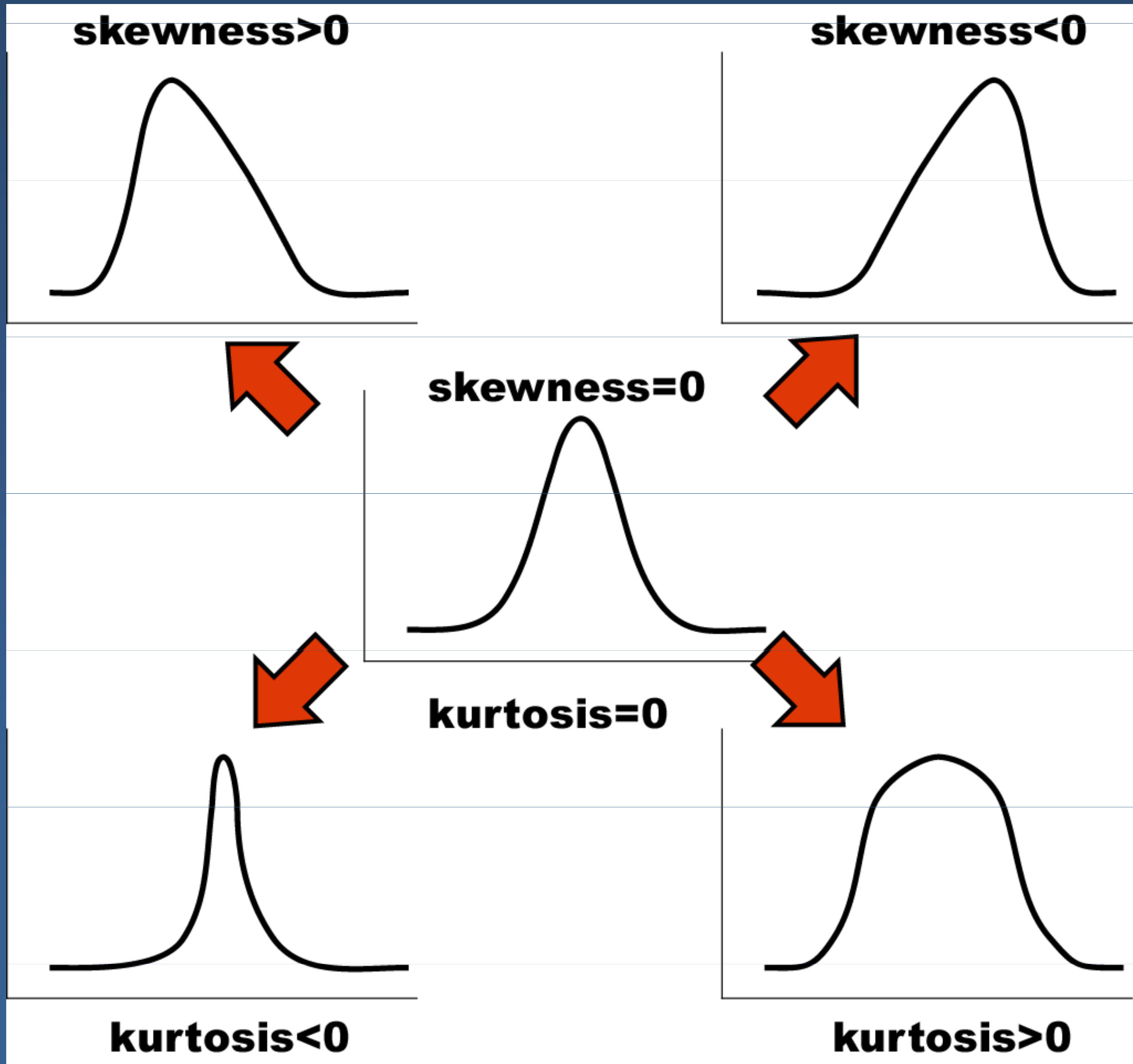
Parametrické a neparametrické testy

Typ srovnání	Parametrický test	Neparametrický test
2 skupiny dat nepárově	Nepárový t-test	Mann-Whitney test
2 skupiny dat párově	Párový t-test	Wilcoxonův test, znaménkový test
Více skupin nepárově	ANOVA	Kruskal-Wallis ANOVA
Korelace	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient

Testy normality

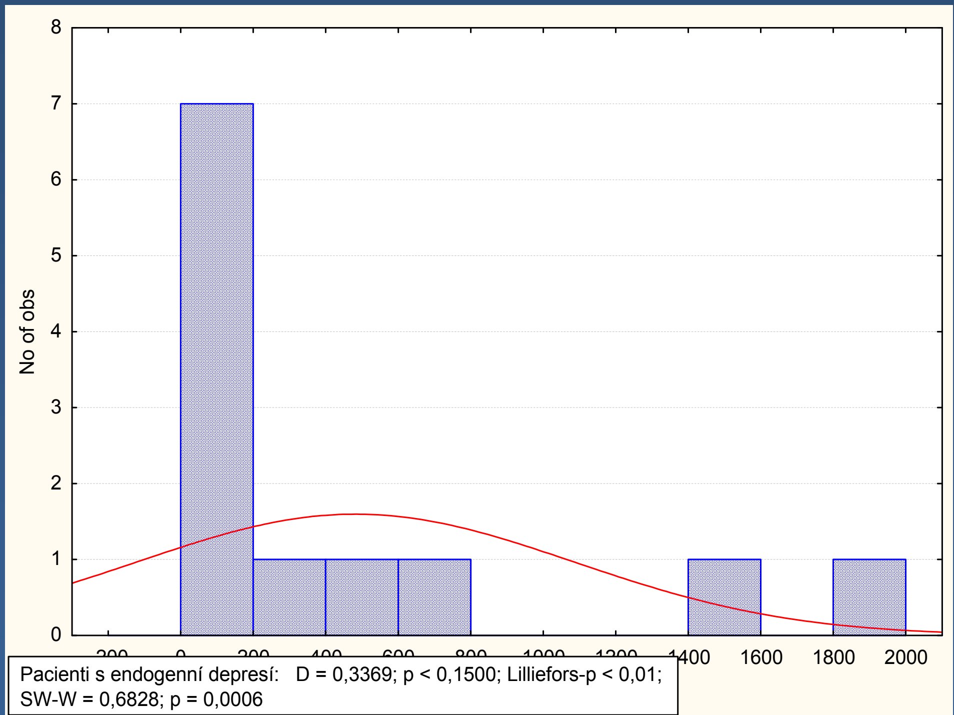
- H_0: není rozdíl mezi zpracovávaným rozložením a normálním rozložením
- Kombinovat test a grafickou reprezentaci zkoumaných dat
- Testy:
- Test dobré shody
- Kolmogorov-Smirnov test (K-S test, Lilieforsův test)
- Shapiro-Wilk’s test

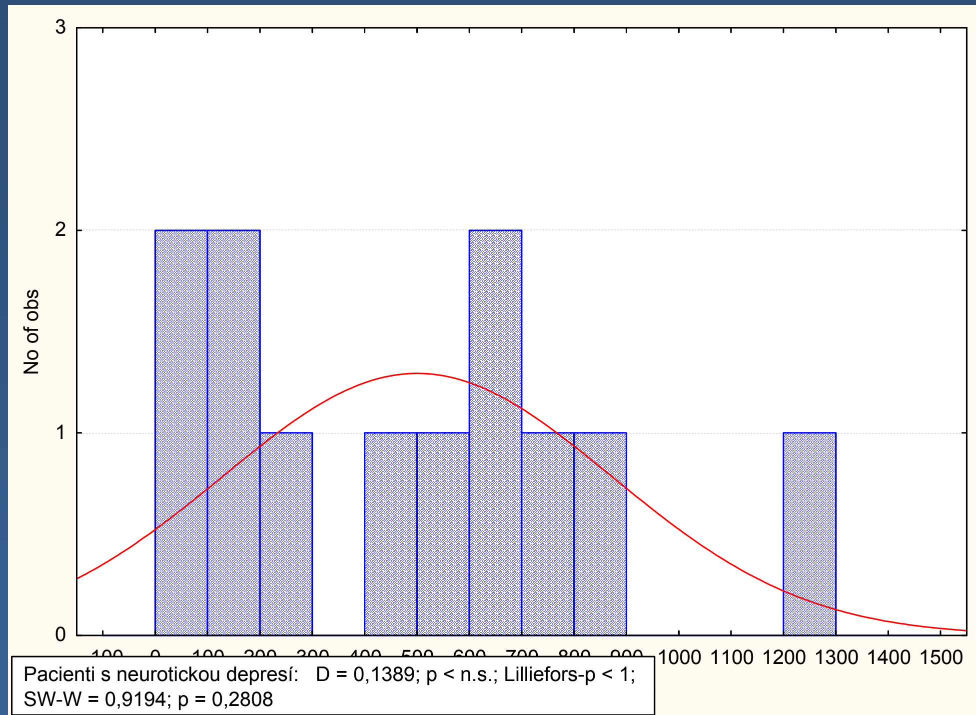
Šikmost a špičatost



Grafická diagnostika normality

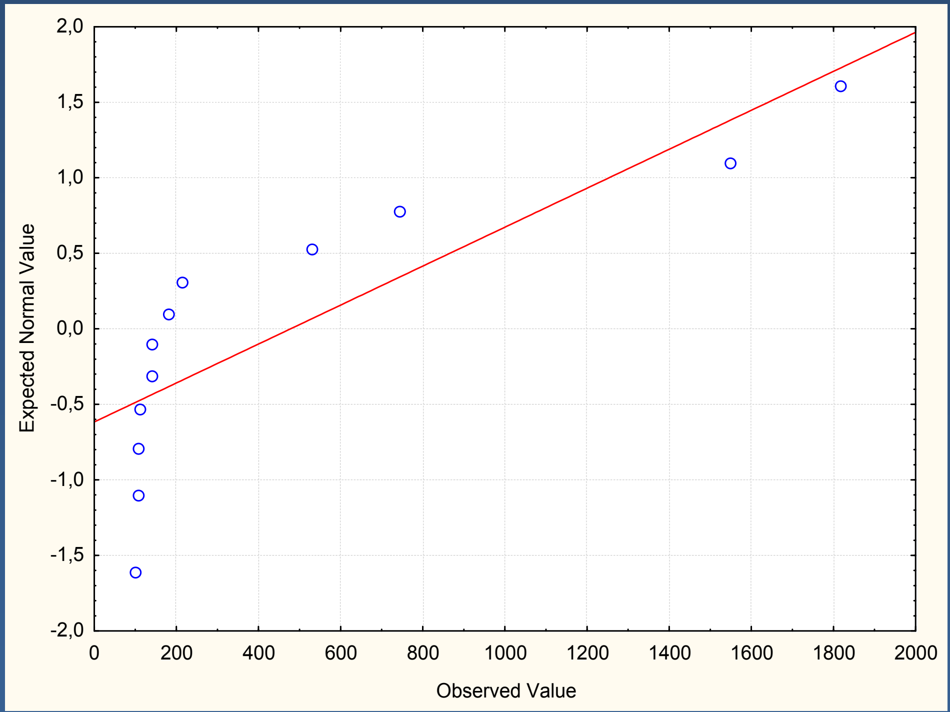
- histogram

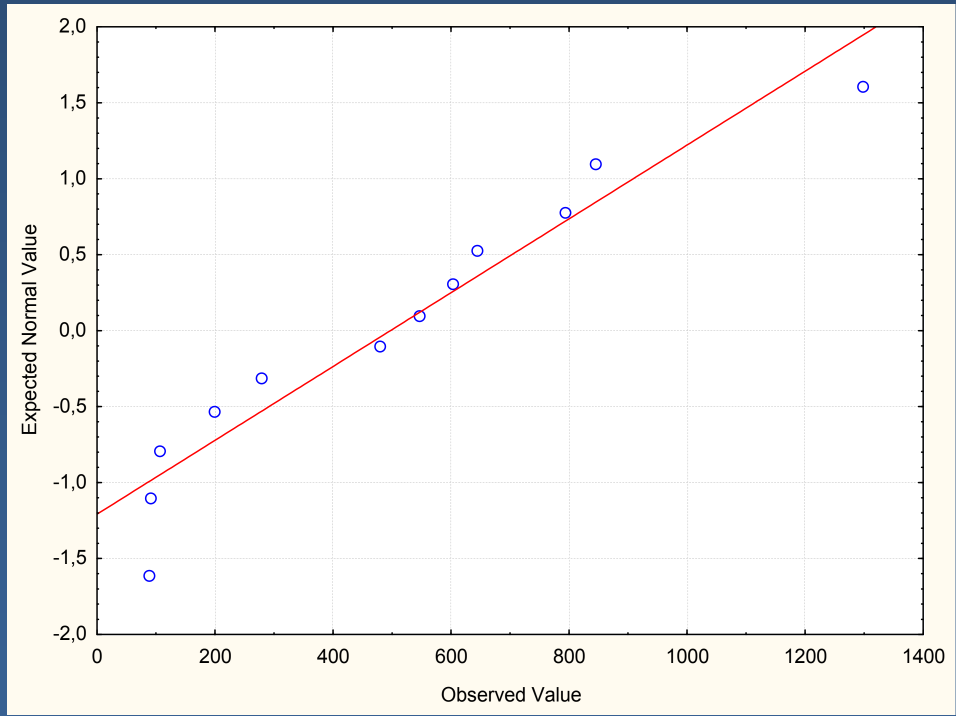




Grafická diagnostika normality

- Normální graf





Test shody rozptylů

- *F-test*
- H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$ v čitateli je větší z obou s^2!

- *F* má Fisher-Snedecorovo (F) rozdělení se dvěma parametry: stupni volnosti čitatele a jmenovatele
- H_0 zamítáme pro $F \geq F_{\alpha, df_1, df_2}$

11. Neparametrické metody

Neparametrické metody

- Parametrické metody – předpoklady o rozložení dat
- Neparametrické metody – nepředpokládají konkrétní rozložení
- Pro data nevyhovující předpokladům parametrických metod
- Ordinální data, pořadí nebo četnosti
- Mohou vyžadovat velmi obecné předpoklady na rozložení dat výběru – např. symetrie
- Slabší než odpovídající parametrické testy

Pořadí

- Reálná čísla uspořádaná podle velikosti $x_1, x_2, \dots x_n$
- Pro různá čísla je pořadí čísla x_i dáno indexem i
- Pořadí R_i udává počet čísel $x_1, x_2, \dots x_n$, která jsou menší nebo rovna číslu x_i

Vzestupně uspořádané hodnoty x_i	-2	0	5	7	18
Pořadí R_i	1	2	3	4	5

- Čísla $x_1, x_2, \dots x_n$ nejsou různá, vytvářejí shody => průměrné pořadí

Vzestupně uspořádané hodnoty x_i	-5	-5	0	0	0	10	21	21
Očíslování hodnot x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pořadí R_i	1,5	1,5	4	4	4	6	7,5	7,5

Kvantilový test

H$_0$: $x_q = c$

- *100q%* kvantil základního souboru x_q je roven konstantě c
- Z rozsahu výběru n stanovíme počet členů m, kde $x<c$ (odstranit hodnoty rovny c a zmenšit n)

$$Z = \frac{m - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \sim N(0,1)$$

- Předpoklady: $n > 30$ a $0{,}10 < q < 0{,}90$

Kvantilový test

$$H_1 : x_q \neq c$$

- Kritická hodnota: $z_{1-\alpha/2}$ = kvantil standardizovaného normálního rozložení
- H_0 zamítáme pro $|Z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$H_1 : x_q > c$$

- Kritická hodnota: z_{α}
- H_0 zamítáme pro $Z \leq z_{\alpha}$

$$H_1 : x_q < c$$

- Kritická hodnota: $z_{1-\alpha}$
- H_0 zamítáme pro $Z \geq z_{1-\alpha}$

Mediánový test

- $q = 0{,}50$

$$Z = \frac{2m - n}{\sqrt{n}}$$

Mediánový test - příklad

Ve skupině 49 chlapců ve věku 9,5-10 let dispenzarizovaných v roce 1960 po dobu nejméně čtyř let pro jisté onemocnění bylo nalezeno 27 chlapců menších než 138,5 cm, kde 138,5 cm je zjištěný průměr tělesné výšky v populaci chlapců stejného věku při celostátním šetření. Ověřte na 5% hladině významnosti, zda u nemocných dětí je průměrná výška menší než v odpovídající věkové skupině zdravých dětí.

Řešení: H_0: $x_{0,50} = 138,5$; H_1: $x_{0,50} < 138,5$

$$Z = \frac{2 \cdot 27 - 49}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7} = 0,714$$

Pro jednostrannou alternativu a α=0,05 je kvantil $z_{1-\alpha}$=1,645

Na 5% hladině významnosti nelze zamítnout nulovou hypotézu => naše pozorování neprokázalo, že onemocnění brzdí růst dětí

Znaménkový test

- Mediánový test pro rozdíly párových pozorování
- Jednoduchý, ale velmi slabý
- Pro alespoň ordinální stupnici
- Testová statistika: počet znamének vyskytujících se méně často nebo stejná jako pro mediánový test

Znaménkový test - příklad

U skupiny 15 dětí byla měřena frekvence mrkání oka v klidové situaci (při volné hře) a při sledování napínavého televizního programu. Máme rozhodnout, zda při sledování napínavého televizního programu je frekvence mrkání oka vyšší než v klidové situaci.

Dítě číslo	Frekvence mrkání oka		Změna
	V klidu	Při sledování TV	
1	10	11	+
2	8	10	+
3	9	8	-
4	15	14	-
5	12	13	+
6	13	15	+
7	11	13	+
8	14	12	-
9	10	11	+
10	11	13	+
11	12	14	+
12	13	14	+
13	17	16	-
14	16	19	+
15	12	15	+

H_0: mezi frekvencí mrkání oka v klidové situaci a frekvencí mrkání oka při sledování napínavého programu není rozdíl ($x_{0,50} = 0$)
H_1: Frekvence mrkání oka je při sledování napínavého televizního programu vyšší než v klidové situaci ($x_{0,50} > 0$)

$$Z = \frac{2 \cdot 4 - 15}{\sqrt{15}} = -\frac{7}{3,87} = -1,81$$

$\alpha = 0,05$; $z_\alpha = -1,645$
$Z = -1,81 < -1,645$ => zamítáme H_0

Wilcoxonův párový test

- Obdoba párového t-testu
- Při nesplnění předpokladu normality rozdílů
- H_0: medián rozdílů je nulový (není systematická diference uvnitř párů)
- H_1: medián rozdílů je různý od nuly (je systematická diference uvnitř párů)
- Stanovení rozdílů, přiřazení pořadí bez ohledu na znaménko
- Testová statistika = $\min(T_+, T_-)$ – T_+ - součet kladných pořadí, T_- - součet záporných pořadí

Wilcoxonův párový test

- Oboustranný test: H_0 zamítáme
- pro $\min(T_+, T_-) < T_{\alpha,n}$

Wilcoxonův párový test - příklad

Osmi rostlinám tabáku byl odebrán druhý list. Jedna náhodně vybraná polovina listu byla ošetřena přípravkem A, druhá přípravkem B. Potom byly listy potřeny suspenzí agresora a byl sledován počet skvrn na každé polovině.

Rostlina	Počet skvrn		Rozdíl
	Přípravek A	Přípravek B	
1	9	10	-1
2	17	11	6
3	31	18	13
4	18	14	4
5	7	6	1
6	8	7	1
7	20	17	3
8	10	5	5

$T_- = 2$

$T_+ = 34$

$\min(T_-, T_+) = 2$

Uspořádáme rozdíly:

Uspořádané rozdíly	1	-1	1	3	4	5	6	13
Pořadí rozdílů	2	2	2	4	5	6	7	8

Počet nenulových rozdílů je n = 8; pro α = 0,05 je kritická hodnota 3
min(T-,T+) = 2 < 3 => zamítáme hypotézu stejné účinnosti přípravků A a B

Mann-Whitney U test

- Někdy název dvouvýběrový Wilcoxonův test
- Obdoba dvouvýběrového t-testu
- H_0: rozdělení obou skupin je shodné
- H_1: rozdělení obou skupin se liší
- Kombinace obou výběrů, vzestupné seřazení hodnot, stanovení pořadí jednotlivých pozorování, stejným hodnotám dáváme průměrné pořadí

Mann-Whitney U test

$$U_1 = S_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$U_2 = S_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

- S_i – součet pořadí v souboru *i*
- n_i – počet prvků v souboru *i*
- $U_1 + U_2 = n_1 n_2$
- $min(U_1, U_2)$ porovnáváme s kritickou hodnotou
- Pro $min(U_1, U_2)$ < kritická hodnota zamítáme H_0

Mann-Whitney U test

- Pro $n_1 > 30$ a $n_2 > 20$ lze použít normální aproximaci

$$Z = \frac{U_1 - \frac{1}{2} n_1 n_2}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}}$$

- Kritickou hodnotou je kvantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ standardizovaného normálního rozdělení
- H_0 zamítáme pro $|Z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Mann-Whitney U test - příklad

Výkon 18 gymnastek byl ohodnocen stanovením jejich pořadí od nejlepší (pořadí 1) po nejslabší (pořadí 18). V této skupině bylo n_1 = 11 žákyň trenérky A a n_2 = 7 žákyň trenérky B. Na základě výsledků (pořadí) shrnutých v tabulce se má posoudit nulová hypotéza H_0: „účinnost výukových metod obou trenérek se neliší“

Trenérka:

A	B
1	2
4	3
5	6
7	9
8	12
10	15
11	18
13	
14	
16	
17	

n_1 = 11
n_2 = 7
S_1 = 106
S_2 = 65

$$U_1 = S_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 106 - \frac{11 \cdot 12}{2} = 40$$

$$U_2 = n_1 n_2 - U_1 = 77 - 40 = 37$$

$Min(U_1, U_2) = 37$
$U_{0,05}(7,11) = 16$
37 > 16 => nelze zamítnout H0, že účinnost výukových metod obou trenérek se neliší