Radiologická fyzika

základy diferenciálního počtu

derivace a tečny, integrály a plochy

diferenciální rovnice

podzim 2008, pátá přednáška

Derivace a tečny

aneb

matematika

„libovolně malých“ změn

Nejen velké, ale i malé změny „jsou život“
aneb
opravdu potřebujeme diferenciální počet?

Zkuste si představit situaci: Sedíte v místnosti, kde tikají hodiny. Za chvíli je nevnímáte. Ale hned si uvědomíte, kdyby se zastavily.

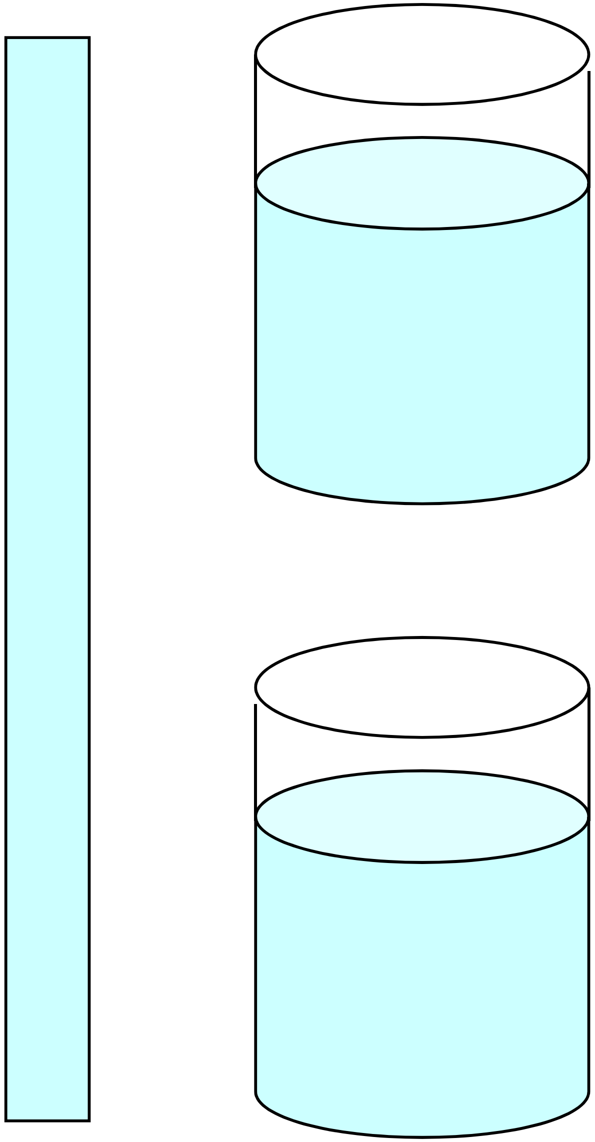
Nebo: Máte dlaň položenou na stole v klidu. Za chvíli nic nehmatáte. Abyste hmat „oživili“, musíte prsty po stole posunout.

Organismus reaguje na časovou změnu.

Abychom jeho chování (a další jevy související se změnami) pochopili, potřebujeme aparát k počítání s malými změnami.

Batesonův pokus se žábou

rychlé zahřívání nádoby s vodou a žábou:
žába změnu pozná a vyskočí



pomalé zahřívání nádoby s vodou a žábou:
žába změnu nepozná a uvaří se

Batesonův zákon

Bateson – Ehrenberg

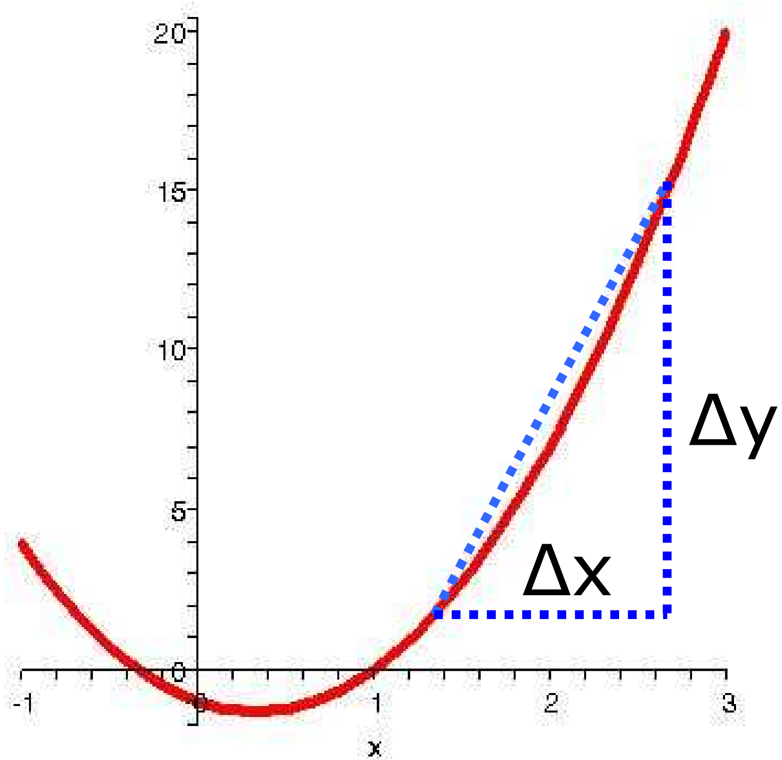
Organismus reaguje na časovou změnu (derivaci) vnímaných počitků.

„Matematizace“:

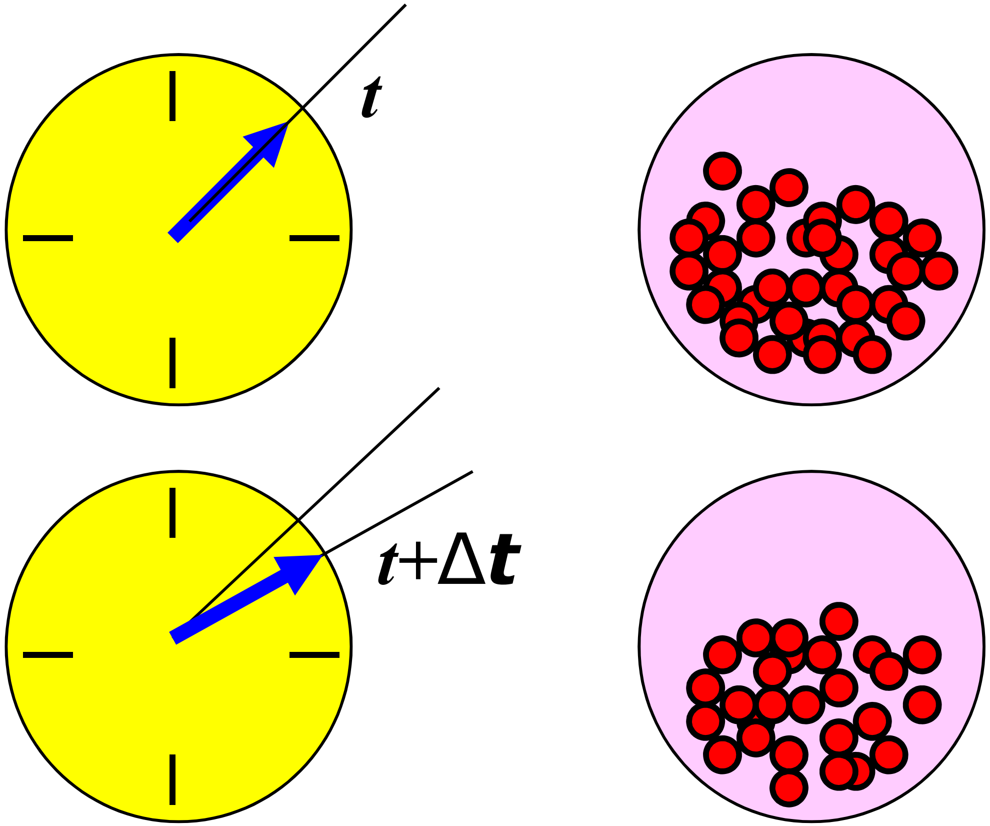
P … signál, podnět
(vnímaný počitek)

R **…** odezva, reakce

$$\langle R \rangle = \frac{\Delta P}{\Delta t} \cdots R = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$$

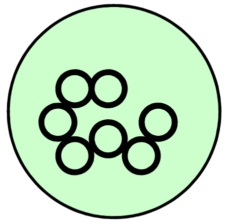


Rozpad jader



$N \sim 4{,}8\cdot10^{22}$ **na 1 cm^3**

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$



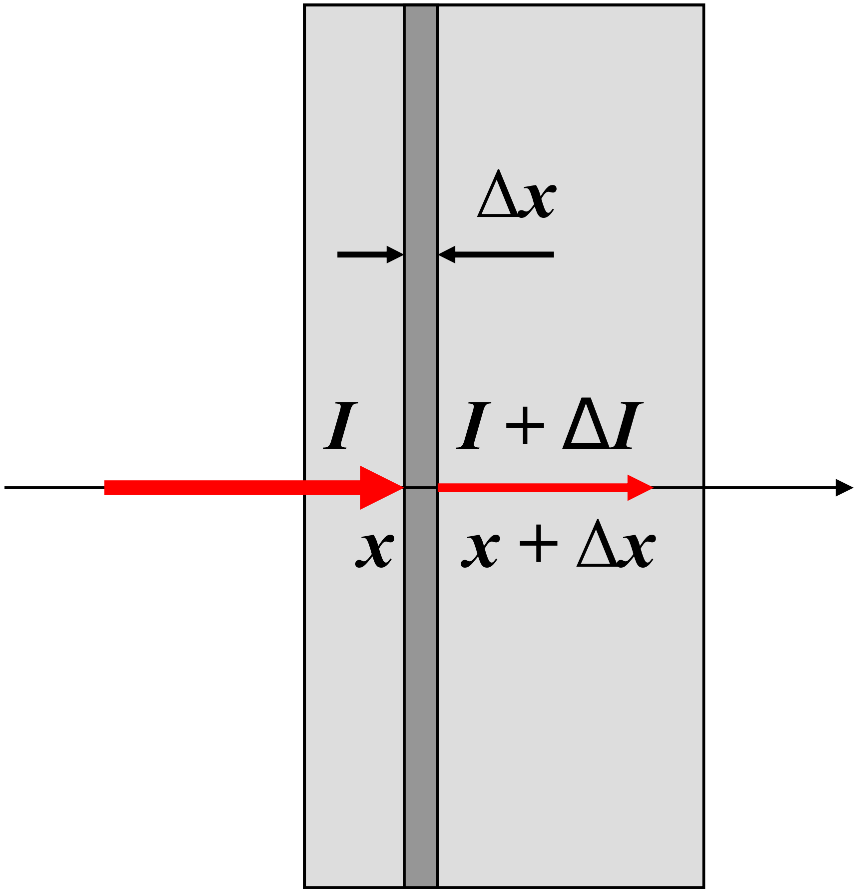
$N + \Delta N$

$\Delta N \sim -2{,}4\cdot10^{5}$ **na 1 cm^3**

$\Delta t = 1$ **s**

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N,\ \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t),\ \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},\ \tau_{1/2} = 4{,}47\cdot10^{9}\ \text{let}$$

Absorpce záření



$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\mu I, \quad \frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = -\mu I(x)$$

$$\mu = \frac{\ln 2}{d_{1/2}}, \quad d_{1/2} = \text{polotloušťka}$$

$$I(d_{1/2}) = \frac{1}{2} I(0)$$

Přírodní zákony - příklady

Klasická mechanika – Newtonův druhý pohybový zákon

$$m\vec{a} = F(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Klasická elektrodynamika – zákon elektromagnetické indukce

$$U_{\text{indukované}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \quad \Phi\ldots \text{indukční tok}$$

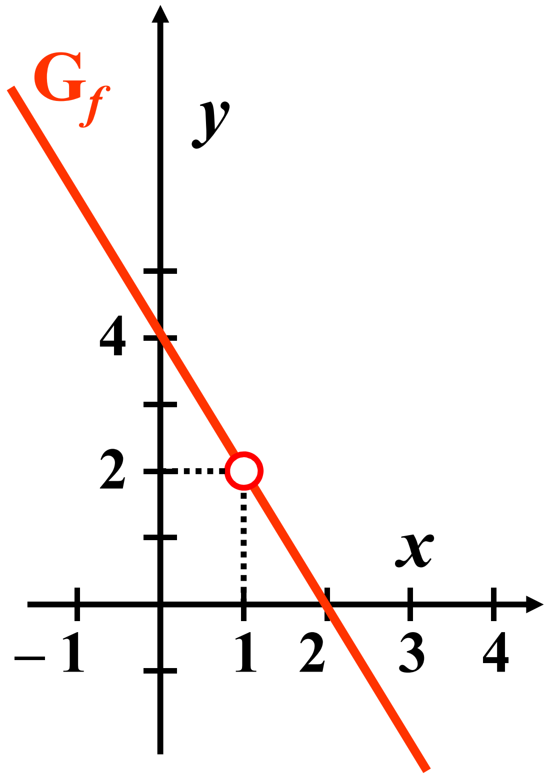
Kvantová mechanika – časový vývoj systému

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad H\ldots \text{operátor energie}, \ \psi\ldots \text{stav}$$

Příroda nás informuje o změnách. Zákony přírody nejčastěji představují chování časových a prostorových změn veličin.

Je tedy dobré umět se změnami počítat?

Jak se dělí nula nulou



$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x-1},\ \mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = -2x + 4 \quad \text{pro} \quad x \in \mathrm{D}_f$$

„Pokus“ o dělení nulou

x	**1,200**	**1,100**	**1,050**	**1,020**	**1,110**	**1,005**	**1,002**	**1,001**
$f(x)$	**1,600**	**1,800**	**1,900**	**1,960**	**1,980**	**1,990**	**1,996**	**1,998**

x	**0,800**	**0,900**	**0,950**	**0,980**	**0,990**	**0,995**	**0,998**	**0,999**
$f(x)$	**2,400**	**2,200**	**2,100**	**2,040**	**2,020**	**2,010**	**2,004**	**2,002**

Co si myslíte o možnosti dělení nulou? Jde to provést, nebo se tomu lze za určitých podmínek „přiblížit“?

Limitní chod

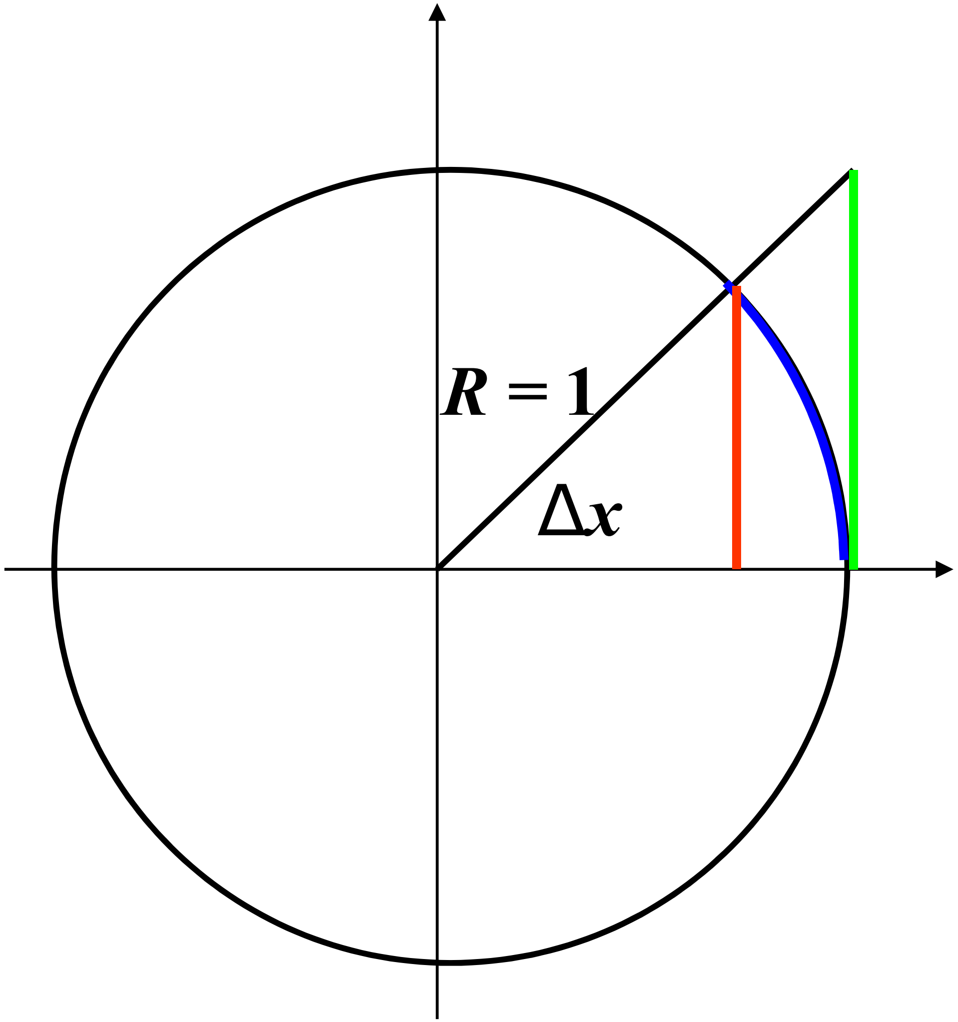
Nulou dělit nelze. Je-li například funkce ***h*(*x*),** jmenovatelem podílu ***p*(*x*) = *g*(*x*) / *h*(*x*)**, a ***h*(*x*)** pro určitou hodnotu ***a*** proměnné ***x*** nabývá nuly, nelze hodnotu ***a*** do zlomku dosadit (nedal by se vyčíslit).

Viděli jsme ale, že když se ve zlomku ***p*(*x*)** blíží k nule jak čitatel, tak jmenovatel, může se stát, že se hodnota zlomku blíží k jistému definovanému číslu ***L***.

Číslo ***L*** se pak nazývá limitou funkce ***p*(*x*)** a píšeme

$$\lim_{x \to a} p(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = L, \quad \text{obecně} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Jedna důležitá limita



$$\sin \Delta x \le \Delta x \le \tan \Delta x \Rightarrow$$

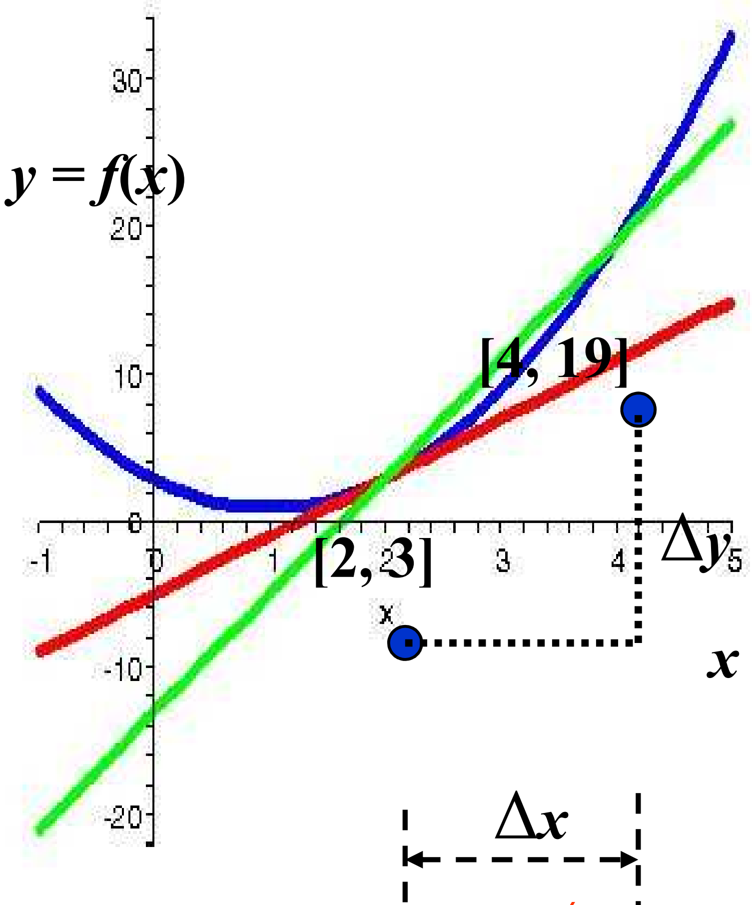
$$\frac{1}{\sin \Delta x} \ge \frac{1}{\Delta x} \ge \frac{\cos \Delta x}{\sin \Delta x}$$

$$1 \ge \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \ge \cos \Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} 1$$

$$\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

Problém tečny a derivace



$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad a = 2$$

$$s \cdots \text{sečna:} \quad y = 8x - 13$$

$$t \cdots \text{tečna:} \quad y = 4x - 5$$

$$\measuredangle(s, x) = \beta, \quad \measuredangle(t, x) = \alpha, \quad \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \beta$$

$$\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

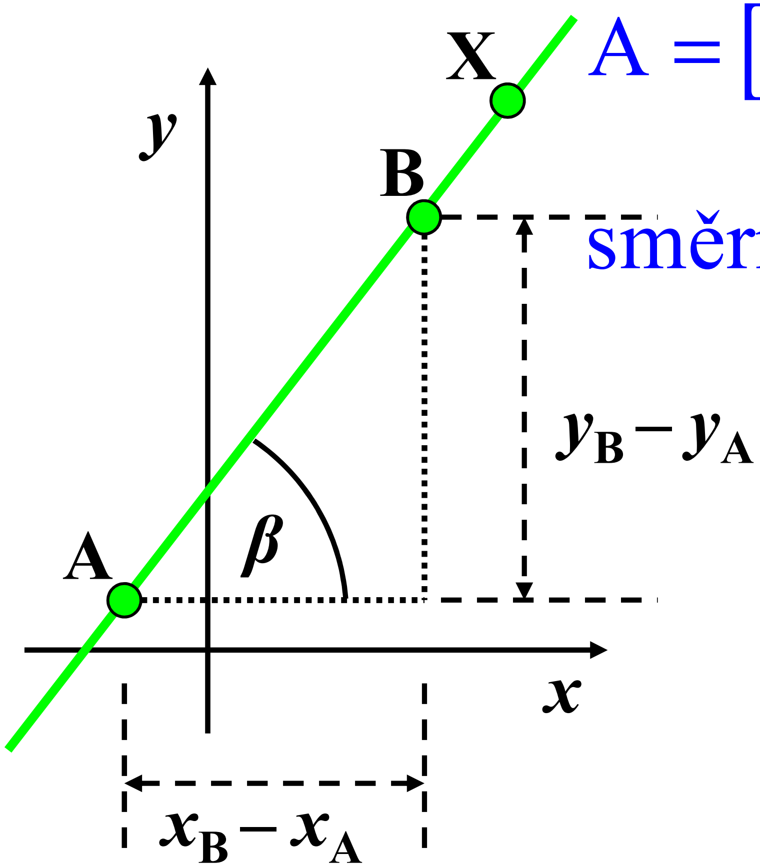
$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Hodnota $f'(x)$ určená předchozí limitou, je derivace funkce $f(x)$ v bodě x.

Chápeme-li x jako proměnnou, je $f'(x)$ funkce.

Směrnice tečny ke grafu závisí na bodu dotyku.

Výpočet směrnice a rovnice přímky



$$A = [x_A, y_A], \quad B = [x_B, y_B], \quad X = [x, y]$$

$$\text{směrnice} \cdots \tan\beta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A},$$

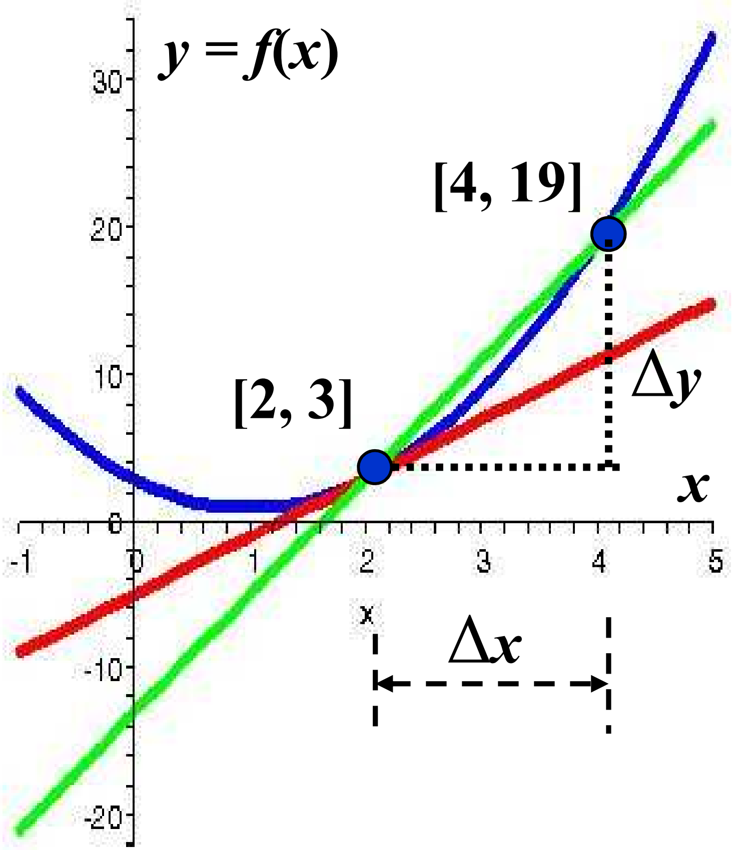
$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

pro sečnu z předchozího obrázku:

$A = [2, 3]$, $B = [4, 19]$

$$y - 3 = \frac{19 - 3}{4 - 2}(x - 2) \Rightarrow y = 8x - 13$$

Výpočet směrnice a rovnice tečny



$$A=[x,f(x)],\quad B=[x+\Delta x,f(x+\Delta x)]$$

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{[2(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+3]-[2x^2-4x+3]}{\Delta x}=$$

$$=\frac{4x\Delta x-4\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}(4x-4+2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=4x-4$$

$$\text{pro}\quad x=2\quad \text{je}\quad \tan\alpha=4$$

Sami dokončete výpočet rovnice tečny, když nyní znáte směrnici.

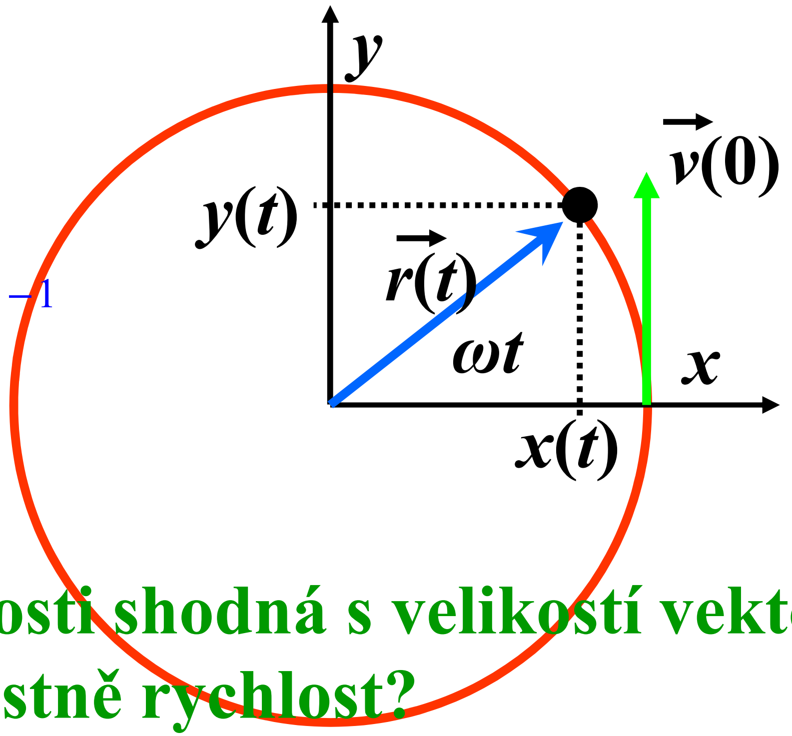
Derivace a fyzika

Příklad: S rovnoměrným pohybem po kružnici se již každý jistě setkal, třeba na řetízkovém kolotoči. Takový pohyb koná například i odstředivka používaná ve zdravotnických zařízeních. Řekněme, že nějaké tělísko obíhá ve vzdálenosti $\boldsymbol{R} = 1{,}0$ m od osy kolotoče a že jeden oběh trvá $\boldsymbol{T} = 4{,}0$ s. Závislost polohy tělíska na čase pak lze vyjádřit například takto:

$$x(t) = R\cos\omega t,\ y(t) = R\sin\omega t,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2},\ v = \omega R = 1{,}57\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

$v \cdots$ obvodová rychlost



Je získaná hodnota obvodové rychlosti shodná s velikostí vektoru rychlosti daného bodu? Co je to vlastně rychlost?

Průměrná rychlost za dobu Δt

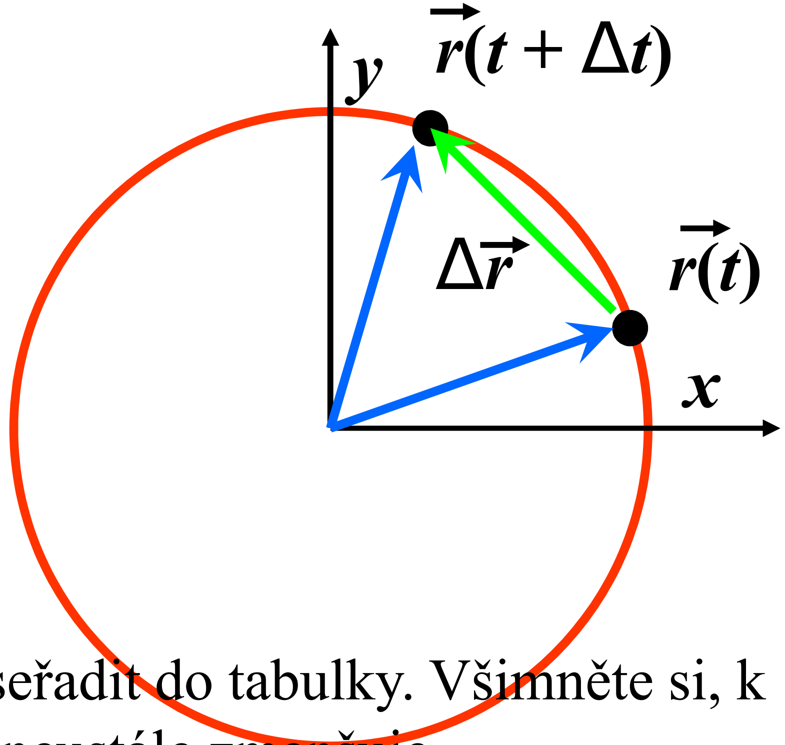
$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}(t+\Delta t) - \cos\frac{\pi}{2}t}{\Delta t}, \frac{\sin\frac{\pi}{2}(t+\Delta t) - \sin\frac{\pi}{2}t}{\Delta t} \right)$$

$$|\langle\vec{v}\rangle| = \sqrt{\langle v_x\rangle^2 + \langle v_y\rangle^2}, \tan\beta = \frac{\langle v_y\rangle}{\langle v_x\rangle}$$

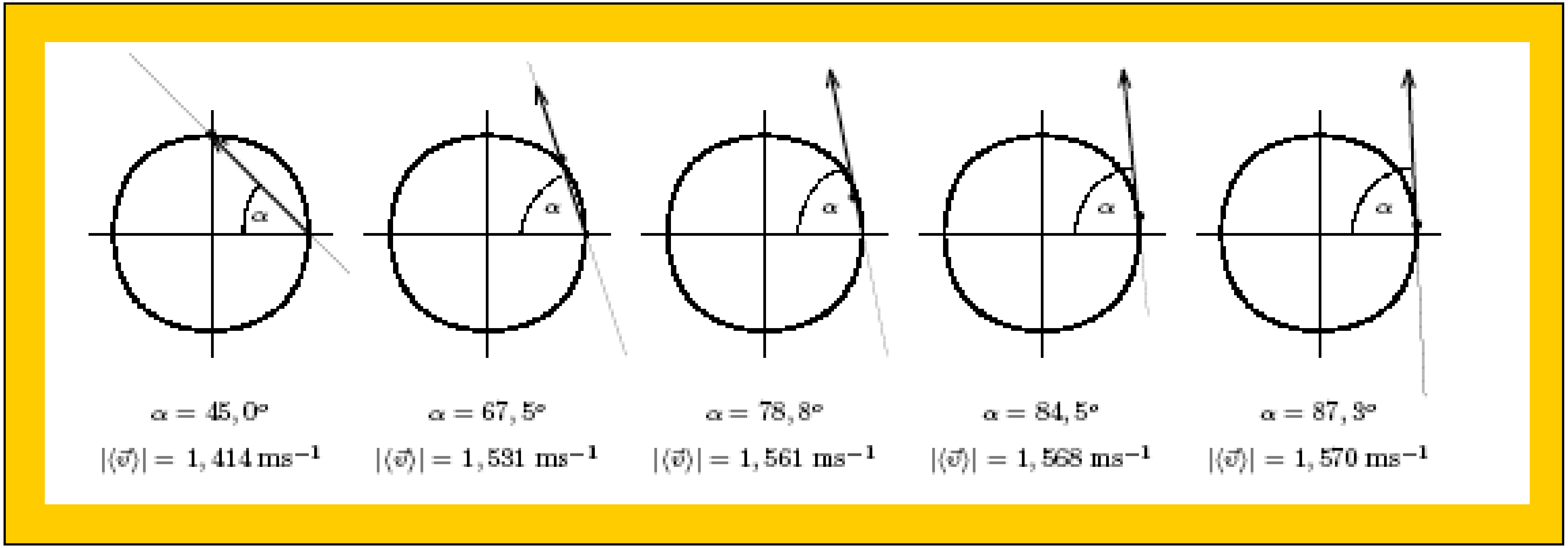
$t = 0$ s, $\quad \Delta t$ je postupně

$$1\text{ s}, \frac{1}{2}\text{ s}, \frac{1}{4}\text{ s}, \frac{1}{8}\text{ s}, \frac{1}{16}\text{ s}$$



Úkol: Zkuste si sami velikosti průměrných rychlostí a jejich úhly $\boldsymbol{\alpha}$ s osou x vypočítat a seřadit do tabulky. Všimněte si, k jakým hodnotám se blíží, když se interval $\boldsymbol{\Delta t}$ neustále zmenšuje.

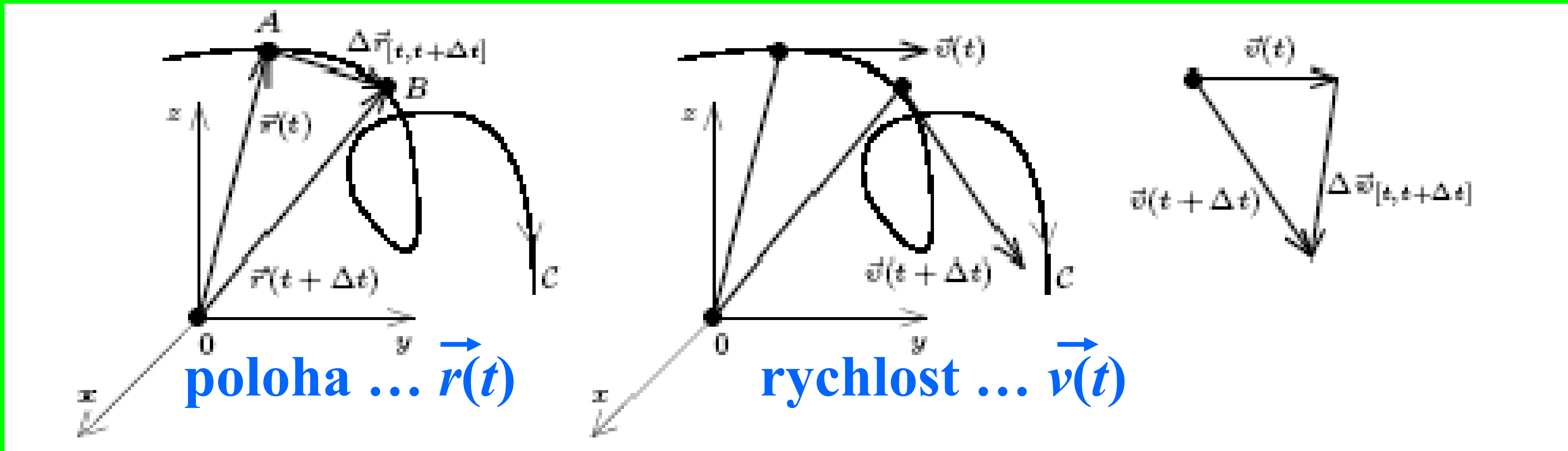
Průměrná rychlost ve zmenšujícím se intervalu



A tady jsou výsledky řešení Vašeho úkolu.

Okamžitá rychlost jako limita

Pohyb hmotného bodu po prostorové křivce



$$\text{rychlost} \cdots \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\text{zrychlení} \cdots \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Příklady odvození derivací

Příklad 1: $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ Metoda vykrácení nepohodlného výrazu

$$\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\cancel{\Delta x}\,[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]}{\cancel{\Delta x}} \xrightarrow{\Delta x \to 0} 3x^2$$

Příklad 2: $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x + \tfrac{\Delta x}{2}) \xrightarrow{\Delta x \to 0} \cos x$$

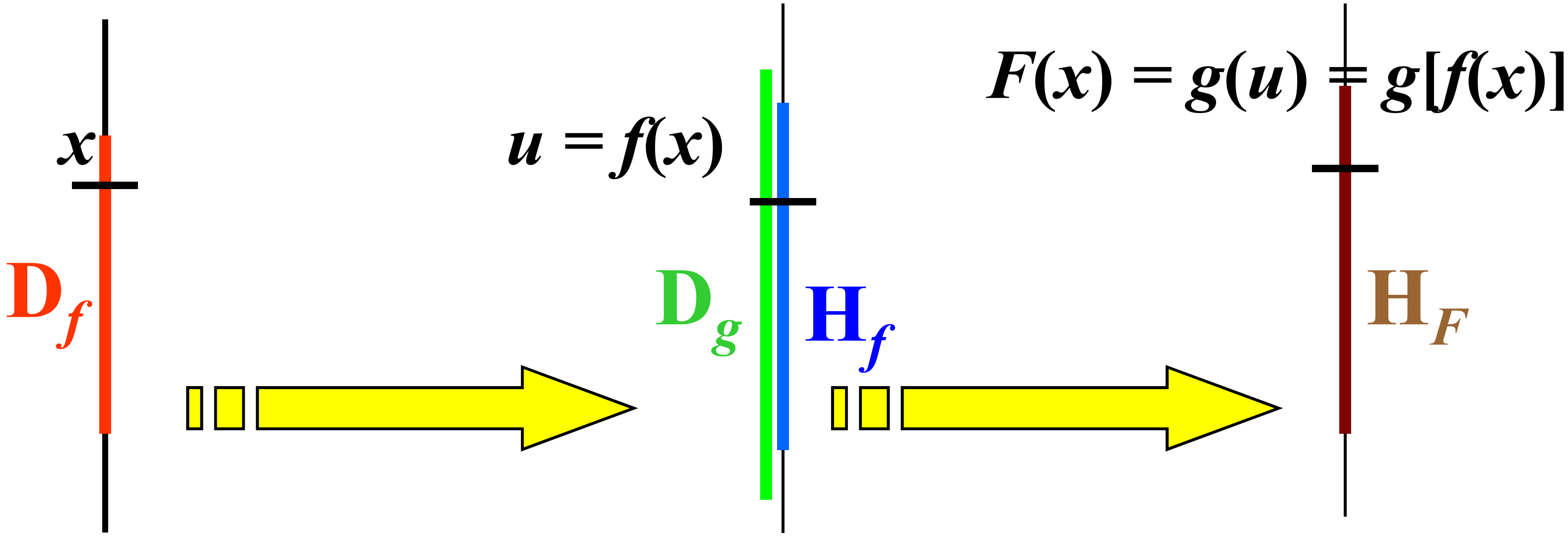
Derivace elementárních funkcí

(1)	$f(t) = t^n$,	$f'(t) = nt^{n-1}$,	$n \in \mathcal{R}$ libovolné	
(2)	$f(t) = \sin t$,	$f'(t) = \cos t$,		
	$f(t) = \cos t$,	$f'(t) = -\sin t$,		
(3)	$f(t) = e^t$,	$f'(t) = e^t$;	$f(t) = a^t$,	$f'(t) = a^t \ln a$,
	$f(t) = \ln t$,	$f'(t) = \dfrac{1}{t}$;	$f(t) = \log_a t$,	$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln a}$,

Pravidla pro derivování

(4)	$[f(t) \pm g(t)]' = \quad f'(t) \pm g'(t) \ ,$
(5)	$[f(t)g(t)]' = \quad f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \ ; \quad [k\ f(t)]' = k\ f'(t) \ , \ k = \mathrm{konst.} \ ,$
(6)	$\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right]' = \quad \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2} \ ,$
(7)	$F(t) = g[f(t)] \ , \quad F'(t) = g'[f(t)] \cdot f'(t) \ .$

Pravidlo pro složenou funkci

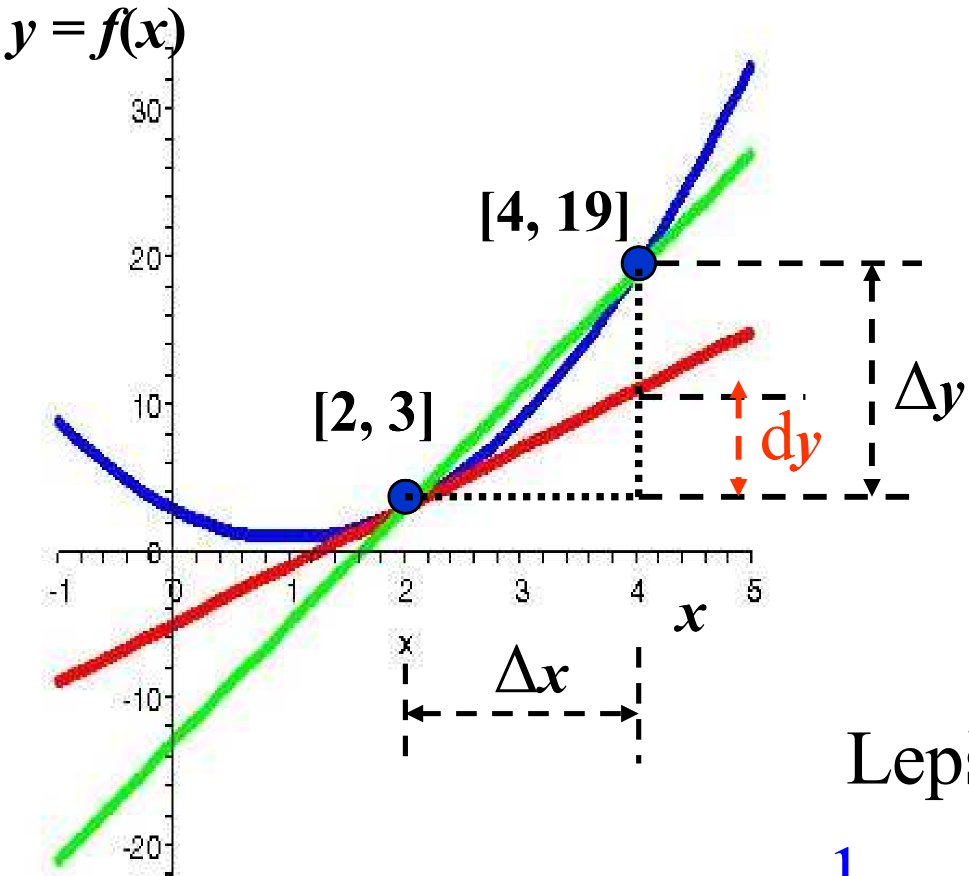


$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$g'(u)\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \Rightarrow g'[f(x)]\cdot f'(x)$$

Odhady změn hodnot funkce

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad x = 2, \quad \square\,(t, x) = \alpha, \quad \tan\alpha = f\,'(a) = 4$$



$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$f^{/}(x)\Delta x + \text{chyba odhadu}$$

$$\Delta x \cdots \mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y = f\,'(x)\,\mathrm{d}x$$

úplný diferenciál funkce v bodě x

Lepší odhady : Taylorův rozvoj

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f^{/}(x)\Delta x + \frac{1}{2} f^{//}(x)\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\Delta x^n + \cdots$$

Dva příklady na odhady

Příklad 1. Určete přibližnou hodnotu čísla $2{,}03^5$.

$$f(x)=x^5,\ x=2,\ \Delta x=0{,}03,\ f'(x)=5x^4\,|_{x=2}=80,\ f''(x)=20x^3\,|_{x=2}=160$$

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2+\cdots$$

$$\approx 2^5+80\cdot 0{,}03+160\cdot 0{,}0009=32+2{,}4+0{,}144\approx 34{,}5$$

Příklad 2. Určete přibližnou hodnotu sin 3°.

$$f(x)=\sin x,\quad x=0,\quad \Delta x=3^{\circ}=0{,}052\ \mathrm{rad}$$

$$f'(x)=\cos x\,|_{x=0}=1,\ f''(x)=\sin x\,|_{x=0}=0,\ f'''(x)=-\cos x\,|_{x=0}=-1$$

$$\sin\Delta x\approx \Delta x-\frac{1}{3!}\Delta x^3+\frac{1}{5!}\Delta x^5-\cdots$$

Několik úloh na derivace a tečny

Úloha 1. Odvoďte pravidlo pro derivaci funkcí $\boldsymbol{x^4}$, $\boldsymbol{x^5}$, $\boldsymbol{x^n}$. Pro $\boldsymbol{x^n}$ použijte binomickou větu.

Úloha 2. Vypočtěte derivace následujících funkcí

$$F(x) = \frac{\sqrt{\cos^2\sqrt{x^2-1} - \sin^2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$F(x) = \ln[\cos^2\sqrt{x^2+1}]$$

Úloha 3. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sin^2 \boldsymbol{x}$ v bodě $\boldsymbol{t} = \pi/4$.

Integrály a plochy

aneb

jak zjistit funkci z její derivace

Obrácená úloha mechaniky
aneb
od zrychlení k trajektorii

Základní zákon mechaniky – druhý Newtonův zákon – umožňuje vyjádřit zrychlení hmotného bodu na základě sil, jimiž na hmotný bod působí okolní objekty.

Zrychlení je však derivací rychlosti, a ta je derivací polohy. Abychom zjistili funkci, která popisuje závislosti polohy hmotného bodu na čase, musíme nějakou zpětnou procedurou najít, jak vypadala funkce, než jsme ji zderivovali.

Opačná procedura k derivování, tj. nalézání původní (primitivní) funkce, se nazývá integrování.

Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Předpokládejme, že na intervalu [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] je definována funkce $\boldsymbol{f(x)}$, která je spojitá (její limita v každém bodě existuje a je rovna funkční hodnotě, graf funkce není „potrhaný“). Funkce $\boldsymbol{F(x)}$ definovaná na intervalu ($\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$) obsahujícím [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$], a taková, že její derivace na intervalu [$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$] je rovna $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$, je **primitivní funkcí (neurčitým integrálem) k funkci $f(x)$ na [a, b].**

Příklad: Funkce $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ je definována na **R.** Funkce $F(x) = x^4 - x^2 + x$ je k ní funkcí primitivní, ale také všechny funkce tvaru $F(x)$ + libovolná konstanta C.

Jak je to možné, že jedna a táž funkce má nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se navzájem o konstantu?

Tabulka primitivních funkcí – I

(1)	$f(t) = t^n$	$F(t) = \frac{t^n}{n+1} \qquad n \neq -1$
(2)	$f(t) = \cos t$	$F(t) = \sin t$
	$f(t) = \sin t$	$F(t) = -\cos t$
(3)	$f(t) = e^t$	$F(t) = e^t$
	$f(t) = \frac{1}{t}$	$F(t) = \ln\|t\|$
	$f(t) = a^t$	$F(t) = \frac{a^t}{\ln a}\ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1$
	$f(t) = \frac{1}{t \ln a}$	$F(t) = \log_a\|t\|\ ,\ a > 0\ ,\ a \neq 1$
(4)	$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$	$F(t) = F_1(t) \pm F_2(t)\ ,$
		$F_1(t)$ resp. $F_2(t)$ je primitivní funkcí k $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$
	$f(t) = k\,g(t)$	$F(t) = kG(t)\ ,\ k =$ konst. ,
		$G(t)$ je primitivní funkcí k $g(t)$

Tabulka primitivních funkcí – II

(5) $f(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ $F(t) = \operatorname{tg} t$

$f(t) = -\frac{1}{\sin^2 t}$ $F(t) = \operatorname{cotg} t$

(6) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $F(t) = \arcsin t$

$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $F(t) = \arccos t$

(7) $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $F(t) = \operatorname{arctg} t$

$f(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ $F(t) = \operatorname{arccotg} t$

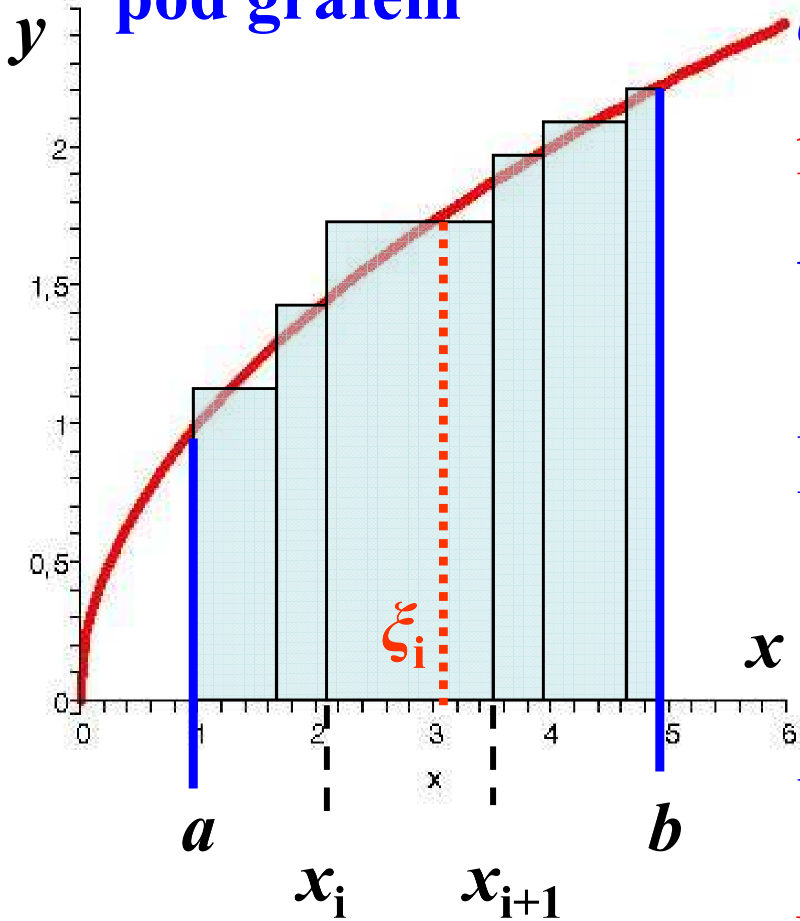
(8) $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$ $F(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}$

(9) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ $F(t) = \frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]$

(10) $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ $F(t) = \frac{1}{2}\left[\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right]$

Problém plochy

určit plochu P pod grafem



dělení D intervalu $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

norma dělení:

$$\nu(D) = \min\{x_{i+1} - x_i \mid i = 0,1,\cdots,n\}$$

$$\mathrm{P} \approx S(D) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\lim_{\nu(D)\to 0} F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

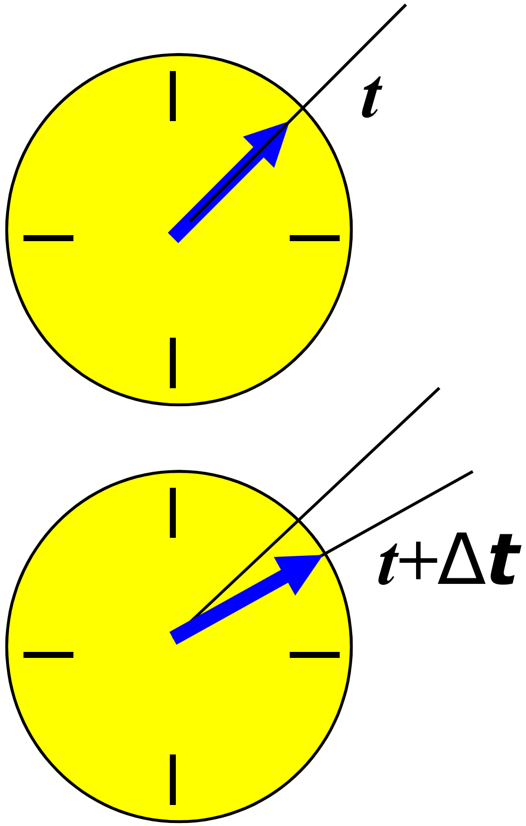
určitý integrál

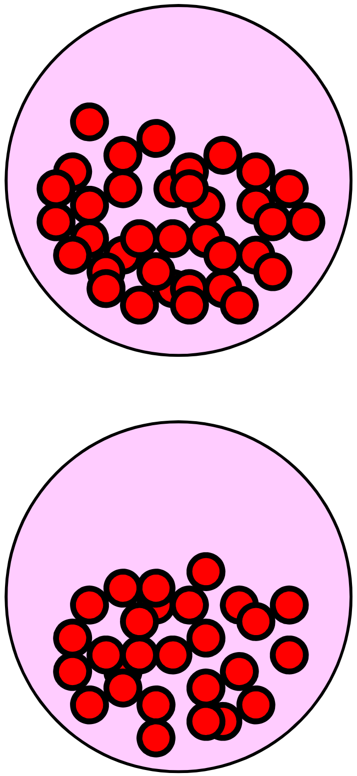
Diferenciální rovnice

aneb

jak z rovnice pro změnu určit funkci

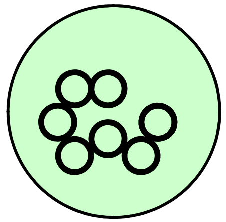
Rozpad jader – ještě jednou





$N \sim$ **4,8·10^{22} na 1 cm^3**

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$



$N + \Delta N$

$\Delta N \sim$ **–2,4·10^5 na 1 cm^3**

Δt **= 1 s**

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N, \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}, \quad \tau_{1/2} = 4{,}47 \cdot 10^9 \text{ let}$$

Rozpad jader - řešení

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t) \cdots f^{/}(x) = -\lambda f(x)$$

$$f^{/}(x) + \lambda f(x) = 0, \quad ?\, f(x) = \exp(\alpha x)$$

$$\alpha \cdot \exp(\alpha x) + \lambda . \exp(\alpha x) = 0 \Rightarrow \alpha = -\lambda$$

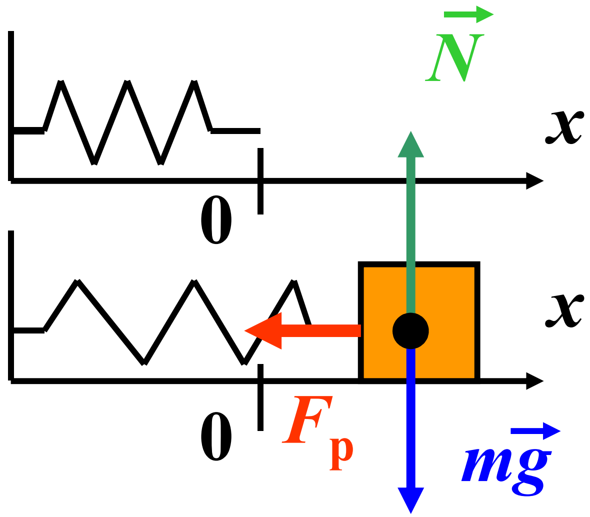
$$f(x) = K \exp(-\lambda x),\ K \cdots \text{libovolná konst.}$$

$$\text{počáteční podmínka:}\ f(0) = f_0 \Rightarrow K = f_0$$

$$f(x) = f_0 \exp(-\lambda x) \cdots N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

Úkol: Použijte uvedený postup pro řešení problému s absorpcí záření. Počáteční podmínka zde má charakter zadání intenzity záření na povrchu.

Ještě jednou mechanika



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p \quad \cdots \quad m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \; \omega^2 = \frac{k}{m} \quad ?\; x = \exp(\alpha t)$$

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0, \quad \alpha = \pm \mathrm{i}\omega$$

$$x(t) = C_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) + C_2 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

počáteční podmínky $x(0) = x_0,\; \dot{x}(0) = v_0$

Dokončete řešení na základě znalosti počátečních podmínek.

Předchozí rovnice jsou ukázkou obyčejných diferenciálních rovnic prvého a druhého řádu, lineárních, s konstantními koeficienty a homogenních.

Příště:

Radiologická fyzika

pravděpodobnost

měření a zpracování dat

podzim 2008, šestá přednáška