

KATEDRA FYZIKY PEVNÉ FÁZE
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY BRNO

ÚVOD DO OPTIKY

Josef Kuběna

NĚKTERÉ FYZIKÁLNÍ KONSTANTY

Rychlost světla $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Planckova konstanta $h = 6,62620 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$

Boltzmannova konstanta $k_B = 1,38062 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Náboj elektronu $e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Hmotnost elektronu $m = 9,10956 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Avogadrovo číslo $N = 6,02217 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Permittivita vakua $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9} \text{ F m}^{-1}$

Permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

NĚKTERÉ MATEMATICKÉ VZORCE

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \dots$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} aq^{k-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} aq^{k-1} = a \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r \cdot x^2} \cos b(x+r) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-(b/2a)^2} \cos br$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Taylorova řada:

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{1!} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \dots$$

KATEDRA FYZIKY PEVNÉ FÁZE
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY BRNO

ÚVOD DO OPTIKY

Josef Kuběna

PODĚKOVÁNÍ

Je mi milou povinností poděkovat kolegovi V. Holému a prof. I. Šantavému za cenné diskuze i přehlédnutí rukopisu těchto skript, dále mému synovi za přípravu počítače k sazbě L^AT_EX a řadě dalších kolegů za jejich připomínky k textu.

Děkuji rovněž firmě Autopal s.r.o. Nový Jičín za nevratnou finanční podporu na úhradu nákladů spojených s tiskem těchto skript, která příznivě ovlivnila jejich konečnou cenu.

Autor

⊗ Josef Kuběna, Masarykova univerzita, Brno, 1994

ISBN 80 - 210 - 0835 - 0

Předmluva

Tato skripta svým zpracováním a výběrem látky odpovídají rozsahu výkladu optiky v základním kurzu fyziky na Přírodovědecké fakultě MU. Učivo této disciplíny je zařazeno do programu ve druhém ročníku studia odborné i učitelské fyziky, kdy posluchači již zvládli základní znalosti integrálního a diferenciálního počtu a rovněž i základní znalosti o vlnění a o elektromagnetických vlnách. Proto budeme z tohoto znalostního předpokladu vycházet.

Optika tvoří první ucelenou a rozsáhlou kapitolu fyziky, kde veškeré jevy mají výraznou vlnovou povahu a vyžadují od studenta zvládnutí matematického popisu vlnění, principu superpozice a jiných dosud nepoznaných zákonitostí vlnění. Od studentů to vyžaduje kvalitativně nový způsob uvažování, který přináší pojem fáze vlny.

Výběr pojmů, principů a zákonů, jež tvoří teoretický základ optiky, způsob uvažování a vedení výpočtů, včetně analýzy vhodných experimentů, je vždy subjektivní a svým způsobem reflektuje osobní pojetí a odbornou i pedagogickou zkušenost autora.

Konfrontace experimentu s příslušnými dedukcemi a výpočty je v optice zvláště důležitá, protože světlo se chová na jedné straně jako klasické elektromagnetické vlnění, avšak na druhé straně v sobě nese v podobě koherenčních vlastností otisk statistické složitosti mikrostruktury světelných zdrojů.

Poznatky o chování světla jsou významné i pro kvantovou fyziku, která popisuje chování mikročástic pomocí pravděpodobnostních (de Broglieových) vln. Pomocí optických experimentů se lze přesvědčit, že např. Heisenbergovy relace neurčitosti jsou přímým důsledkem vlnové povahy mikročástic a podobné relace jsou vlastní všem vlnovým jevům bez ohledu na to, která fyzikální veličina vykazuje vlnový charakter, zda jde o fotony, o elektrony, či o intenzitu elektrického pole EM vlny.

Fundamentálním pramenem pro odbornou práci v optice je kniha Max Born, Emil Wolf: Principles of Optics, Pergamon Press, 1959 (její ruský překlad z roku 1973).

V Brně 23. ledna 1994

Autor

Kapitola 1

Matematický popis světelných vln

Dříve než se budeme zabývat vlastnostmi světla, jeho šířením v prostoru a v látkách, optickým zobrazováním a optickými přístroji je užitečné zavést matematický popis světelných vln a příslušnou symboliku s ním spojenou. V mnoha směrech se bude jednat o poznatky, které známe již z akustiky nebo z oblasti šíření elektromagnetických vln, ale které stojí zato osvěžit a v mnohém upřesnit.

1.1 Vlnová rovnice

Matematický popis fyzikální veličiny ψ , která se šíří **prostorem jako vlnění** (např. tlak plynu, vektor intenzity elektrického pole aj.), musí vyhovovat **vlnové rovnici**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

kde x má význam prostorové souřadnice, t je proměnná času a v je **fázová rychlost**. Řešením této rovnice jsou funkce mající speciální typ argumentu

$$\psi(x, t) = f(x \pm vt). \quad (1.2)$$

Argumentu $(x \pm vt)$ se říká **fáze vlnění**. Je tedy zřejmé, že fáze, nebo-li stav vlnění je funkcí dvou proměnných x a t . Vlnová rovnice je lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. Přírodním důsledkem linearity vlnové rovnice je platnost **principu superpozice**: Jestliže funkce $f_1(x \pm vt)$ a $f_2(x \pm vt)$ jsou řešením vlnové rovnice, pak i jejich lineární kombinace

$$\psi(x, t) = c_1 f_1(x \pm vt) + c_2 f_2(x \pm vt) \quad (1.3)$$

je jejím řešením. Na základě vlastnosti 1.2 je řešením i součin $f_1 f_2$. Těto vlastnosti využijeme v odstavci o vlnových klubkách.

V trojrozměrném prostoru je funkce popisující vlnu závislá na všech třech souřadnicích $\psi(x, y, z, t)$ a vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

Pomocí Laplaceova operátoru Δ se tato rovnice zapisuje ve tvaru

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

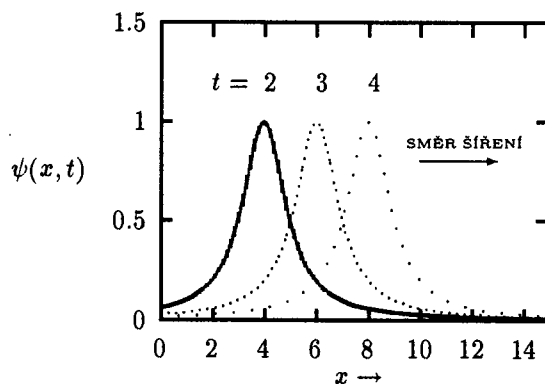
Řešením rovnice 1.4 jsou funkce typu $\psi(r, t) = f(r \pm vt)$ i funkce typu $f(r \pm vt)/r$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tak např. dosazením do vlnové rovnice 1.1 se přesvědčíme, že funkce

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1} \quad (1.5)$$

a dále funkce

$$\psi(z, t) = Ae^{-(z+3t/2)^2} \quad (1.6)$$

popisují vlnění a dosazením do vlnové rovnice můžeme dokonce určit i jeho fázovou rychlost. Kromě principu superpozice obsahuje vlnová rovnice i **princip nezávislého šíření** vln v



Obr. 1.1: Příklad šíření vlny $\psi(x, t) = \frac{1}{1+(x-2t)^2}$ podél osy x . Na obrázku je zaznamenán stav vlny v čase $t = 2, 3$ a 4 s.

prostoru. Dvě vlny, které se šíří ze dvou prostorově oddělených zdrojů se někde protnou, ale šíří se dále tak, jakoby se k protnutí vůbec nedošlo. Přitom v oblasti průsečíku nastala jejich superpozice.

Platnost principu superpozice pro vlnění má zásadní význam v optice, protože díky jemu a **Fourierově transformaci** se můžeme omezit v našich výpočtech a úvahách jen na **harmonické vlny**. Fyzikálně můžeme Fourierovu transformaci interpretovat tak, že každou vlnu lze vyjádřit jako superpozici nekonečně mnoha monochromatických harmonických vln.

1.1.1 Harmonické vlny

Dosažením do vlnové rovnice se přesvědčíme, že funkce

$$\psi(x, t) = A \sin \omega(t - x/v) \quad (1.7)$$

je jejím řešením. Přitom A nazýváme **amplitudou**, $\omega = 2\pi\nu$ **úhlovou frekvencí** a ν **frekvencí**. Toto řešení se také někdy zapisuje ve tvaru

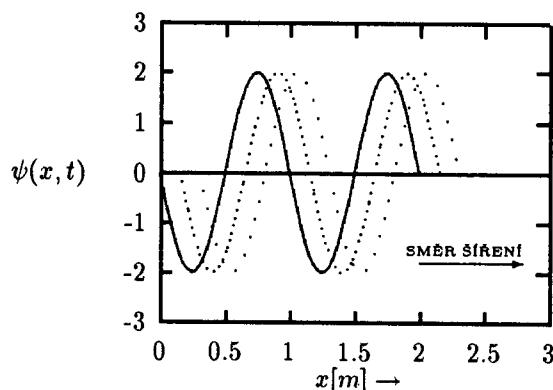
$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (1.8)$$

kde veličinu k nazýváme **úhlovým vlnočtem**, pro které platí

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (1.9)$$

kde λ má význam **vlnové délky**.

Vlnění popsané těmito rovnicemi se nazývá **monochromatické** nebo též monochromatická vlna. Je zřejmé, že místo goniometrické funkce sinus stejně dobře vyhovuje i kosinus. Takové vlny se nazývají **harmonické**.



Obr. 1.2: Příklad šíření harmonické vlny $\psi(x, t) = 2 \sin 2\pi(t/10 - x)$ o délce 2λ . Zaznamenán stav vlny v čase $t = 0, 1$ a 2 s.

V soustavě jednotek SI se ν a ω udává v $[\text{s}^{-1}]$, k v $[\text{m}^{-1}]$, λ v $[\text{m}]$ a v v $[\text{ms}^{-1}]$.

Fázi $\varphi(x, t)$ monochromatické vlny určuje argument funkce sinus. Položíme-li tuto fázi rovnou konstantě, a diferencujeme, dostaneme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0.$$

Pak rychlost

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{\omega}{k} = v \quad (1.10)$$

má fyzikální význam rychlosti šíření konstantní fáze prostorem.

Tyto harmonické vlny jsou periodické jak v prostoru, tak v čase. A právě tato periodičnost funkce sinus umožnila zavést frekvenci ν a vlnovou délku λ . Narušení této matematické periodičnosti, např. jen omezením délky trvání vlny, vede k nejistotě v určení její frekvence. Všechny vlny, se kterými se v našem reálném světě setkáváme, se touto nejistotou ve frekvenci vyznačují, neboť netrvají nekonečně dlouho. Tomuto zajímavému faktu se budeme věnovat podrobněji v souvislosti se šířením **vlnových klubek**.

Vzhledem k Fourierově transformaci a dalším příznivým matematickým vlastnostem zaujmají harmonické vlny zcela dominantní postavení mezi všemi vlnami. Celý další výklad optiky bude proto z nich vycházet.

1.2 Reprezentace vlnění komplexními čísly

Popisovat reálné fyzikální veličiny a procesy pomocí komplexních čísel je na první pohled překvapující a zbytečně komplikované. Komplikace je však v tomto případě zanedbatelná oproti výhodám při algebraických úpravách s nimiž se v optice setkáme při výpočtu intenzity světla, když nastává superpozice několika vln.

Obrazem komplexního čísla

$$z = a + ib \quad (1.11)$$

v Gaussově komplexní rovině je bod. Jeho vzdálenost od počátku je rovna jeho absolutní hodnotě $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (hvězdička značí, že jde o veličinu komplexně sdruženou), průmět do reálné osy je $|z|\cos\varphi$ a do imaginární osy $|z|\sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírá průvodič bodu z s reálnou osou. Omezíme-li se na interval $(0, 2\pi)$, pak platí $\varphi = \arccos(a/|z|)$. Naše komplexní číslo můžeme tedy napsat v goniometrickém tvaru jako

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (1.12)$$

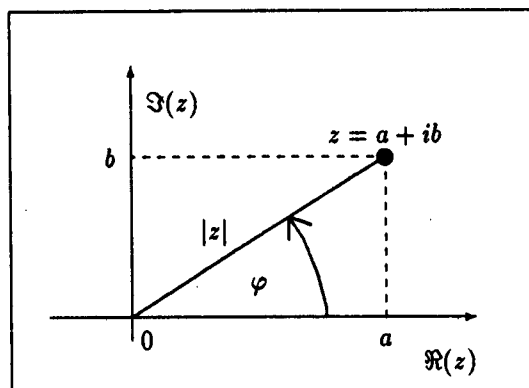
nebo pomocí Eulerovy formule v exponenciálním tvaru

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad (1.13)$$

Harmonickou vlnu pak může zapsat takto (ozdobná písmena \Re a \Im označují reálnou nebo imaginární část výrazu):

$$\psi_i(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = \Im(Ae^{i(\omega t - kx)}) \quad (1.14)$$

$$\psi_r(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = \Re(Ae^{i(\omega t - kx)}) \quad (1.15)$$



Obr. 1.3: Znáznornění komplexního čísla $z = a + ib$ v Gaussově rovině.

nebo jednoduše

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.16)$$

Přitom však uděláme úmluvu, že fyzikální význam bude mít pouze reálná část tohoto komplexního vyjádření $\psi(x, t)$. Jinými slovy to znamená, že budeme používat funkce kosinus pro popis rovinných monochromatických vln.

Jestliže nyní dostaneme při superpozici několika vln libovolně složitý komplexní výraz, není třeba pro potřeby výpočtu intenzity světla hledat výslednou amplitudu, ale stačí jen provést součin $\psi\psi^*$, což je kvadrát hledané amplitudy úměrný intenzitě, jak později ukážeme. Problém superpozice vln vyjádřený poměrně složitými goniometrickými výrazy jsme tímto převedli na všeobecně známé sčítání komplexních čísel.

1.2.1 Vektorové vlny

V optice se budeme setkávat s vlnami **vektorovými**, protože světlo se chová při šíření a interakci s látkou jako elektromagnetické vlnění. O něm víme, že je to příčné vlnění, kdy vlnový charakter má vektor intenzity elektrického pole a vektor magnetické indukce, které jsou kolmé na směr šíření. Jestliže se šíří taková vlna podél osy z , pak musíme znát ještě orientaci vektoru amplitudy v rovině xy . Vektorovou vlnu pak zapíšeme takto:

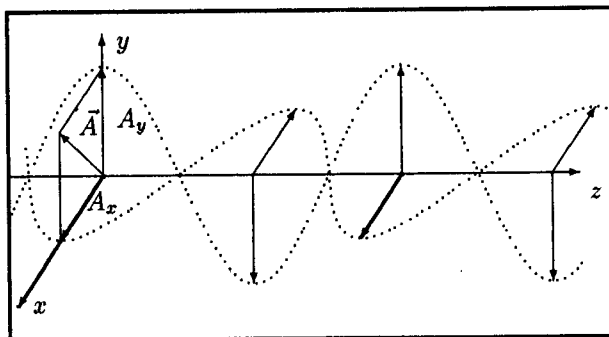
$$\vec{\psi}(z, t) = \vec{A}e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.17)$$

nebo ve složkách

$$\psi_x(z, t) = A_x e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.18)$$

$$\psi_y(z, t) = A_y e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.19)$$

Takové vektorové vlně říkáme, že je **lineárně polarizovaná**. Podstatným znakem lineárně polarizované vlny zapsané ve složkách je, že fáze obou složek jsou stejné.



Obr. 1.4: Znáznornění vektorové vlny, která je rozložena na dvě vlny ležící v rovinách na sebe kolmých.

Při odrazu světla na rozhraní dvou prostředí nebo při průchodu světla dvojlomnými látkami se setkáme se zajímavým jevem, kdy mezi uvažovanými složkami vektorové vlny vznikne fázový rozdíl δ .

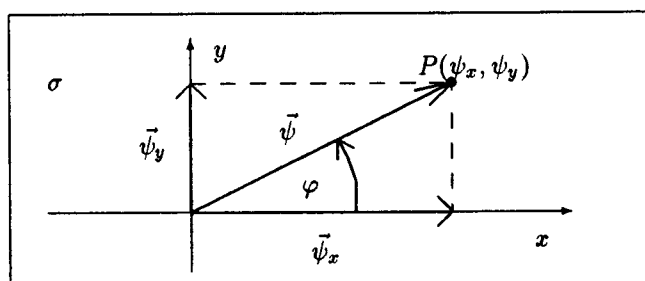
$$\psi_x(z, t) = A_x e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.20)$$

$$\psi_y(z, t) = A_y e^{i(\omega t - kz + \delta)} \quad (1.21)$$

Amplituda \vec{A} má význam vektoru intenzity elektrického pole. V každém okamžiku nastává tedy superpozice těchto dvou elektrických polí. Sledujme polohu koncového bodu P vlny $\vec{\psi}$ odpovídající superpozici vln

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_x + \vec{\psi}_y$$

v rovině σ kolmé na směr šíření. Podle naší úmluvy určuje polohu bodu P pouze reálná část



Obr. 1.5: K výpočtu geometrického místa bodů P v rovině σ . Pohled na rovinu σ ve směru šíření vektorové vlny.

výše uvedeného zápisu. Bod P má tedy souřadnice (ψ_x, ψ_y) a každý okamžik se jeho poloha mění. Křivku geometrického místa bodů P najdeme, když z následujících rovnic vyloučíme čas a směr jeho pohybu po této křivce výpočtem úhlu φ .

$$\psi_x(z_0, t) = A_x \cos(\omega t - kz_0) \quad (1.22)$$

$$\psi_y(z_0, t) = A_y \cos(\omega t - kz_0 + \delta) . \quad (1.23)$$

Pro jednoduchost označme $\tau = \omega t - kz_0$ a upravme předchozí rovnice na tvar

$$\frac{\psi_x}{A_x} = \cos \tau \quad (1.24)$$

$$\frac{\psi_y}{A_y} = \cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta . \quad (1.25)$$

Umocněním druhé rovnice a vyloučením goniometrických funkcí obsahujících τ pomocí první rovnice dostaneme:

$$\left(\frac{\psi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\psi_x}{A_x}\frac{\psi_y}{A_y}\cos\delta = \sin^2\delta . \quad (1.26)$$

Algebraický tvar této rovnice napovídá, že hledanou křivkou je elipsa, která podle hodnoty δ mění svoji polohu v rovině σ .

Pro hledaný úhel φ platí

$$\tan \varphi(t) = \frac{\psi_y}{\psi_x} = \frac{A_y}{A_x} \cos \delta - \frac{A_y}{A_x} \tan \tau \sin \delta . \quad (1.27)$$

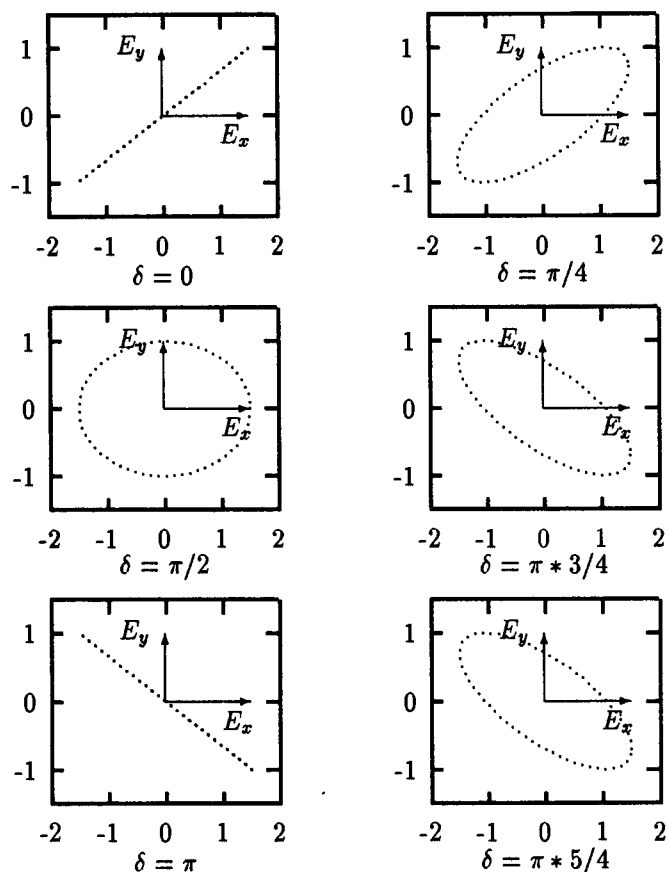
Sledujme tvar křivky pro některé speciální hodnoty fázového posuvu δ :

$\delta = 0$	$\left(\frac{\psi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\psi_x}{A_x}\frac{\psi_y}{A_y} = 0$	$\tan \varphi(t) = \frac{A_y}{A_x}$
	$\text{přímka } \psi_y = \frac{A_y}{A_x} \psi_x$	konstanta
$\delta = \pi/2$	$\left(\frac{\psi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_y}{A_y}\right)^2 = 1$	$\tan \varphi = -\frac{A_y}{A_x} \tan \tau$
	elipsa	$\varphi(t)$ s časem klesá
$\delta = \pi$	$\left(\frac{\psi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_y}{A_y}\right)^2 + 2\frac{\psi_x}{A_x}\frac{\psi_y}{A_y} = 0$	$\tan \varphi(t) = -\frac{A_y}{A_x}$
	$\text{přímka } \psi_y = -\frac{A_y}{A_x} \psi_x$	konstanta
$\delta = 3\pi/2$	$\left(\frac{\psi_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\psi_y}{A_y}\right)^2 = 1$	$\tan \varphi = -\frac{A_y}{A_x} \tan \tau$
	elipsa	$\varphi(t)$ s časem roste

Tento výsledek je zajímavý tím, že změna ve fázi jedné složky původně lineárně polarizované vlny způsobí, že koncový bod P výsledného vektoru se v prostoru pohybuje po eliptické šroubovici, místo po sinusovce, jak tomu bylo původně. O takové vlně se pak říká, že je elipticky nebo rotačně polarizovaná.

1.2.2 Skalární vlny

Skalární vlny se v optice nevyskytují, avšak při mnoha situacích se stav polarizace nemění, případně malé změny nejsou podstatné pro sledované jevy. Tak je tomu např. při šíření světla ve vakuu, při difrakci nebo při šíření světla optickými přístroji.



Obr. 1.6: Schematické znázornění výsledků diskuze vlivu velikosti fázového posuvu δ na eliptickou polarizaci.

V těchto případech si zvolíme vektor amplitudy tak, že má složku jen v ose x a tedy jeho složka do osy y je rovna nule. Bez újmy na obecnosti se nám popis takové vektorové vlny významně zjednoduší.

$$\psi(z, t) = Ae^{i(\omega t - kz)} \quad (1.28)$$

Poznamenejme na tomto místě, že na rozdíl od televizních nebo radiových vln, existuje v optice ještě jeden stav světelného vlnění, kdy lze pro jeho popis užít skalárních vln a tím celou situaci matematicky velice zjednodušit. Jedná se o případ **nepolarizovaného světla**, které se šíří ze všech nám dobře známých světelných zdrojů kromě laserů. V čem spočívají fyzikální důvody tohoto zjednodušení našich úvah objasníme později, až se budeme zabývat **koherenčními vlastnostmi světla**.

1.2.3 Rovinná vlna

Doposud jsme si při popisu vln všímali amplitudy. Nyní zaměříme pozornost na tvar **vlnoplochy**. Vlnoplochou rozumíme takové geometrické místo bodů v prostoru, kde má fáze vlny konstantní hodnotu v daném časovém okamžiku. V případě vlny šířící se podél osy z je vlnoplocha dána rovnicí

$$\omega t - kz = C, \quad (1.29)$$

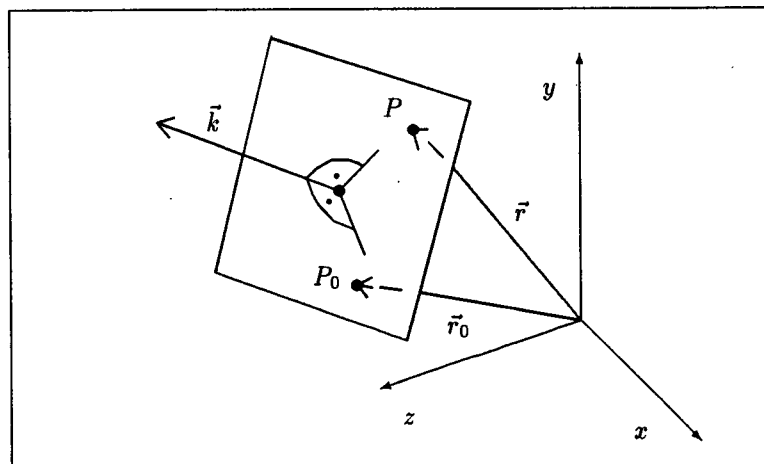
kde C je ona konstanta. Po úpravě dostáváme

$$z = (\omega t - C)/k, \quad (1.30)$$

což je rovnice roviny kolmé na osu z ve vzdálenosti $(\omega t - C)/k$ od počátku. Vidíme, že tato vzdálenost s rostoucím časem roste. Vlnoplocha se pohybuje ve směru osy z fázovou rychlostí $v = dz/dt = \omega/k$. V obecném případě je rovinná vlna dána rovnicí

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.31)$$

kde \vec{k} se nazývá **vlnový vektor**, jehož směr je totožný se směrem fázové rychlosti a velikost s vlnovým číslem. Vektor \vec{r} má význam polohového vektoru směřujícího do bodu P na vlnoploše a určuje tedy fázi vlnění v tomto bodě.



Obr. 1.7: Rovinná vlna v prostoru. Vlnoplocha je kolmá na vlnový vektor.

Nechť vektor \vec{r}_0 směřuje do jiného bodu na této vlnoploše. Pak tedy platí

$$\omega t - \vec{k}\vec{r} = C \quad (1.32)$$

$$\omega t - \vec{k}\vec{r}_0 = C \quad (1.33)$$

a tedy odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$\vec{k}(\vec{r}_0 - \vec{r}) = 0. \quad (1.34)$$

Tato rovnice říká, že body tvořící vlnoplochu leží v rovině kolmé na vlnový vektor.

V souřadnicové reprezentaci má pak rovinná vlna tvar

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(\omega t - xk_x - yk_y - zk_z)}. \quad (1.35)$$

Přitom platí, že souřadnice vektoru \vec{k} musí splňovat vztah

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda,$$

který plyne z toho, že během šíření vlny v homogenním prostředí se nemění fázová rychlost.

Pro **příčné vlnění**, jakým jsou elektromagnetické vlny, navíc platí, že vektor amplitudy \vec{A} (tj. vektor \vec{E} nebo \vec{B}) je kolmý na vlnový vektor. Platí tedy $\vec{A}\vec{k} = 0$.

Poznamenejme, že když amplituda má na ploše vlnoplochy všude stejnou hodnotu, říkáme, že jde o vlnu **homogenní**.

V optice bývá amplituda často reprezentována komplexním číslem. Takovou amplitudu pak můžeme zapsat ve tvaru $A = |A|e^{i\phi}$. Do komplexní amplitudy lze tedy uschovat fázovou konstantu ϕ a neuvádět ji pak ve fázi.

$$\psi(\vec{r}, t) = |A|e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi)} = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.36)$$

Někdy se pro zjednodušení zápisu zahrnuje do komplexní amplitudy i faktor $e^{i\omega t}$.

1.2.4 Kulová vlna

Při popisu šíření světla z bodového zdroje $S(x_0, y_0, z_0)$ se často užívá **kulové harmonické vlny**, jejíž název je odvozen opět od tvaru vlnoplochy.

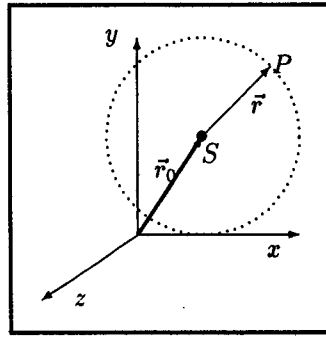
$$\psi(P, t) = \psi(x, y, z, t) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr)}, \quad (1.37)$$

kde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ je vzdálenost bodu P na vlnoploše od bodu S . Dosazením do vlnové rovnice se můžeme ujistit, že kulová vlna je také jedním z jejích řešení. Analogickým postupem jako v případě rovinné vlny dostaneme pro vlnoplochu rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{1}{k^2}(\omega t - C)^2, \quad (1.38)$$

což je rovnice koule, jejíž poloměr s časem roste.

Amplituda kulové vlny klesá s rostoucí vzdáleností S_0P a má skalární charakter. Této aproximace se užívá tedy v takových případech, kdy při šíření vlny nedochází ke změně polarizace. Na vlnoploše má amplituda všude stejnou hodnotu a taková vlna se nazývá **homogenní**.



Obr. 1.8: Kulová vlna šířící se z bodu S

1.3 Vlnová klubka

Jak jsme se zmínili už dříve, lze principu superpozice využít k tomu, že každou vlnu (každé řešení vlnové rovnice) můžeme zapsat jako superpozici rovinných vln. Matematicky vede tento problém na aplikaci **Fourierovy transformace** (FT). Máme-li vlnu

$$\psi(x, t) = f(x - tv) , \quad (1.39)$$

pak funkci $f(x - tv)$ můžeme pomocí FT vyjádřit jako

$$f(x - tv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi(x-tv)} d\xi , \quad (1.40)$$

kde Fourierův obraz je dán integrálem

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - tv) e^{i\xi(x-tv)} d(x - tv) . \quad (1.41)$$

Podmínka, že exponent v těchto integrálech musí být bezrozměrný, nás vede k tvrzení, že ξ má fyzikální význam vlnového čísla a vlna ψ je v tomto případě vyjádřena jako superpozice nekonečného množství rovinných vln, které se liší vlnovým číslem a amplitudou, která je daná hodnotou funkce $F(\xi)$.

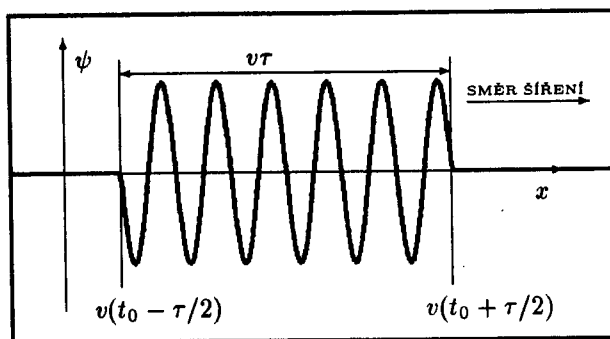
Podle tohoto početního postupu analyzujeme nyní tento zajímavý konkrétní případ takové vlny

$$\psi(x, t) = a(t - x/v) e^{i\omega(t-x/v)} , \quad (1.42)$$

kde funkce $a(\eta)$ nabývá hodnotu 1 ,když η leží v intervalu $(-\tau/2, \tau/2)$ a je rovna nule všude mimo tento interval.

Z grafu na obr.1.9 je názorně vidět, že podél osy x se šíří omezený úsek harmonické vlny o délce $L = v\tau$. Funkci $a(t - x/v)$ vyjádříme pomocí Fourierovy transformace

$$a(t - x/v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\varepsilon) e^{i\varepsilon(t-x/v)} d\varepsilon , \quad (1.43)$$



Obr. 1.9: Stav uvažovaného úseku harmonické vlny $\psi(x, t)$ v čase $t = t_0$ na ose x .

kde Fourierův obraz je dán integrálem

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t - x/v) e^{i\varepsilon(t-x/v)} d(t - x/v). \quad (1.44)$$

Po dosazení dostáváme

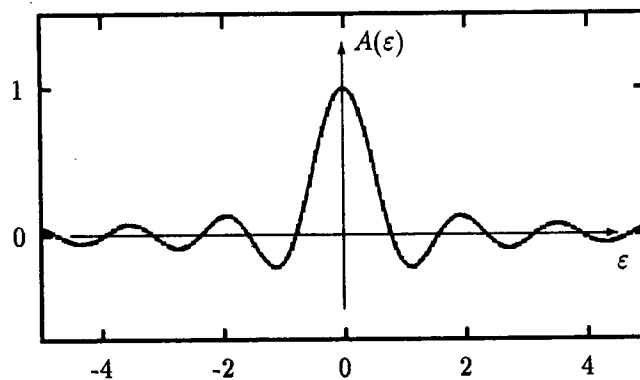
$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-i\varepsilon(t-x/v)} d(t - x/v) \quad (1.45)$$

a po provedení integrace

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin \varepsilon \tau / 2}{\varepsilon}. \quad (1.46)$$

Naši vlnu můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin \varepsilon \tau / 2}{\varepsilon} e^{i(\varepsilon + \omega)(t-x/v)} d\varepsilon. \quad (1.47)$$



Obr. 1.10: Grafické znázornění funkce $A(\varepsilon)$, která určuje amplitudu každé rovinné vlny o frekvenci $\omega + \varepsilon$, jejichž superpozice dává vlnu $\psi(x, t)$.

Z výpočtu vidíme, že každé časové omezení harmonické vlny (např. zapnutí a vypnutí signálu) způsobí frekvenční rozladění původní frekvence ω . Uvážíme-li, že k výsledné vlně přispívají především vlny s velkou amplitudou, tj. takové, jejichž amplituda leží v hlavním maximu funkce $A(\varepsilon)$, můžeme odhadnout, jak souvisí doba existence vlny τ s rozladěním ε . Za charakteristiku rozladění zvolme pro jednoduchost polohu prvního nulového bodu ε_0 funkce $A(\varepsilon)$. Tento nulový bod nastane, když $\varepsilon_0\tau/2 = \pi$. Tedy $\varepsilon_0 = 2\pi/\tau$. Rozladění je tedy nepřímě úměrné době trvání τ .

Tento výsledek našeho výpočtu ilustruje obecnou vlastnost vlnění, která v různých oblastech fyziky má svůj specifický význam. Např. v kvantové mechanice se interpretuje jako **princip neurčitosti** měření energie kvantového objektu, který se popisuje pravděpodobnostní vlnou.

Poznamenejme dále, že časově konečný úsek harmonické vlny dostáváme jako superpozici časově nekonečných vln (harmonická vlna je definována pro každé x a každé t). Takové množině vln lišících se nepatrně ve frekvenci se říká **vlnové klubko** a veličina $L = v\tau$ se nazývá **délka vlnového klubka**. Vyjádříme-li rozladění ve škále vlnových délek jako $\Delta\lambda$, pak pro délku klubka dostáváme

$$L = v\tau = 2\pi v/\varepsilon_0 = 2\pi v/\Delta\nu = 2\pi\lambda^2/\Delta\lambda.$$

Toto je velice důležitý výsledek, který nám umožní správně aplikovat výpočty provedené pro monochromatické vlny na reálné experimenty týkající se difrakce a interference světla. Poznamenejme, že veličinu L nazýváme v této souvislosti též **koherenční délkou**.

Tuto matematickou analýzu vlnového klubka jsme provedli pouze pro jeden typ amplitudové funkce $a(t - x/v)$, na níž jsme ukázali, jak souvisí s rozladěním monochromatické vlny. Z měření profilů spektrálních čar však spíše vyplývá, že amplitudová funkce světelných vlnových klubek má spíše tvar $a(t - x/v) = e^{-(t-x/v)/\tau}$ připomínající tlumené kmity oscilátoru. Jako by elektron při přechodu z vyšší energetické hladiny na nižší se rozkmital, a tím jak vyzařuje EM vlnu, se amplituda jeho kmitů neustále zmenšuje.

Taková vlna by pak byla dána vztahem

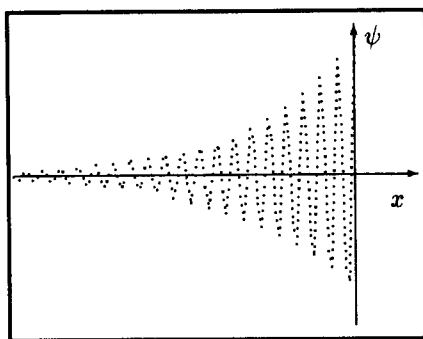
$$\psi(x, t) = U e^{-(t-x/v)/\tau} e^{i\omega(t-x/v)},$$

který pomocí Fourierovy transformace můžeme zapsat jako

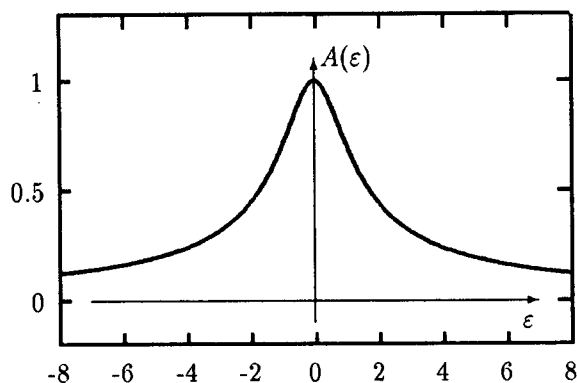
$$\psi(x, t) = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau e^{i\tau\varepsilon}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\tau^2}} e^{i(\omega+\varepsilon)(t-x/v)} d\varepsilon.$$

Grafické znázornění takového vlnového klubka při šíření prostorem je na obr.1.11 a na obr.1.12 je závislost amplitud příslušných monochromatických vln na rozladění ε .

Z obr.1.11 je zřejmé, že pojem délka vlnového klubka, nebo jemu odpovídající pojem koherenční délka, mají velice aproxiativní charakter, který závisí na tvaru amplitudové funkce. U tlumené vlny má τ význam času, za nějž se amplituda zmenší e -krát.



Obr. 1.11: Grafické znázornění vlnového klubka s tlumenou amplitudou při šíření podél osy x .



Obr. 1.12: Závislost amplitud monochromatických vln $A(\epsilon)$ na ϵ , jejichž superpozicí vznikne tlumená vlna.

U vlnových klubek je tedy velice problematické přesně definovat jeho délku $L = v\tau$ a proto, pokud neznáme přesně tvar amplitudové funkce $a(y - x/v)$, používáme pro její odhad jen vztahu $\lambda^2/\Delta\lambda$.

V tomto odstavci jsme předpokládali, že všechny harmonické vlny mají stejnou fázovou rychlost. Tak je tomu pouze ve vakuu. V látkových prostředích se šíří tyto vlny obecně různou rychlostí a tím vyvstává problém, jakou rychlostí se tedy šíří vlnové klubko (grupa vln). Jak později ukážeme, šíří se tzv. **grupovou rychlostí** a klubko samotné při šíření v takovém **disperzním** prostředí, kde fázová rychlost $v(\omega)$ je funkcí frekvence, mění svůj původní tvar.

Kapitola 2

Základní modely světla

V předchozí kapitole jsme pojednali o matematickém popisu různých typů vln, avšak nijak jsme nespécifikovali, kdy který popis je vhodné použít. Teprve nyní vyslovíme řadu hypotéz o vlastnostech vlnění, jemuž říkáme **světlo**. O jejich oprávněnosti rozhodne jedině experiment. Zatímco elektromagnetická teorie světla popisuje dobře šíření světla ve vakuu i v hmotném prostředí, procesy na atomární úrovni, týkající se generace a detekce světla, uspokojivě popisuje pouze kvantová fyzika. Proto se jimi v optice zabývat nebudeme. Využijeme pouze některých poznatků z této oblasti, abychom vytvořili vhodné modely zdrojů vlnění pro naše optické úvahy a výpočty a dále, abychom si objasnili, jak lze světlo detekovat a jak **intenzita světla**, tato měřitelná veličina, souvisí s naším matematickým popisem vlnění.

2.1 Detekce světla

Viditelné světlo tvoří jen velice malou oblast nám známých elektromagnetických vln, jak je zřejmé z následující tabulky.

Název	vlnová délka [m]	frekvence [1/s]
Radiové a televizní vlny	10^8 až 10^{-1}	1 až $3 \cdot 10^9$
Mikrovlny	10^{-1} až 10^{-3}	$3 \cdot 10^9$ až $3 \cdot 10^{11}$
Infračervené záření	10^{-3} až $8 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{11}$ až $4 \cdot 10^{14}$
Viditelné světlo	$8 \cdot 10^{-7}$ až $4 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14}$ až $8 \cdot 10^{14}$
Ultrafialové záření	$4 \cdot 10^{-7}$ až 10^{-9}	$8 \cdot 10^{14}$ až $3 \cdot 10^{17}$
Rentgenové záření	10^{-9} až 10^{-11}	$3 \cdot 10^{17}$ až $3 \cdot 10^{19}$
Gama záření	10^{-11} až 10^{-25} ?	$3 \cdot 10^{19}$ až $3 \cdot 10^{33}$?

Z každodenní praxe příjmu televizních vln víme, že elektromagnetické vlny lze detekovat anténními dipóly. Na první pohled je vidět, že anténu pro příjem světelných vln nelze vyrobit. Její dipól délky $\lambda/2$ by totiž musel mít délku asi 0.3 mikrometru! To jsou v podstatě atomární rozměry. Rovněž prvky elektrických obvodů, jako jsou indukčnost nebo kapacita, přestávají mít pro frekvence větší než 10^{11} jakýkoliv smysl a to jde o frekvenci ještě o 3 řády

menší než má viditelné světlo. Poznamenejme však, že ve špičkových fyzikálních laboratořích bylo s úspěchem použito miniaturních dipólů pro detekci infračerveného záření o $\lambda \approx 0.1\text{mm}$.

Detekci ani generaci světla nemůžeme popsat v rámci teorie elektromagnetických vln, která však velice dobře popisuje šíření světla ve vakuu i jeho interakci s hmotným prostředím. Detektory světla, jako jsou fotonka, fotonásobič, fotodioda, kalorimetr, fotografický film či lidské oko, neinformují nás o světle přímo, ale zprostředkovaně.

Světlo nejdříve interaguje s atomovou strukturou detektoru a naše přístroje reagují až na produkt této interakce. Naproti tomu např. membrána mikrofону reaguje na okamžité hodnotu akustického tlaku, televizní anténa na okamžité hodnoty intenzity elektrického pole elektromagnetické vlny apod.

Detektory reagují vždy na tok světelné energie absorbované v jeho objemu. Energie vlnění je vždy úměrná kvadrátu jeho amplitudy. Proto se někdy mluví o **kvadratických detektorech vlnění**.

Pro každý detektor je charakteristická jeho **spektrální citlivost**. Lidské oko nevidí infračervené záření, ale křemíková fotodioda je velice dobře je detekuje.

Žádný detektor nereaguje na okamžitý stav toku světelné energie, ale na jeho střední hodnotu za **integrační dobu**, která je další významnou charakteristikou každého detektoru.

INTEGRAČNÍ DOBY NĚKTERÝCH DETEKTORŮ:

Mikrokalorimetr [$\tau = 10^2$ s] . Doba potřebná k ustavení tepelné rovnováhy.

Lidské oko [$\tau = 0.1$ s] Při promítání v kině nepostřehneme, že mezi jednotlivými obrázky je plátno tmavé. Za 1 sekundu se promítne 16 obrázků.

Fotodioda [$\tau = 10^{-3}$ s] .Velká plocha p-n přechodu se chová jako deskový kondenzátor, jehož impedance s rostoucí frekvencí klesá.

Fotonka, fotonásobič [$\tau = 10^{-6}$ až 10^{-9} s] .U těchto detektorů je už zcela rozhodující pro integrační dobu jen elektronická cesta zpracování signálu.

2.2 Intenzita světla a elektromagnetické vlnění

Z elektromagnetické teorie plyne, že tok objemové hustoty elektromagnetického vlnění udává tzv. **Poyntingův vektor**, který je ve vakuu dán vztahem

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 [\Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{B})] , \quad (2.1)$$

kde $c = \sqrt{1/\epsilon_0 \mu_0}$ je rychlost světla a ϵ_0 a μ_0 jsou permeabilita a permitivita vakua, \vec{E} a \vec{B} jsou příslušné vektory intenzity elektrického pole a magnetické indukce. Měřitelnou veličinou

světla je pak **intenzita světla** \vec{I} daná střední časovou hodnotou Poyntingova vektoru

$$\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \vec{S}(t) dt, \quad (2.2)$$

kde τ je integrační doba detektoru. Podle této definice má intenzita světla vektorový charakter. Detektory světla však reagují jen na velikost tohoto vektoru, bez ohledu na to, ze kterého směru na detektor světlo dopadá. Pouze ve speciálních případech se zajímáme, ze kterého směru světlo přichází. Tyto případy budeme analyzovat samostatně. Z tohoto důvodu budeme dále považovat za intenzitu $I = |\vec{I}|$.

Najděme nyní výraz pro intenzitu rovinné monochromatické elektromagnetické vlny (EM vlna), jejíž elektrická složka má amplitudu $\vec{E} \equiv (0, E_y, 0)$ a platí tedy

$$E_y(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - x k_x)}. \quad (2.3)$$

Tohoto jednoduchého zápisu EM vlny jsme dosáhli jen vhodnou volbou souřadnicového systému. Elektrická a magnetická složka EM vlny jsou svázány Maxwellovými rovnicemi, které zapsány ve složkách příslušných vektorů mají tvar

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu \left(\sigma E_x + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu \left(\sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu \left(\sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.7)$$

Pro vakuum je $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, vodivost $\sigma = 0$ a rovněž hustota el. náboje $\rho = 0$. Dosazením naší vlny (2.3) do rovnic (2.4) dostaneme

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

a tedy

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = i k_x E_0 e^{i(\omega t - x k_x)}. \quad (2.8)$$

Po integraci podle t dostáváme

$$B_z = \frac{ik_x}{i\omega} E_0 e^{i(\omega t - xk_x)} = \frac{1}{c} E_0 e^{i(\omega t - xk_x)} . \quad (2.9)$$

Odtud je již vidět, že magnetická složka EM vlny bude ležet jen v ose z a bude mít amplitudu $B_0 = E_0/c$.

Podle (2.1) pak pro velikost Poyntingova vektoru dostáváme

$$S_x = c^2 \varepsilon_0 \Re(E_y) \Re(B_z) = c \varepsilon_0 \Re(E_y) \Re(E_y) = c \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - xk_x) . \quad (2.10)$$

Abychom tedy vypočítali intenzitu světla podle EM teorie, je třeba nyní provést ještě výpočet střední časové hodnoty vektoru \vec{S} za integrační dobu τ .

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau c \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - xk_x) dt = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \left[1 + \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \cos 2(\omega t - xk_x) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \left[1 + \frac{T}{4\pi\tau} (\sin 2(\omega\tau - xk_x) - \sin 2xk_x) \right] , \end{aligned}$$

kde T je perioda uvažované vlny. Vidíme, že hodnota druhého členu v hranaté závorce nepřesáhne hodnotu $T/(2\pi\tau)$. To je pro reálné detektory světla hodnota 10^{-6} a menší a oproti 1 je tento člen zanedbatelný pro každou hodnotu x .

Poznamenejme, že tímto výpočtem intenzity harmonických EM vln se nám ve vzorci objevil navíc faktor $1/2$. Dále poznamenejme, že při výpočtu intenzity světla není tedy třeba podle Maxwellových rovnic hledat příslušnou magnetickou složku, ale stačí se omezit pouze na elektrickou komponentu EM vlny .

Tento výsledek nám tedy umožní v rámci EM teorie počítat intenzitu světla rovinné monochromatické vlny podle jednoduchého vztahu

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_y E_y^* . \quad (2.11)$$

Uvážíme-li, že výchylka měřícího přístroje detektoru světla J je úměrná absorbovanému toku hustoty energie EM vlnění o dané frekvenci

$$J = K(\omega) \langle S \rangle , \quad (2.12)$$

kde $K(\omega)$ má význam frekvenční citlivosti detektoru, lze faktor $c\varepsilon_0/2$ zahrnout do citlivosti a **intenzitu světla počítat jako $\langle \psi\psi^* \rangle$** .

Takto definovaná intenzita světla pomocí EM teorie je funkcí prostorových souřadnic. Při jejím měření by bylo třeba používat proto detektorů s prakticky bodovým vstupním okénkem. Tento požadavek je však nerealizovatelný, protože by do detektoru proudil velmi malý tok energie. Při měřeních prostorového rozložení intenzity dochází proto ke zkreslení, které je možné matematicky popsat následující rovnicí. Jestliže $t(x)$ je funkce propustnosti

štěrbiny před detektorem, $f(x)$ je vypočtené rozložení intenzity, pak pro naměřenou funkci $h(x)$ platí

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)t(x-y) dy . \quad (2.13)$$

V matematice se tato integrální rovnice nazývá **konvolucí** (funkce $t(x)$, která nás zajímá, je součástí integrandu). Je zřejmé, že pro nekonečně úzkou štěrbinu přejde propustnost v delta funkci (definice viz matematická příloha) a pak $h(x) = f(x)$.

2.3 Intenzita světla a kvantová fyzika

Absorpce a emise světla se podle kvantové fyziky děje pouze po velice malých kvantech energie $\mathcal{E} = h\nu$, kde h je Planckova konstanta ($h = 6.6256 \cdot 10^{-34}$ J s) a ν je frekvence světla. Nositelem této energie je částice zvaná **foton**. Fotonu pak přísluší ve vakuu impuls $p = \mathcal{E}/c$.

Označíme-li objemovou hustotu fotonů o frekvenci ν jako $N(\nu)$, pak výchylka detektoru při dopadu světla o této frekvenci je

$$\Delta J = SK(\nu)N(\nu)\mathcal{E}(\nu)\cdot\nu , \quad (2.14)$$

kde S značí plochu detektoru, funkce $K(\nu)$ má opět význam frekvenční citlivosti detektoru a $\Delta\nu$ úzký obor frekvencí měřeného světla.

2.4 Bodový zdroj světla

Naším úkolem nyní bude vypočítat rozložení intenzity světla v libovolném bodě P stínítka od bodového monochromatického zdroje světla S . Zavedme dva souřadné systémy podle obr.2.1 mající jednu osu společnou a zbývající dvě rovnoběžné. V optice se velice často vyšetřuje rozložení intenzity světla na rovinném stínítku. Pro ně budeme tedy rezervovat i v dalších odstavcích souřadnice ξ, η .

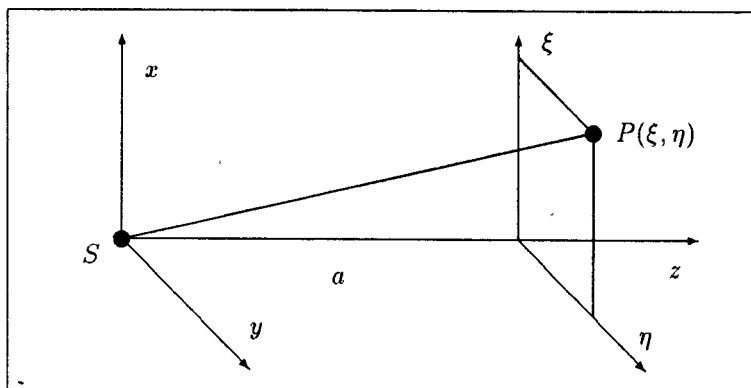
Z experimentu plyne, že světelné zdroje se chovají tak, jako by se z nich šířily kulové vlny. V bodě $P(\xi, \eta)$ tato vlna dána vztahem

$$\psi(S, P) = \frac{A}{SP} e^{i(\omega t - kSP + \phi)} , \quad (2.15)$$

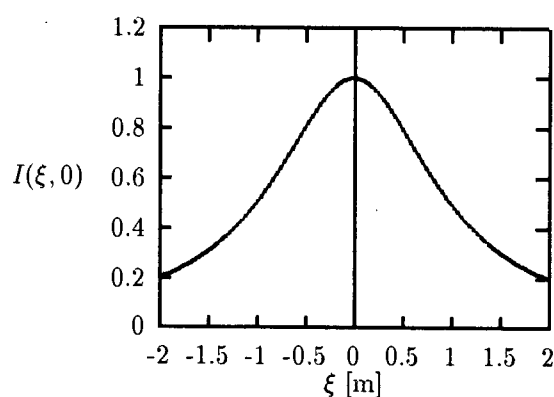
kde, pro jednoduchost zápisu, dvojice písmen označující body, např. SP , znamená vždy jejich vzdálenost, tj. $SP = \sqrt{a^2 + \xi^2 + \eta^2}$ a ϕ je počáteční fáze vlny.

Intenzita v bodě P je pak dána vztahem

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \psi\psi^* dt = \frac{A^2}{a^2 + \xi^2 + \eta^2} \quad (2.16)$$



Obr. 2.1: Vzájemná poloha bodového zdroje světla a stínítka.



Obr. 2.2: Rozložení intenzity na stínítku při jeho osvětlení bodovým zdrojem ze vzdálenosti $a = 1\text{ m}$ při amplitudě $A = 1$.

2.5 Dva bodové zdroje světla

Předpokládejme nyní, že stínítko osvětlují dva bodové zdroje světla S_1 a S_2 . Geometrické uspořádání je zřejmé z obr. 2.3.

Do bodu P dopadají nyní dvě vlny. Z bodu S_1 je to vlna

$$\psi_1 = \frac{A_1}{s_1} e^{i(\omega t - ks_1 + \phi_1(t))} \quad (2.17)$$

a z bodu S_2 vlna

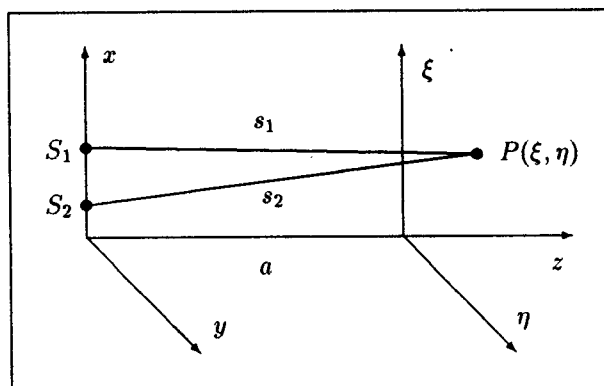
$$\psi_2 = \frac{A_2}{s_2} e^{i(\omega t - ks_2 + \phi_2(t))} . \quad (2.18)$$

Výsledná vlna v bodě P je tedy superpozicí obou těchto vln

$$\psi(P) = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.19)$$

a hledaná intenzita je

$$I(P) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) dt . \quad (2.20)$$



Obr. 2.3: Dva bodové zdroje světla osvětlují stínítko.

Po dosazení za ψ_1 a ψ_2 dostaneme

$$I(P) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\left(\frac{A_1}{s_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{s_2} \right)^2 + 2 \frac{A_1 A_2}{s_1 s_2} \cos [k(s_2 - s_1) + \phi_1(t) - \phi_2(t)] \right] dt, \quad (2.21)$$

což lze zapsat ve tvaru

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{\tau} \int_0^\tau \cos [k(s_2 - s_1) + \phi_1(t) - \phi_2(t)] dt. \quad (2.22)$$

První dva členy jsme integrovali bez problému, protože integrandy jsou na čase nezávislé. Mají fyzikální význam intenzity světla v bodě P pokud by na stínítko svítil jen zdroj S_1 nebo jen S_2 . Třetí, tzv. **interferenční** člen je však na čase závislý prostřednictvím rozdílu počátečních fází.

Abychom posoudili tuto časovou závislost, je třeba využít výsledků atomové fyziky. Podle ní doba života excitovaných stavů atomů je řádově 1 ns. Po tuto dobu může tedy atom být zdrojem světelné vlny. Během integrační doby detektoru, která je mnohonásobně delší než doba excitace, dojde mnohokrát k vyzáření vlnového klubka z bodu S_1 a podobně i z bodu S_2 . Místo bodu v matematickém slova smyslu máme na mysli spíše malou plošku zdroje, jejíž rozměr je mnohonásobně menší než vlnová délka světla a na níž i tak leží tisíce atomů. Kdy, ve který okamžik, začne vysílat vlnu bod S_1 je zcela nezávislé na tom, kdy se tak stane v bodě S_2 .

Na základě této úvahy můžeme tedy právem tvrdit, že rozdíl $\phi_1(t) - \phi_2(t)$ je náhodná funkce času a během integrační doby τ nabude všech možných hodnot z intervalu $(0, 2\pi)$ a každé hodnoty se stejnou pravděpodobností. Protože střední hodnota funkce kosinus na tomto intervalu je rovna nule, je roven nule i celý interferenční člen. Dostáváme tedy

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P). \quad (2.23)$$

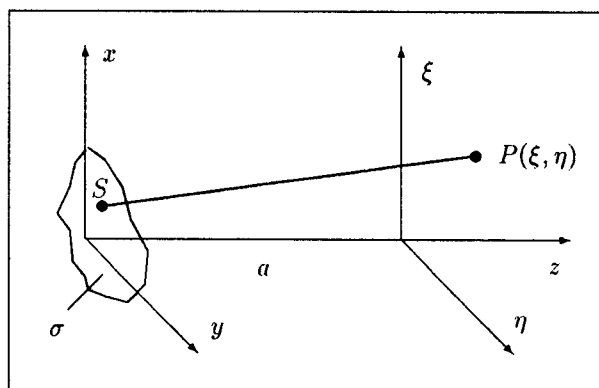
Intenzita v libovolném bodě P je tedy pouhým součtem intenzit od jednotlivých bodových

zdrojů. Dva zdroje světla, které mají tuto vlastnost se nazývají **nekoherentní**. Dvě **vlny jsou nekoherentní**, jestliže jejich fázový rozdíl je závislý na čase.

Jak jsme viděli, právě závislost fázového rozdílu na čase způsobí, že při jejich superpozici a následném výpočtu intenzity, interferenční člen vymizí. Kdyby integrační doba byla velice krátká (srovnatelná s periodou vlnění), pak by interferenční člen **nevymizel** a rozložení intenzity na stínítku by se neustále měnilo podle okamžité hodnoty fázového rozdílu $\phi_1 - \phi_2$.

2.6 Plošný zdroj světla

Výsledek výpočtu intenzity provedený v předchozím odstavci je velice užitečný, protože podstatně zjednodušuje veškeré výpočty intenzit od reálných plošných nekoherentních zdrojů světla. Takovými zdroji světla jsou např. plamen svíčky, vlákno žárovky, slunce, výbojová trubice apod., ale nikoliv lasery nebo otvory ozářené vzdálenými nekoherentními zdroji (o nich pojednáme později).



Obr. 2.4: K výpočtu osvětlení stínítka od plošného zdroje světla σ .

Vypočítejme tedy intenzitu na stínítku, které je osvětleno plošným nekoherentním zdrojem σ , jak je znázorněno na obr.2.4. Pokud bychom chápali tento zdroj jako prostou sumu svítících bodů S , pak podle rovnice (2.23) by intenzita v bodě P byla

$$I(P) = \sum_j I_j(P) . \quad (2.24)$$

Při spojitém rozložení svítících bodů na zdroji tedy platí

$$I(P) = \iint_{\sigma} \bar{I}(x, y, \xi, \eta) dx dy \quad (2.25)$$

$$I(P) = \iint_{\sigma} \frac{\bar{A}^2(x, y)}{a^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} dx dy \quad (2.26)$$

Přísně fyzikálně vzato, nemá zde integrand význam intenzity v bodě P , ale plošné hustoty intenzity v P (resp. amplitudy) vztahované na okolí bodu $S(x, y)$ (proto ten pruh nad příslušnou

veličinou). Vzhledem k tomu, že měříme jen hodnoty úměrné intenzitě, nemusíme těmto rozměrovým problémům věnovat pozornost a tím můžeme dále zjednodušit vyjadřování.

2.7 Nemonochromatický zdroj světla

Jak jsme již poznamenali výše, světelné zdroje nejsou nikdy přísně monochromatické. Je to způsobeno tím, že z atomů se šíří časově omezené harmonické vlny, které však pomocí Fourierovy transformace můžeme zapsat ve tvaru

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(r, \varepsilon) e^{i(\varepsilon + \omega)(t - r/v)} d\varepsilon, \quad (2.27)$$

kde jsme do amplitudy A zahrnuli i faktor $1/r$ odpovídající kulové vlně.

Předpokládejme stejné geometrické uspořádání, jako je na obr. 2.1 a vypočítejme intenzitu v bodě P , když vlna v bodě P je dána rovnicí (2.27), kde $r = \sqrt{a^2 + \xi^2 + \eta^2}$.

Podle definice intenzity je

$$I(P) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \psi \psi^* dt \quad (2.28)$$

Dosazením do této rovnice z (2.27) dostaneme

$$I(P) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \int A(r, \varepsilon) e^{i[(\varepsilon + \omega)(t - r/v)]} d\varepsilon \int A^*(r, \varepsilon') e^{-i[(\varepsilon' + \omega)(t - r/v)]} d\varepsilon' dt. \quad (2.29)$$

Nyní zaměníme pořadí integrace tak, abychom mohli nejdříve provést integraci podle času.

$$I(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(r, \varepsilon) A^*(r, \varepsilon') e^{-i(\varepsilon - \varepsilon')r/v} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(\varepsilon - \varepsilon')t} dt d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (2.30)$$

Integraci podle času provádíme na intervalu integrační doby detektoru τ . Pokud vyloučíme extrémně krátké hodnoty τ (srovnatelné s periodou světla) a pokud se budeme zajímat o stacionární (ve skutečnosti kvazistacionární) stavy intenzity, můžeme integrační obor rozšířit od $-\infty$ do $+\infty$. Takový integrál podle času je pak roven $2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon')$ a pro intenzitu dosáváme

$$I(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(r, \varepsilon) A^*(r, \varepsilon') e^{-i(\varepsilon - \varepsilon')r/v} 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon'. \quad (2.31)$$

Uvážíme-li nyní základní vlastnost delta funkce, můžeme provést integraci podle ε a dostaneme

$$I(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(r, \varepsilon') A^*(r, \varepsilon') d\varepsilon'. \quad (2.32)$$

Součin $A(r, \varepsilon') A^*(r, \varepsilon')$ má význam **spektrální hustoty intenzity světla** $\bar{I}(\varepsilon')$.

Tento výsledek má pro naše další úvahy velký význam, neboť nám dává návod, jak si počínat při výpočtu intenzity u nemonochromatického světla.

Z vlnového klubka si vybereme jednu ~~monochromatickou vlnu~~ s příslušnou amplitudou, vypočteme intenzitu v pozorovacím bodě P a pak provedeme integraci přes všechny frekvence vln, které se experimentu zúčastňují. Takto získaný výsledek odpovídá pak hodnotě, kterou naměří frekvenčně nezávislé detektory.

Je-li detektor frekvenčně závislý a označíme-li jeho spektrální citlivost $S(\varepsilon)$, pak integrand v rovnici (2.32) je třeba vynásobit před integrací ještě touto citlivostí.

Kapitola 3

Difrakce světla

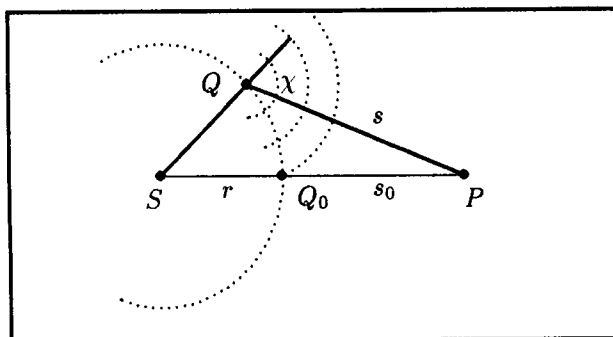
3.1 Huygensův - Fresnelův princip

Doposud jsme se zabývali pouze šířením světelných vln ve volném prostoru a počítali jsme intenzitu na stínítku, přičemž mezi zdrojem a stínítkem nebylo žádných překážek. Nyní budeme hledat odpověď na otázku, jaká bude intenzita na stínítku, když světlu do cesty vložíme překážku s otvorem, kterým bude moci světlo volně procházet a mimo tento otvor se bude plně absorbovat.

Vyřešit tento úkol nám umožní tzv. **Huygensův Fresnelův princip** (H-F). Slovně jej lze formulovat takto:

Každý bod vlnoplochy šířící se z bodového zdroje světla lze považovat za bodový zdroj sekundárních kulových vln o stejné frekvenci jakou má vlna primární. Výslednou vlnu v libovolném bodě prostoru pak dostaneme jako superpozici všech těchto sekundárních vln.

Naskýtá se nyní otázka, jak **H-F princip** souvisí s řešením vlnové rovnice. Z matematiky víme, že konkrétní řešení fyzikálního procesu, který je popsán parciální diferenciální rovnicí, převedeme na integrální problém pomocí **metody Greenových funkcí**. Pro vlnovou rovnici má Greenova funkce tvar kulové vlny $g(r, t) = \delta(r/v - t)/r$, kde $\delta(r/v - t)$



Obr. 3.1: Z každého bodu Q na vlnoploše se šíří kulové sekundární vlny, jichž superpozicí vznikne výsledná vlna v bodě P .

je Diracova delta funkce. Tato zvláštní kulová vlna se šíří radiálně rychlostí v z bodového zdroje, který leží na ploše přes níž se integruje, chceme-li najít řešení v libovolném bodě prostoru. Těmito výpočty se však zabývá teoretická optika.

V optice se často vychází z H-F principu, místo z řešení vlnové rovnice. Je to tím, že H-F princip velice dobře vystihuje a dává nahlédnout do mechanismu šíření vlnění. O jeho správnosti se konec konců můžeme přesvědčit následujícím výpočtem.

Problém formulujeme takto:

Z bodového zdroje S se šíří kulová vlna, která ve vzdálenosti r od zdroje je dána rovnicí

$$\psi(r) = \frac{A}{r} e^{i[\omega t - kr + \varphi]} . \quad (3.1)$$

V bodě P (viz obr.3.1) bude tato vlna dána rovnicí

$$\psi(r + s_0) = \frac{A}{r + s_0} e^{i[\omega t - k(r + s_0) + \varphi]} . \quad (3.2)$$

Zdůrazněme, že vlnu v bodě P jsme napsali pouze na základě toho, co víme o šíření kulových vln z primárního zdroje, bez použití H-F principu.

Nyní bude naším cílem najít vlnu v bodě P jinou cestou, a to na základě H-F principu. V bodě Q je vlna dána rovnicí

$$\psi(Q) = \frac{A}{SQ} e^{i[\omega t - kSQ + \varphi]} . \quad (3.3)$$

Tento bod je zdrojem sekundární kulové vlny, která je v bodě P dána vztahem

$$\psi(Q, P) = \frac{AK(\chi)}{SQ \cdot QP} e^{i[\omega t - k(SQ + QP) + \varphi]} . \quad (3.4)$$

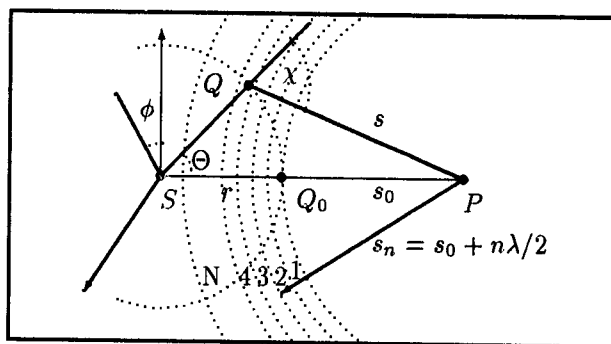
Veličinou $K(\chi)$, tzv. **faktorem sklonu**, respektujeme tu skutečnost, že každá sekundární vlna přispívá do bodu P různou hodnotou. Podle Fresnela budeme předpokládat, že faktor sklonu s rostoucím úhlem χ klesá spojitě k nule, které nabývá pro $\chi \geq \pi/2$.

Výsledná vlna v bodě P je pak dána integrálem přes tu část vlnoplochy σ , kterou je vidět z bodu P .

$$\psi(P) = \int_{\sigma} \frac{AK(\chi)}{SQ \cdot QP} e^{i[\omega t - k(SQ + QP) + \varphi]} d\sigma. \quad (3.5)$$

Výpočet tohoto integrálu provedeme zvláštním postupem, tzv. **Fresnelovou zonální konstrukcí**. Její základní myšlenka spočívá v následujícím postupu.

Kolem bodu P opišeme systém N soustředných koulí o poloměrech $s_0, s_0 + \lambda/2, s_0 + 2\lambda/2, s_0 + 3\lambda/2, \dots, s_0 + N\lambda/2$, jak je znázorněno na obr.3.2. Tyto koule rozdělí vlnoplochu na **zóny** podobné mezikružím. Integraci přes celou část vlnoplochy σ můžeme rozložit na N integrálů přes tyto zóny a ty pak sečíst. Uvnitř těchto zón můžeme totiž považovat neznámou funkci faktoru sklonu za konstantní a vytknout ji před integrál.



Obr. 3.2: Naznačení zonální konstrukce pro výpočet vlny v bodě P . Poloha bodu Q je určena úhly θ a ϕ .

Když diferenciál $d\sigma$ vyjádříme pomocí úhlových proměnných θ a ϕ , je příspěvek k vlně v bodě P od n -té zóny dán integrálem

$$\psi_n(P) = K_n \int_{\sigma_n} \frac{A}{rs} e^{i[\omega t - k(r+s) + \varphi]} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.6)$$

Místo integrační proměnné θ zavedeme novou proměnnou s tím, že na trojúhelník ΔSPQ aplikujeme kosinovou větu

$$s^2 = r^2 + (r + s_0)^2 - 2r(r + s_0) \cos \theta.$$

Diferencováním pak dostaneme

$$s ds = r(r + s_0) \sin \theta d\theta.$$

Dosazením do rovnice (3.6) je příspěvek ψ_n dán vztahem

$$\psi_n(P) = K_n \int_0^{2\pi} \int_{s_0 + (n-1)\lambda/2}^{s_0 + n\lambda/2} \frac{A}{r + s_0} e^{i[\omega t - k(r+s) + \varphi]} ds d\phi.$$

Po integraci dostaneme

$$\psi_n(P) = (-1)^n \frac{4\pi i}{k} \frac{AK_n}{r+s_0} e^{i[\omega t - k(r+s_0) + \varphi]} . \quad (3.7)$$

Výsledná vlna v bodě P pak je

$$\psi(P) = \sum_{n=1}^{n=N} \psi_n(P)$$

a tedy

$$\psi(P) = \frac{A}{r+s_0} e^{i[\omega t - k(r+s_0) + \varphi]} \frac{2\lambda}{i} \sum_{n=1}^{n=N} K_n (-1)^{n-1} . \quad (3.8)$$

Věnujme nyní pozornost výpočtu sumy faktorů sklonu. Rozepíšeme ji následovně

$$\sum_{n=1}^{n=N} K_n (-1)^{n-1} = \frac{K_1}{2} + \frac{K_1 - K_2}{2} + \frac{-K_2 + K_3}{2} + \dots + 0 = \frac{K_1}{2} \quad (3.9)$$

Vzhledem k monotónnosti funkce $K(\chi)$ dá se matematicky dokázat, že její součet je $K_1/2$. Tím je výpočet vlny v bodě P podle H-F principu skončen. Dospěli jsme k výrazu

$$\psi(P) = \frac{K_1 \lambda}{i} \frac{A}{r+s_0} e^{i[\omega t - k(r+s_0) + \varphi]} . \quad (3.10)$$

Porovnáme-li nyní tento výraz s rovnicí (3.2) vidíme, že rovnost nastane, jestliže faktor sklonu pro první zónu bude mít hodnotu $K_1 = i/\lambda = 1/\lambda e^{i\pi/2}$ a správnost H-F principu je tím dokázána.

Tzv. **Kirchhoffova teorie difrakce** vycházející přísně z elektromagnetické teorie světla dává pro faktor sklonu výraz

$$K(\chi) = \frac{1}{i\lambda} \frac{1 + \cos \chi}{2} ,$$

odkud pro 1. zónu, tj. pro $\chi = 0$ dostáváme hodnotu námi určenou na základě platnosti H-F principu. Naproti tomu pro $\chi = \pi/2$ nedostáváme nulu, jak Fresnel předpokládal. Tento výsledek Kirchhoffovy teorie připomíná polarizační faktor plynoucí z rozptylu dipólových vln a celý problém není v knihách o difrakci náležitě objasněn.

Pro naše další aplikace H-F principu na problémy difrakce světla, není úhlová závislost faktoru sklonu rozhodující, neboť pro všechny praktické difrakční problémy je $\chi \ll 1$. Spíš je třeba vždy pamatovat na to, že faktor sklonu je úměrný $1/\lambda$. Poznamenejme ještě, že H-F princip je platný jak pro skalární, tak pro vektorové vlny a jistým způsobem nám dává nahlédnout do vnitřní struktury či mechanismu šíření vln, jak kulových, tak rovinných (tj. kulových ve velké vzdálenosti od zdroje).

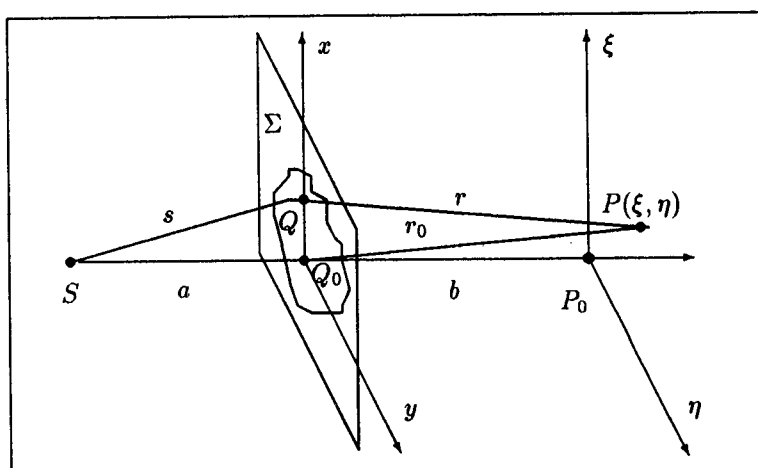
H-F princip nám umožní významně pokročit ve studiu vlastností šíření světla ve vakuu hned ve dvou směrech:

- Difrakce světla na nepropustných překážkách s otvory.
- Šíření koherenčních vlastností světla z nekoherentních zdrojů.

3.2 Difrakce světla a rozdělení difrakčních jevů

Každé prostorové omezení vlny, ať rovinné nebo kulové, např. nějakým otvorem v jinak nepropustném stínítku, vede k jevu, který nazýváme **difrakce**. Pouze v některých případech však pozorujeme difrakční jevy vyznačující se typickým střídáním maxim a minim intenzity světla na stínítku. Ve kterých případech to bude, vyplýne z geometrie experimentu a z vlastností zdroje světla. H-F princip nám umožní tyto případy jednoznačně předpovědět.

Jestliže nepropustné stínítko pohltí část vlnoplochy vycházející ze zdroje S , pak výsledná vlna v bodě P za stínítkem bude výsledek superpozice všech sekundárních vln jejichž zdroje Q leží v rovině otvoru ve stínítku (viz obr. 3.3). Vlna v bodě P je pak dána tzv. **difrakčním**



Obr. 3.3: Pro zjednodušení úvah jsme bodový monochromatický zdroj S položili na normálu k rovinnému stínítku, jejíž pata Q_0 padne poblíž středu difrakčního otvoru Σ .

integrálem

$$\psi(P) = A \int_{\Sigma} \frac{K(\chi)}{SQ \cdot QP} e^{i(\omega t - k(SQ + QP))} dx dy . \quad (3.11)$$

Přitom je použito označení

$$SQ = s = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$$

$$QP = r = \sqrt{b^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

To, že faktor sklonu je za integračním znaménkem, je zcela právem, protože úhel χ závisí jak na poloze bodu Q , tak na poloze P .

Pro všechny difrakční problémy, kterými se budeme dále zabývat, bude splněn předpoklad, že amplituda sekundárních vln závisí tak slabě na poloze bodu Q , že tuto závislost nemusíme brát v při výpočtech v úvahu. Bude totiž platit, že $a, b \gg QQ_0, PP_0$. Difrakční integrál má pak po dosazení K_1 za faktor sklonu tvar

$$\psi(P) = \frac{iA}{\lambda ab} \int_{\Sigma} e^{i(\omega t - k(r+s))} dx dy . \quad (3.12)$$

Pro praktické výpočty bychom mohli dnes, v době výkonných počítačů, již přistoupit k numerickému výpočtu vlny $\psi(P)$, tj. reálné a imaginární části $\psi(P)$, které má pak umožní vypočítat intenzitu $I(\xi, \eta) = \psi\psi^*$ nebo i fázi jako $\varphi = \arctan(\Im\psi/\Re\psi)$. v libovolném bodě $P(\xi, \eta)$ na stínítku.

Přes tuto příznivou situaci podrobíme difrakční integrál (3.12) další matematické analýze, jejíž fyzikální význam v závěru jistě vynikne.

Zavedeme do difrakčního integrálu **střední vzdálenost** bodu P od difrakčního otvoru výrazem $r_0 = \sqrt{b^2 + \xi^2 + \eta^2}$, která nezávisí na integračních proměnných x a y a faktor $e^{i[\omega t - k(r_0 + a)]}$ můžeme vytknout před integrál. Za integračním znaménkem v exponentu zůstane **fázová funkce**

$$\phi = k(r - r_0 + s - a) .$$

Je zřejmé, že platí

$$r = \sqrt{r_0^2 - 2(x\xi + y\eta) + x^2 + y^2} = r_0 \sqrt{1 - \frac{2(x\xi + y\eta)}{r_0^2} + \frac{x^2 + y^2}{r_0^2}} \quad (3.13)$$

$$s = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} = a \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}} .$$

Vyjádříme-li nyní tyto odmocniny pomocí binomické řady a omezíme se pouze na prvé dva členy, dostaneme pro ϕ přibližné vyjádření

$$\phi = k \left(-\frac{x\xi + y\eta}{r_0} + \frac{x^2 + y^2}{2r_0} + \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) . \quad (3.14)$$

Všechny další členy binomické řady by obsahovaly x a y ve třetí a ve vyšších mocninách. Z hlediska výpočtu integrálu je pak významné takové přibližné vyjádření fázové funkce ϕ , které obsahuje integrační proměnné pouze v první mocnině.

$$\phi = -k \frac{x\xi + y\eta}{r_0} . \quad (3.15)$$

Takové zjednodušení si však můžeme dovolit jen tehdy, když pro všechny body Q , tzn. prakticky pro každou úsečku QQ_0 , bude platit $1 \gg k(QQ_0)^2/a$ a současně $1 \gg k(QQ_0)^2/r_0$. Toto jsou důležité omezující podmínky, které musíme splnit, kdykoliv použijeme tohoto přibližného vyjádření pro difrakční integrál.

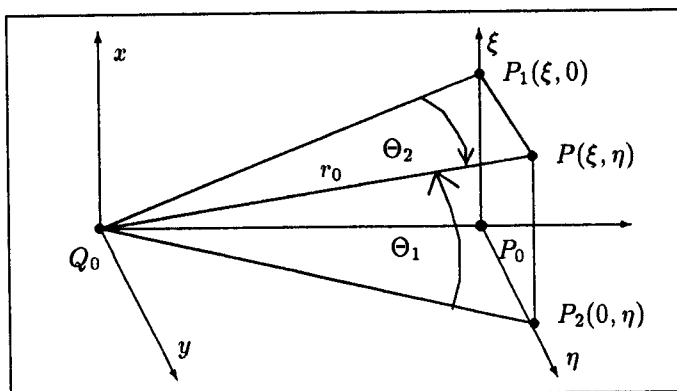
Jak vyplývá z geometrické situace na obr.3.4 trojúhelníky ΔP_1PQ_0 a ΔP_2PQ_0 jsou pravoúhlé a můžeme tedy místo souřadnicemi ξ a η určovat polohu bodu P tzv. **difrakčními úhly** Θ_1 a Θ_2 , které jsou dány vztahy $\sin \Theta_1 = \xi/r_0$ a $\sin \Theta_2 = \eta/r_0$.

Po těchto zjednodušujících úpravách má difrakční integrál tvar

$$\psi(P) = \frac{iA}{\lambda ab} e^{i[\omega t - k(a+r_0)]} \int_{\Sigma} e^{ik(x \sin \Theta_1 + y \sin \Theta_2)} dx dy . \quad (3.16)$$

Celý výraz před integrálem označme A_D jako novou **komplexní difrakční amplitudu**. Je zřejmé že platí

$$A_D A_D^* = I_D = A^2 / (a r_0 \lambda)^2 . \quad (3.17)$$



Obr. 3.4: Zavedení difrakčních úhlů Θ_1 a Θ_2 pro popis intenzity na stínítku místo souřadnic ξ a η .

Po tomto označení dostáváme

$$\psi(\xi, \eta) = A_D \int_{\Sigma} e^{ik(x\xi + y\eta)/r_0} dx dy . \quad (3.18)$$

Difrakční jevy, které popisuje integrál (3.16) nebo (3.18) se nazývají **Fraunhoferovy difrakční jevy** na rozdíl od **Fresnelových difrakčních jevů**, které odpovídají takovému přibližnému vyjádření fázové funkce ϕ , do něhož bychom zahrnuli i všechny členy binomického rozvoje obsahující x a y ve druhých mocninách.

Výpočet intenzity u Fresnelových difrakčních jevů se provádí jen numericky. Poznamenejme však, že k odhadu intenzity u těchto jevů je možné použít i **zonální konstrukce** užité výše při verifikaci platnosti H-F principu. O některých zajímavých aplikacích a vlastnostech Fresnelovy difrakce pojednáme stručně později.

Fraunhoferův difrakční integrál (3.18) je formálně shodný s integrálem Fourierovy transformace **funkce propustnosti difrakčního stínítka** $T(x, y)$. Tuto funkci definujeme tak, že je rovna 1 ve všech bodech difrakčního otvoru a nule mimo něj.

$$\psi(\xi, \eta) = A_D \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) e^{ik(x\xi + y\eta)/r_0} dx dy . \quad (3.19)$$

Intenzita světla je pak podle definice $I(\xi, \eta) = |\psi|^2$.

Na Fraunhoferově difrakci je zajímavé to, že pozorovací stínítko je vlastně tak daleko, že poloha bodu P je dostatečně přesně určena jen difrakčními úhly, tj. pouze difrakčním směrem. Toto lze také interpretovat tak, jakoby, díky velké vzdálenosti mezi pozorovacím a difrakčním stínítkem, se sekundární vlny odpovídající H-F principu v bodě P jevíly jako rovinné. Matematicky to znamená, že fáze všech vln došlých do bodu P jsou lineární funkcí polohy bodu Q .

Podmínka kladená na vzdálenost QQ_0 , aby se jednalo o Fraunhoferovu difrakci, je shodná s požadavkem, aby difrakční otvor byl mnohem menší než plocha 1. Fresnelovy zóny.

Poloměr n -té Fresnelovy zóny je dán vztahem

$$\rho_n = \sqrt{(b + n\lambda/2)^2 - b^2},$$

odkud pro poloměr první zóny dostáváme přibližné vyjádření

$$\rho_1 \approx \sqrt{\lambda b}.$$

Tedy

$$QQ_0 < \sqrt{\lambda b}.$$

Do bodu $P(0, 0)$ přicházejí tedy vlny z bodů Q a jejich fáze se liší navzájem o méně než π .

3.3 Babinetův princip

H-F princip a difrakční integrál (3.12) dovolují zformulovat tzv. **Babinetův princip**. Nejdříve však definujme pojem **komplementární stínítka**. Jsou to taková dvě stínítka Σ_+ a Σ_- , že jejich superpozicí vytvoříme nepropustnou rovinu. Podle H-F principu platí

$$\psi(P) = \psi_1(P) + \psi_2(P), \quad (3.20)$$

kde

$$\psi_1(P) = \int_{\Sigma_+} \frac{AK(\chi)}{sr} e^{i[\omega t - k(s+r)]} dx dy$$

a

$$\psi_2(P) = \int_{\Sigma_-} \frac{AK(\chi)}{sr} e^{i[\omega t - k(s+r)]} dx dy.$$

Důkaz tohoto tvrzení je po matematické stránce zřejmý: Integraci přes celou příslušnou část vlnoplochy u H-F principu jsme jen rozdělili na dvě části a tedy na dva integrály přes komplementární stínítka.

Zdůrazněme však, že aspoň jeden z integrálů je třeba provést přes celou (tj. nekonečnou) rovinu difrakčního stínítka a právě matematické obtíže spojené s určením hodnoty tohoto integrálu můžeme obejít pomocí Babinetova principu tím, že od vlny, kterou bychom v bodě P dostali, kdyby difrakčního stínítka vůbec nebylo, odečteme vlnu, kterou bychom v bodě P dostali od komplementárního stínítka, prakticky od stínítka s difrakčním otvorem.

3.4 Fraunhoferova difrakce

V následujících několika odstavcích budeme aplikovat Fraunhoferův difrakční integrál na některé jednoduché příklady difrakce světla, se kterými se budeme setkávat i v dalších oblastech optiky, protože mají zajímavé aplikace, např. při zobrazování předmětů čočkami, nebo při formování difrakčních jevů ve spektrometrech. Z těchto důvodů budeme provedené výpočty podrobněji analyzovat.

3.4.1 Difrakce na obdélníkovém otvoru

Předpokládejme, že difrakční otvor je obdélník, který má ve směru osy x rozměr p a ve směru osy y rozměr q a bod Q_0 zvolíme ve středu obdélníka. Podle rovnice (3.18) je vlna v bodě $P(\xi, \eta)$ dána vztahem

$$\psi(\xi, \eta) = A_D \int_{-q/2}^{+q/2} \int_{-p/2}^{+p/2} e^{ik(x\xi+y\eta)/r_0} dx dy. \quad (3.21)$$

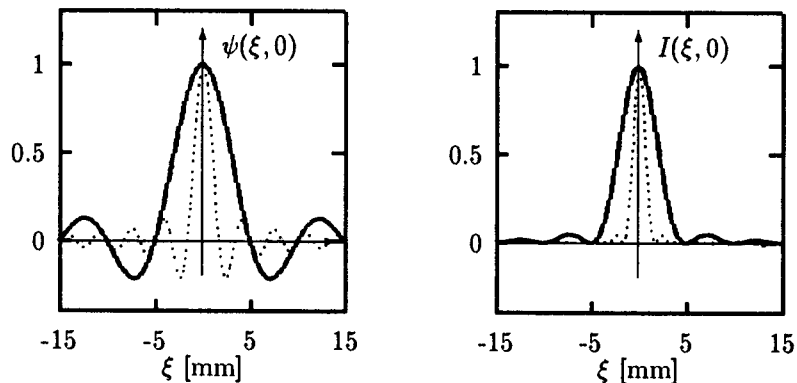
Po integraci a dosazení mezi dostáváme

$$\psi(\xi, \eta) = A_D p q \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0}. \quad (3.22)$$

Intenzita je pak dána výrazem

$$I(\xi, \eta) = \psi\psi^* = \left[\frac{A_D p q}{ar_0\lambda} \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \right]^2. \quad (3.23)$$

Na obr.3.5 je graf závislosti $\psi(\xi, 0)$ a odpovídající intenzity $I(\xi, 0)$ pro dvě různé hodnoty p . Z průběhu této funkce je vidět, že šířka centrálního maxima intenzity ξ_0 uvažovaná



Obr. 3.5: Graf průběhu amplitudy a intenzity podél osy ξ pro dvě různé velikosti otvoru. $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{m}$, $r_0 = 10 \text{m}$, $p = 1 \text{mm}$ (plně) a $p = 2 \text{mm}$ (tečkovaně). Při této geometrii je oprávněné zanedbání kvadratických členů v binomickém rozvoji, tj. že $p^2 \ll 2\pi\lambda r_0$.

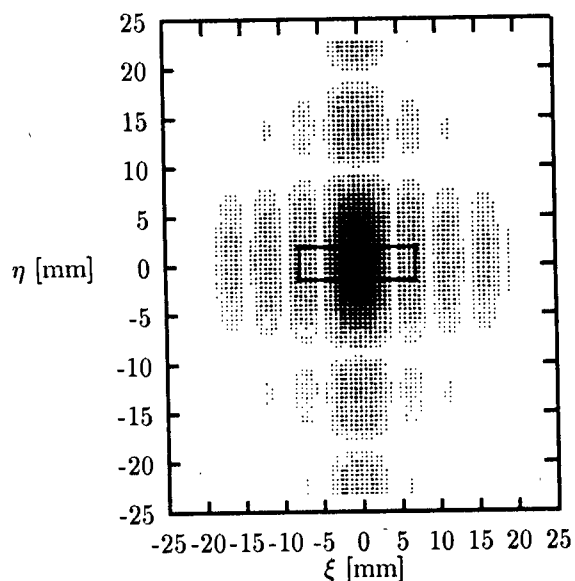
v jeho polovině je rovna přibližně souřadnici prvního nulového bodu. Ten nastane, když $kp\xi_0/2r_0 = \pi$ a odtud

$$\xi_0 = \lambda \frac{r_0}{p}.$$

Tento odhad šířky centrálního maxima intenzity ukazuje na velice zajímavou a charakteristickou vlastnost Fraunhoferovy difrakce, že totiž čím je otvor menší, tím je difrakční maximum širší.

3.4.2 Youngův pokus

Název Youngův pokus má v sobě historický aspekt, protože sehrál významnou roli v budování vlnových představ o světle. Pomocí něj byla např. poprvé změřena vlnová délka

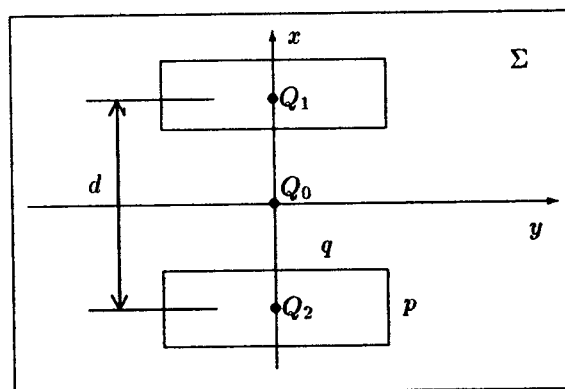


Obr. 3.6: Vzájemná poloha obdélníku a rozložení intenzity při Fraunhoferově difrakci na pozorovacím stínítku. Všimněme si reciprocitě rozměrů a symetrie difrakčního obrazce a difrakčního otvoru.

světla. Jedná se vlastně o Fraunhoferovu difrakci na dvou obdélníkových otvorech.

Tento konkrétní příklad zdánlivě nepřinese nic nového, protože jde jen o mechanické dosazení do difrakčního integrálu s obdélníkovými difrakčními otvory. To je pravda, pokud jde o výpočet vlny v bodě P . Zajímavá situace nastane teprve až při výpočtu intenzity, kdy budeme sledovat interferenci vln od jednotlivých otvorů.

Předpokládejme, že středy dvou stejných obdélníkových otvorů mají vzdálenost d . Jejich poloha je zřejmá z obr. 3.7.



Obr. 3.7: Vzájemná poloha obdélníkových otvorů na difrakčním stínítku pro Fraunhoferovu difrakci.

Pro tento konkrétní případ má difrakční integrál tvar

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) = & A_D \int_{-q/2}^{+q/2} \int_{-d/2-p/2}^{-d/2+p/2} e^{ik(x\xi+y\eta)/r_0} dx dy + \\ & + A_D \int_{-q/2}^{+q/2} \int_{d/2-p/2}^{d/2+p/2} e^{ik(x\xi+y\eta)/r_0} dx dy . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Integrací prvního členu v této rovnici dostaneme vlnu ψ_1 v bodě P od jednoho otvoru

$$\psi_1(\xi, \eta) = A_D p q e^{-ikd\xi/2r_0} \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \quad (3.25)$$

a integrací druhého členu vlnu ψ_2 od druhého otvoru.

$$\psi_2(\xi, \eta) = A_D p q e^{ikd\xi/2r_0} \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} . \quad (3.26)$$

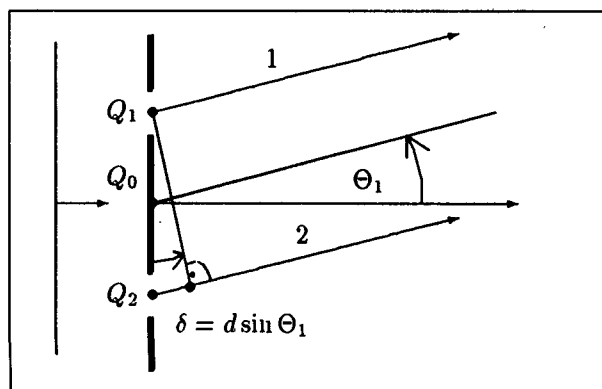
Výsledná vlna $\psi = \psi_1 + \psi_2$ a intenzita

$$I(\xi, \eta) = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) .$$

Po dosazení do této rovnice a algebraické úpravě dostaneme

$$I(\xi, \eta) = \left[\frac{Apq}{ar_0\lambda} \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \right]^2 [1 + 1 + 2 \cos(kd\xi/r_0)] . \quad (3.27)$$

Tento výraz je zajímavý tím, že se zde opět objevil interferenční člen (v němž funkce kosinus obsahuje dráhový rozdíl interferujících vln), jako tomu je vždy ve výrazu pro intenzitu, když dochází k interferenci (superpozici) dvou vln.



Obr. 3.8: Na difrakční stínítko dopadá rovinná vlna. Vzdálenost $Q_1Q_2 = d$ a dráhový rozdíl δ vln 1 a 2 je $d \sin \Theta_1$.

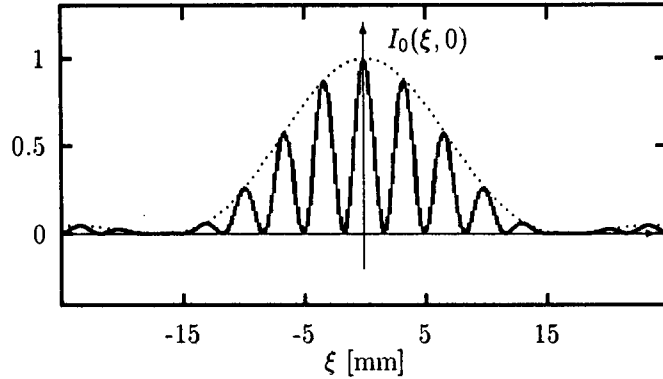
Názorná interpretace argumentu kosinu v interferenčním členu vyplývá z obr. 3.8. Fraunhoferova difrakce odpovídá takové geometrické situaci, kdy v místě pozorování je možné již považovat difraktované vlny za rovinné a kdy i na stínítko dopadá rovinná vlna. Interferenční člen bude nabývat maximální hodnoty, tj. 2, když jeho argument bude celistvým násobkem 2π . Tedy

$$2\pi N = \frac{k\xi d}{r_0} = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta_1$$

nebo když

$$\delta = d \sin \Theta_1 = N \lambda ,$$

kde δ je dráhový rozdíl paprsků vycházejících ze středů difrakčních otvorů. Závislost intenzity na stínítku podél osy ξ daná rovnicí (3.27) je na obr. 3.9.



Obr. 3.9: Rozložení intenzity na stínítku podél osy ξ pro tyto geometrické rozměry: $\lambda = 500\text{nm}$, $r_0 = 10\text{m}$, $p = 0.3\text{mm}$ a pro $d = 3\text{mm}$.

Všimněme si, že vzdálenost interferenčních maxim je určována vzdáleností d , zatímco jejich intenzitní maxima jsou modulována funkcí, která je totožná s difrakční intenzitou na jednom otvoru.

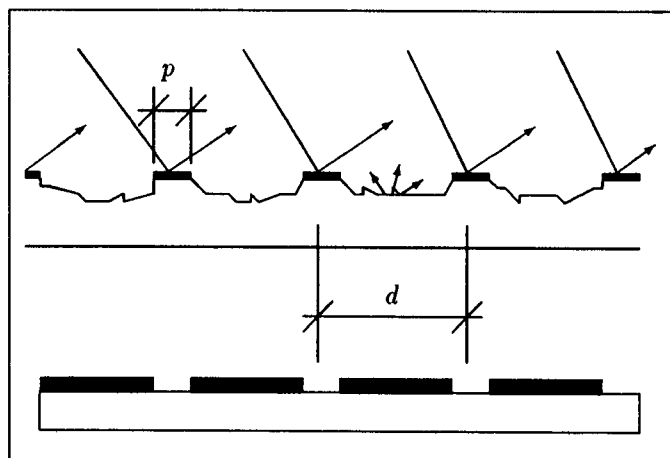
3.4.3 Difrakce na optické lineární mřížce

Optickou lineární mřížkou rozumíme takové difrakční stínítko, které je tvořeno M obdélníkovými otvory, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o **mřížkovou konstantu** d . Její praktická realizace však může být rozličná. Mřížky ryté na skle v místě vrypu silně rozptylují světlo a tím se vrypy chovají prakticky jako nepropustné (neodrážející) prostředí. V současnosti se mřížky vyrábějí výhradně litografickou cestou a jejich mřížkové konstanty mají hodnotu od $5\mu\text{m}$ výše. Výpočet Fraunhoferovy difrakce bude úzce navazovat na postup a mezivýsledky z předchozího odstavce. Difrakční integrál se rozpadne na M integrálů přes identické obdélníky. Nejdříve tedy vypočteme vlnu v pozorovacím bodě P od m -tého otvoru a tyto vlny od všech otvorů pak sečteme. Pro jednoduchost výpočtu bod Q_0 zvolíme ve středu prvního obdélníka. Vlna od m -tého obdélníka je pak dána integrálem

$$\psi_m(P) = A_D \int_{-q/2}^{+q/2} \int_{md-p/2}^{md+p/2} e^{ik(x\xi+y\eta)/r_0} dx dy . \quad (3.28)$$

Po provedení integrace dostáváme

$$\psi_m(P) = A_D p q e^{-ikdm\xi/r_0} \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} . \quad (3.29)$$



Obr. 3.10: Schéma mřížky na odraz vytvořené rytím a mřížky na průchod s litograficky nanesenou tenkou absorbující (kovovou) vrstvou.

Výsledná vlna je tedy dána součtem

$$\psi(P) = \sum_{m=1}^{m=M} \psi_m(P) \quad (3.30)$$

$$\psi(P) = A_D p q \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \sum_{m=1}^{m=M} e^{-ikdm\xi/r_0}$$

Z tohoto výrazu je už zřejmé, že výsledná vlna je součtem geometrické řady s kvocientem $e^{-ikd\xi/r_0}$ a její součet je roven

$$\psi(P) = A_D p q \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \frac{e^{-ikdM\xi/r_0} - 1}{e^{-ikd\xi/r_0} - 1} \quad (3.31)$$

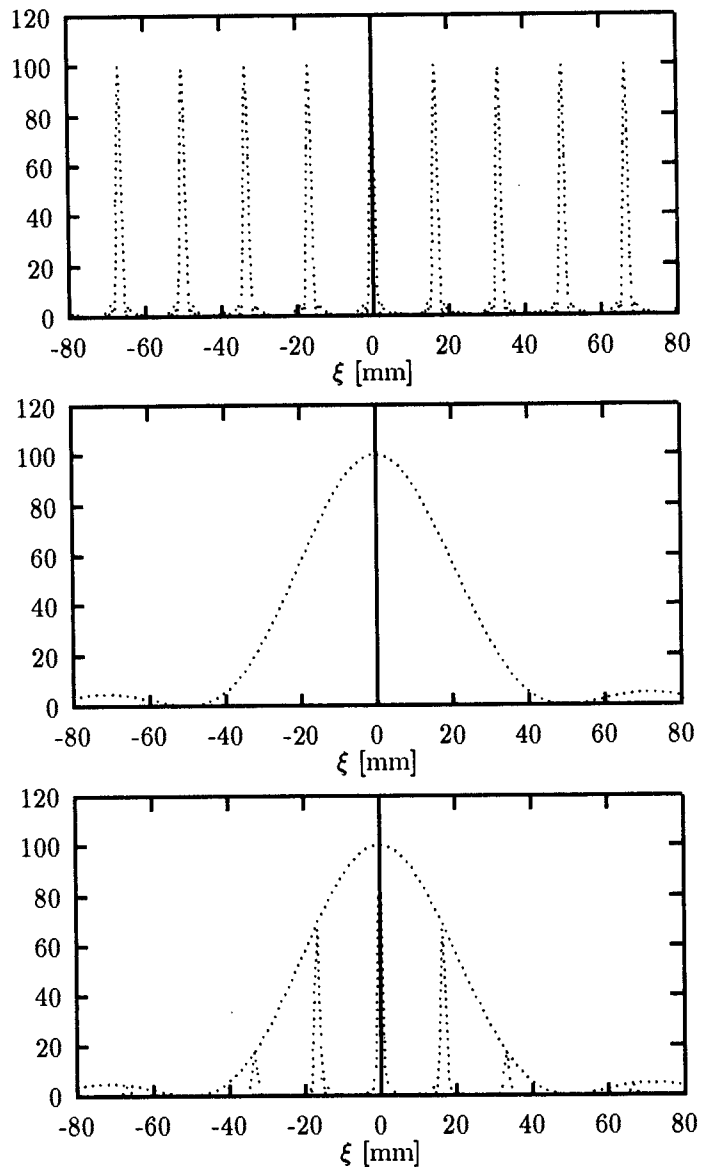
Nyní při výpočtu intenzity v bodě P jistě oceníme výhodu používání komplexní symboliky pro vlny, protože neustále platí, že $I(P) = \psi(P)\psi(P)^*$ bez ohledu na složitost výrazu. Po algebraické úpravě dostaneme

$$I(P) = \left[A_D p q \frac{\sin(kp\xi/2r_0)}{kp\xi/2r_0} \frac{\sin(kq\eta/2r_0)}{kq\eta/2r_0} \right]^2 \left[\frac{\sin(kdM\xi/2r_0)}{\sin(kd\xi/2r_0)} \right]^2 \quad (3.32)$$

Když nahlédneme do struktury tohoto výrazu, vidíme že jde o součin dvou faktorů. První odpovídá difraktované intenzitě na jednom obdélníkovém otvoru – **otvorový faktor** a druhý je výsledkem interference vln od jednotlivých otvorů.

Analýzujeme tento druhý, **mřížkový**, faktor podrobněji. Maximální hodnotu bude nabývat vždy, když jmenovatel se bude blížit k nule, tzn. když

$$kd\xi/2r_0 = N\pi,$$



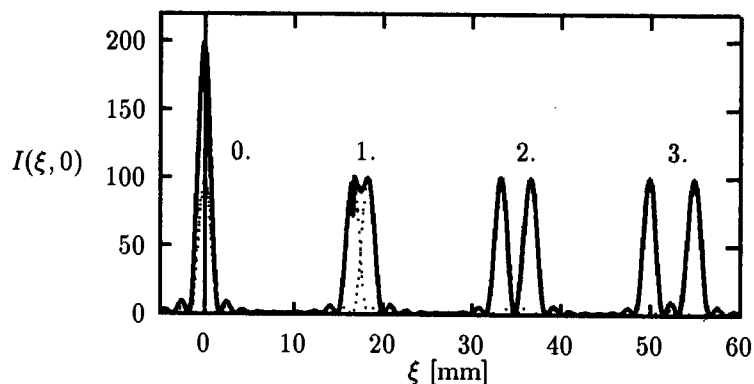
Obr. 3.11: Grafy mřížkového faktoru, otvorového faktoru a jejich součinu pro mřížku o parametrech $M = 10$, $d = 0.1\text{mm}$, $p = 0.01\text{mm}$ a $\lambda = 500\text{nm}$.

kde N je celé číslo. Zavedeme-li zde příslušný difrakční úhel dostaneme opět nám již známou podmínku pro polohu maxima

$$d \sin \theta_{1,N} = N \lambda , \quad (3.33)$$

z níž plyne, že **maximum intenzity difrakce** nastane, když dráhový rozdíl mezi vlnami od dvou sousedních otvorů je násobkem vlnové délky. Číslo N pak určuje **řád difrakčního maxima**. Šířku tohoto maxima zase odhadneme z polohy prvního nulového bodu čitatele mřížkového faktoru pro N -tý řád. Ten nastane, když

$$k M d (\xi_N + \delta) / 2r_0 = M N \pi + \pi$$



Obr. 3.12: Grafy mřížkového faktoru pro počet otvorů $M = 20$, $d = 0.1\text{mm}$ a dvě blízké vlnové délky $\lambda_1 = 500\text{nm}$ $\lambda_2 = 510\text{nm}$. Z grafu je vidět, jak s rostoucím řádem difrakce roste rozlišení difrakčních maxim odpovídající různým vlnovým délkám. U prvního řádu k rozlišení vůbec nedošlo.

nebo jinak, když

$$\frac{Md}{\lambda} \sin(\Theta_{1,N} + \Delta\Theta) = MN + 1.$$

Protože $\Delta\Theta \ll 1$ dostáváme dále

$$\frac{Md}{\lambda} (\sin \Theta_{1,N} + \Delta\Theta \cos \Theta_{1,N}) = MN + 1.$$

První člen v této rovnici má hodnotu MN a její úpravou pak pro **úhlovou šířku difrakčního maxima** dostáváme

$$\Delta\Theta = \frac{\lambda}{Md \cos \Theta_{1,N}}. \quad (3.34)$$

Difrakční mřížka dává tedy tím ostřejší maxima intenzity, čím více otvorů mřížka obsahuje. Díky této vlastnosti a díky závislosti polohy maxima difrakce na vlnové délce podle rovnice (3.33) se lineárních mřížek užívá ve **spektrometrech** k analýze spektrálního složení světla.

Každá spektrální čára o vlnové délce λ_j vytvoří na stínítku samostatné maximum jehož šířka daná rovnicí (3.34). Tato šířka difrakčního maxima pak omezuje **rozlišovací schopnost** takového spektrometru. Označme $\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_j$, a $\lambda = (\lambda_j + \lambda_j)/2$. Diferencováním rovnice (3.33) dostáváme

$$d \cos \Theta_{1,N} \Delta\Theta = N \Delta\lambda.$$

Z této rovnice a z původní rovnice nediferencované pak dostaneme

$$\Delta\Theta = \tan \Theta_{1,N} \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Aby nastalo rozlišení uvažovaných dvou spektrálních čar, musí být tato úhlová vzdálenost větší, než je šířka difrakčního maxima daná rovnicí (3.34). Tato nerovnost nás dovede ke konečné podmínce

$$\Delta\lambda \gg \frac{\lambda}{MN}.$$

Naše dosavadní analýza výrazu pro intenzitu difrakce na lineární mřížce se týkala pouze směru osy ξ . Ve směru osy η je intenzita určována pouze difrakcí na jednom otvoru. Čím větší bude tedy rozměr otvoru q , tím ostřejší bude difrakční maximum ve směru η . Tento výsledek je správný, protože předpokládáme, že na mřížku dopadá vlna z bodového zdroje S a celá mřížka splňuje geometrické podmínky pro vznik Fraunhoferovy difrakce.

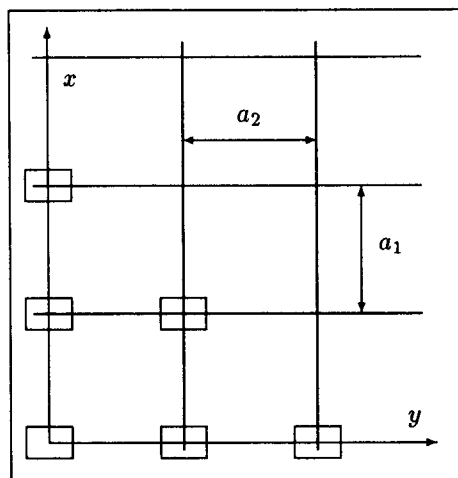
Geometrické podmínky pro vznik Fraunhoferovy difrakce (zanedbání kvadratických členů v přibližném vyjádření fázové funkce) jsou velice nepříznivé pro experimentální využití difrakce na mřížkách.

$$1 \gg k(x^2 + y^2)/2a = kL^2/2a = \pi L^2/a\lambda$$

Mřížka o velikosti $L = Md = 1\text{cm}$ by pro $\lambda = 500\text{nm}$ musela být ve vzdálenosti větší než 1 km. Naštěstí však existují čočky a jejich příznivé vlastnosti a ty nám umožní provádět experimenty s Fraunhoferovou difrakcí v běžných laboratorních podmínkách, jak o tom pojednáme později.

3.4.4 Difrakce na plošné mřížce

Naším úkolem v tomto odstavci bude aplikovat Fraunhoferův integrál na difrakci na plošné, pro jednoduchost pravoúhlé, mřížce, která má ve směru osy x N_1 otvorů a mřížkovou konstantu a_1 a ve směru osy y N_2 a mřížkovou konstantu a_2 . V každém bodě mřížky necht' se nachází obdélníček se stranou p ve směru osy x a stranou q ve směru osy y . Budeme postupovat podobně jako při výpočtu difrakce na lineární mřížce. Vypočteme nejdříve vlnu v bodě P na pozorovacím stínítku od n -tého otvoru a pak výslednou vlnu jako superpozici těchto vln. Některý střed n -tého otvoru má souřadnice $x_1 = a_1 n_1$ a $y_2 = a_2 n_2$. Pak vlna od



Obr. 3.13: Rozložení difrakčních otvorů tvořících plošnou mřížku na difrakčním stínítku. Ve směru osy x je N_1 a ve směru osy y je N_2 otvorů.

tohoto otvoru je dána vztahem

$$\psi_{n_1, n_2}(P) = A_D \int_{n_2 a_2 - q/2}^{n_2 a_2 + q/2} \int_{n_1 a_1 - p/2}^{n_1 a_1 + p/2} e^{ik(x \sin \Theta_1 + y \sin \Theta_2)} dx dy. \quad (3.35)$$

Po provedení integrace dostáváme

$$\psi_{n_1, n_2}(P) = A_D p q e^{-ik a_1 n_1 \sin \Theta_1} e^{-ik a_2 n_2 \sin \Theta_2} \frac{\sin(kp \sin \Theta_1/2)}{kp \sin \Theta_1/2} \frac{\sin(kq \sin \Theta_2/2)}{kq \sin \Theta_2/2}. \quad (3.36)$$

Výsledná vlna v pozorovacím bodě, jehož poloha je určena difrakčními úhly Θ_1 a Θ_2 , je dvojnásobná suma

$$\psi(\Theta_1, \Theta_2) = \sum_{n_1=1}^{n_1=N_1} \sum_{n_2=1}^{n_2=N_2} \psi_{n_1, n_2}(P).$$

Vlnu ψ_{n_1, n_2} můžeme napsat jako součin dvou výrazů, z nichž jeden závisí jen na sčítacím indexu n_1 a druhý jen na n_2 . Tím se i dvojnásobná suma rozpadne na součin dvou řad:

$$\psi(\Theta_1, \Theta_2) = A_p A_q \sum_{n_1=1}^{n_1=N_1} e^{-ik a_1 n_1 \sin \Theta_1} \sum_{n_2=1}^{n_2=N_2} e^{-ik a_2 n_2 \sin \Theta_2}, \quad (3.37)$$

kde

$$A_p A_q = p q A_D \frac{\sin(kp \sin \Theta_1/2)}{kp \sin \Theta_1/2} \frac{\sin(kq \sin \Theta_2/2)}{kq \sin \Theta_2/2},$$

což je vlna difraktovaná jedním obdélníkovým otvorem. Nyní již je zřetelně vidět, jde o součin dvou geometrických řad, takže dostáváme

$$\psi(\Theta_1, \Theta_2) = A_p A_q \frac{e^{ik a_1 N_1 \sin \Theta_1} - 1}{e^{ik a_1 \sin \Theta_1} - 1} \frac{e^{ik a_2 N_2 \sin \Theta_2} - 1}{e^{ik a_2 \sin \Theta_2} - 1}. \quad (3.38)$$

Nyní již snadno vypočteme intenzitu tím, že tuto vlnu vynásobíme vlnou k ní komplexně sdruženou (u všech i změnímme znaménko). Jak víme, výsledek této operace je reálná, vždy kladná funkce, protože jde o kvadrát absolutní hodnoty komplexního čísla. Po provedení dostáváme

$$I(\Theta_1, \Theta_2) = [A_D A_p A_q]^2 \left[\frac{\sin(k a_1 N_1 \sin \Theta_1/2)}{\sin(k a_1 \sin \Theta_1/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(k a_2 N_2 \sin \Theta_2/2)}{\sin(k a_2 \sin \Theta_2/2)} \right]^2. \quad (3.39)$$

Vidíme, že výraz, který popisuje rozložení intenzity na stínítku, je součinem dvou faktorů: **otvorové funkce** $O(\Theta_1, \Theta_2)$ a **mřížkové funkce** $M(\Theta_1, \Theta_2)$, kde

$$O(\Theta_1, \Theta_2) = I_D \left[\frac{\sin(kp \sin \Theta_1/2)}{kp \sin \Theta_1/2} \frac{\sin(kq \sin \Theta_2/2)}{kq \sin \Theta_2/2} \right]^2, \\ M(\Theta_1, \Theta_2) = \left[\frac{\sin(k a_1 N_1 \sin \Theta_1/2)}{\sin(k a_1 \sin \Theta_1/2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(k a_2 N_2 \sin \Theta_2/2)}{\sin(k a_2 \sin \Theta_2/2)} \right]^2. \quad (3.40)$$

Otvorová funkce s rostoucími difrakčními úhly klesá mnohem pomaleji než mřížková funkce, protože $p \ll a_1$ a $q \ll a_2$. Mřížková funkce má ostrá maxima, která nastanou, vždy, když jmenovatelé obou zlomků se budou rovnat nule, to je když

$$k a_1 \sin \Theta_1/2 = H \pi \quad (3.41)$$

$$k a_2 \sin \Theta_2/2 = K \pi,$$

kde $H = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a $K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Po jednoduché úpravě dostaneme pro maxima mřížkové funkce podmínky

$$a_1 \sin \Theta_{1,H} = H\lambda \quad (3.42)$$

$$a_2 \sin \Theta_{2,K} = K\lambda .$$

Vyšetřme nyní podrobněji bezprostřední okolí maxima řádu (H,K) . Zavedme nové úhlové proměnné vztahy

$$\Theta_1 = \Theta_{1,H} + \varepsilon_1$$

$$\Theta_2 = \Theta_{2,H} + \varepsilon_2 .$$

Když tyto nové proměnné dosadíme do mřížkové funkce a budeme předpokládat, že $\varepsilon_1 \ll 1$ a $\varepsilon_2 \ll 1$ a vezmeme v úvahu podmínky pro příslušné maximum z rovnic (3.41), dostaneme pro mřížkovou funkci výraz

$$M_{HK}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left[\frac{\sin(ka_1 N_1 \varepsilon_1 / 2)}{ka_1 \varepsilon_1 / 2} \right]^2 \left[\frac{\sin(ka_2 N_2 \varepsilon_2 / 2)}{ka_2 \varepsilon_2 / 2} \right]^2 , \quad (3.43)$$

který sice platí jen pro malé difrakční úhly, kdy jejich kosinus můžeme nahradit jedničkou, ale na druhé straně má tu zajímavou vlastnost, že je formálně shodný s výrazem pro Fraunhoferovu difrakci na obdélníku, který má rozměry $L_1 = N_1 a_1$ a $L_2 = N_2 a_2$. Plošná mřížka, která tvoří vnitřní strukturu tohoto velkého obdélníka vlastně způsobila, že se difrakce na velkém obdélníku mnohokrát opakuje. Intenzita těchto násobných difrakcí je modulována v daném místě intenzitou difrakce na jednom otvoru mřížky.

Difrakční maxima tvoří na pozorovací stínítku opět pravouhlou mřížku, jejichž maxima jsou od sebe vzdálená o úhly

$$\Delta\Theta_1 = \lambda/a_1$$

$$\Delta\Theta_2 = \lambda/a_2 .$$

Na závěr této analýzy stojí zato ještě upozornit na **reciproké vztahy** mezi difrakčním stínítkem a difrakčním jevem:

- šířka difrakčního maxima je úměrná $1/L_1$ resp. $1/L_2$
- úhlová vzdálenost difrakčních maxim $1/a_1$ resp. $1/a_2$
- úhlová oblast výskytu difrakčních maxim $1/p$ resp. $1/q$

Tyto reciproké vztahy mezi rozměry difrakčního stínítka a difrakčního jevu jsou typickou vlastností Fraunhoferovy difrakce. Takový difrakční jev odpovídá rozložení propustnosti difrakčního stínítka na prostorové frekvence.

Při pozorování difrakčních jevů je velice užitečné si uvědomit, že **tok světelné energie** difrakčním stínítkem, tj. integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) T(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) d\xi d\eta , \quad (3.44)$$

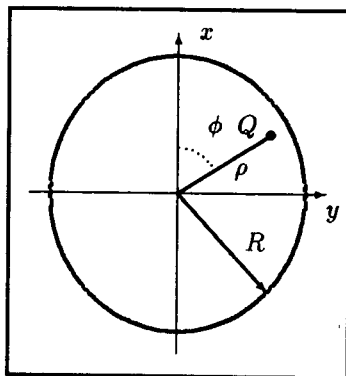
kde $I(x, y)$ je intenzita v místě difrakčního stínítka a $T(x, y)$ je jeho propustnost, je ve všech místech za stínítkem, ať se pohybujeme v oblasti Fresnelovy nebo Fraunhoferovy difrakce, konstantní. **Difrakce způsobuje jen prostorové přerozdělení hustoty toku energie**, tj. prostorové přerozdělení intenzity. Žádná energie se tedy neztrácí a zákon zachování toku energie je splněn.

3.4.5 Difrakce na kruhovém otvoru

Základní vlastnosti Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru o poloměru R lze odvodit z difrakce na čtvercovém otvoru. Čím bude otvor větší, tím ostřejší bude centrální maximum a difrakční jev musí mít stejnou symetrii jako difrakční stínítko, tzn. v tomto konkrétním případě rotační symetrii. Provedeme konkrétní výpočet a výsledek pak porovnáme s těmito zobecňujícími úvahami.

Vyjdeme opět z difrakčního integrálu

$$\psi(P) = A_D \iint_{\Sigma} e^{ik(x\xi+y\eta)/r_0} dx dy . \quad (3.45)$$



Obr. 3.14: Difrakční kruhový otvor a zavedení polárních souřadnic .

Vzhledem k rotační symetrii zavedeme na difrakčním i pozorovacím stínítku polární souřadnice těmito vztahy

$$x = \rho \cos \phi , \quad \xi = \rho_p \cos \varphi ,$$

$$y = \rho \sin \phi , \quad \eta = \rho_p \sin \varphi .$$

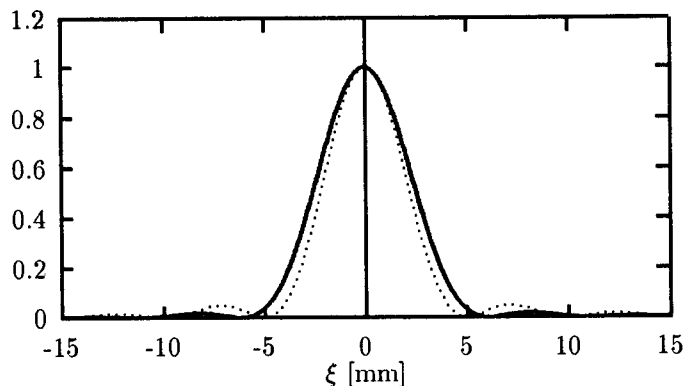
Difrakční integrál má pak tvar

$$\psi(\rho_p, \varphi) = A_D \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{ik\rho\rho_p \cos(\phi-\varphi)/r_0} \rho d\rho d\phi . \quad (3.46)$$

Integrace podle ϕ vede na Besselovu funkci nultého řádu J_0

$$\psi(\rho_p, \varphi) = A_D 2\pi \int_0^R \rho J_0(k\rho\rho_p/r_0) d\rho$$

a další integrace na Besselovu funkci 1. řádu J_1



Obr. 3.15: Rozložení intenzity podél osy ξ při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru o poloměru R (plně) a na čtvercovém otvoru o straně $2R$ (tečkovaně).

$$\psi(\rho_p) = A_D 2\pi R^2 \frac{J_1(kR\rho_p/r_0)}{kR\rho_p/r_0} \quad (3.47)$$

Intenzita je pak dána vztahem

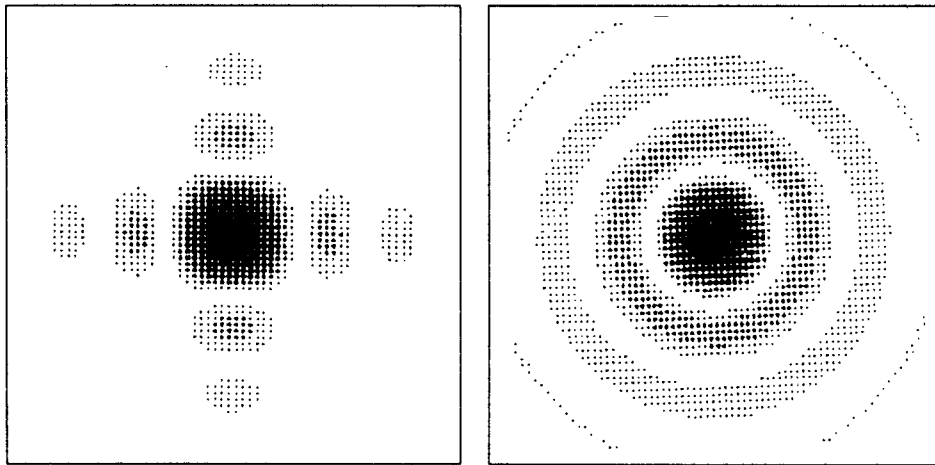
$$I(\rho_p, \varphi) = [A_D \pi R^2]^2 \left[\frac{2J_1(kR\rho_p/r_0)}{kR\rho_p/r_0} \right]^2 \quad (3.48)$$

Graf rozložení intenzity na stínítku podél proměnné ρ_p pro kruhový otvor a čtverec o straně $2R$ je na obr.3.15 Z těchto obrázků 3.15 a 3.16 je zřejmé, že pro odhady, zejména šířek centrálního difrakčního maxima můžeme používat funkci $\sin x/x$ místo $J_1(x)/x$.

3.5 Fresnelova difrakce na otvorech

Všechny ostatní difrakční jevy, pro něž nejsou splněny podmínky pro Fraunhoferovu difrakci, považujeme za Fresnelovu difrakci. Při výpočtu intenzity na stínítku musíme do přibližného vyjádření fázové funkce přibrat aspoň kvadratické členy v x a v y , nebo pro numerické výpočty použít přesnou fázovou funkci. Difrakční jevy Fresnelovy jsou mnohem složitější než Fraunhoferovy, centrální maximum se rozpadá na řadu ostrých maxim s menším kontrastem, až přejde v útvar připomínající geometrický stín difrakčního otvoru na stínítku. Na obr. 3.17 je na základě numerických výpočtů ukázáno, jak se mění rozložení intenzity podél osy ξ , když zvětšujeme difrakční otvor, kterým je čtverec.

Za povšimnutí na obr. 3.17 stojí zajímavost, že nejužší centrální maximum dostáváme, když difrakční otvor má velikost přibližně 1. Fresnelovy zóny.



Obr. 3.16: Srovnání rozložení intenzity na stínítku při Fraunhoferově difrakci na kruhovém otvoru o poloměru R a na čtvercovém otvoru o straně $2R$.

Další zajímavost se týká odhadu intenzity v centru Fresnelovy difrakce na kruhovém otvoru, který lze jednoduše provést na základě zonální konstrukce, kterou jsme užili při důkazu Huygensova - Fresnelova principu. Z obr. 3.18 je zřejmé, že kruhový otvor může propustit jen určitý počet Fresnelových zón. Naším cílem je nyní vypočítat jejich počet. Poloměr n -té zóny ρ_n je společnou odvěsnou dvou pravoúhlých trojúhelníků. Platí

$$\rho_n^2 = (b + n\lambda/2)^2 - (b + z)^2$$

$$\rho_n^2 = a^2 - (a - z)^2 .$$

Za předpokladu, že $n\lambda/2$ a z je mnohem menší než a i b , dostáváme pro poloměr ρ_n výraz

$$\rho_n = \sqrt{n\lambda \frac{ab}{a+b}} .$$

Počet zón N , které propustí kruhový otvor je pak dán vztahem

$$N = \frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) . \quad (3.49)$$

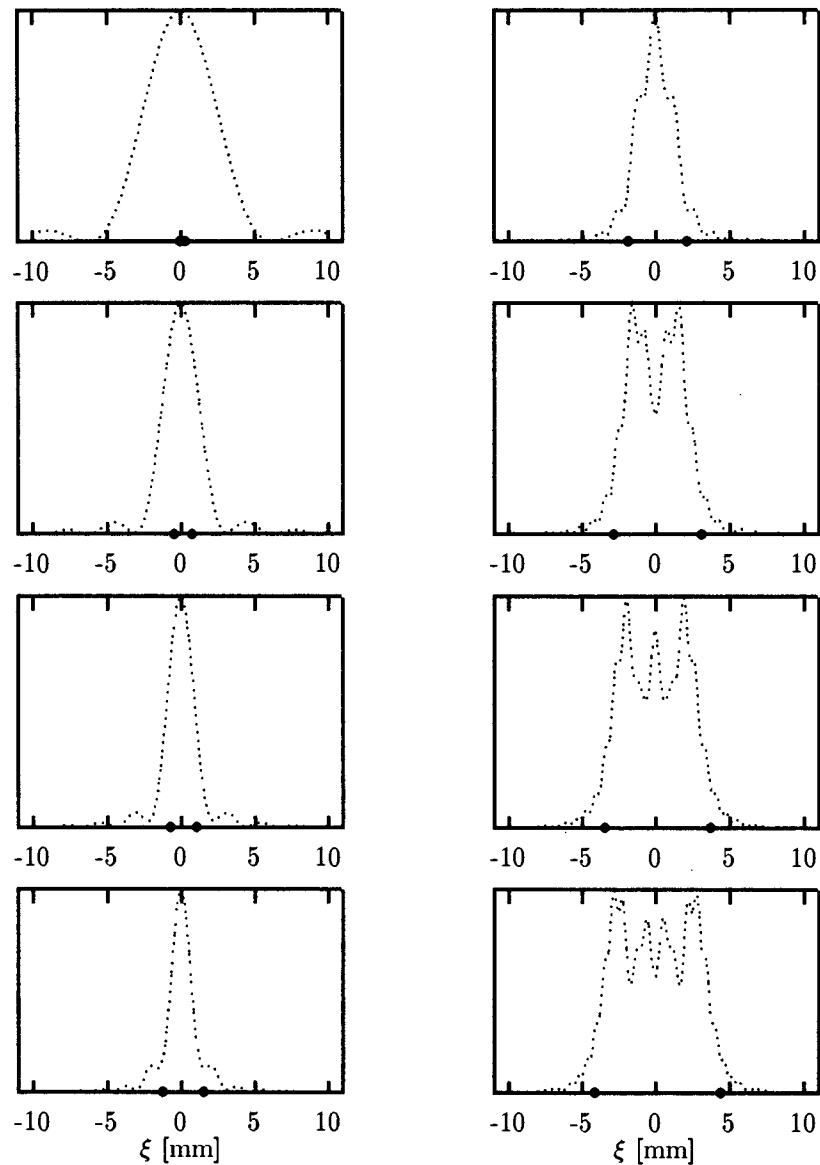
Výsledná vlna v bodě P_0 je součtem příspěvků od jednotlivých zón. Vzhledem k jejich konstrukci se dá výpočtem ukázat, že zóny (mezikruží) mají stejnou plochu $S = \pi\lambda ab/(a+b)$ a tím i jejich vlnové příspěvky se liší jen nepatrně v hodnotě faktoru sklonu a znaménkem.

$$\psi(P_0) = A_0 \sum_{n=1}^{n=N} K_n (-1)^{n-1} ,$$

kde do komplexní amplitudy byly zahrnuty všechny konstantní veličiny.

Jestliže N je malé a celé číslo, pak mohou nastat tyto situace:

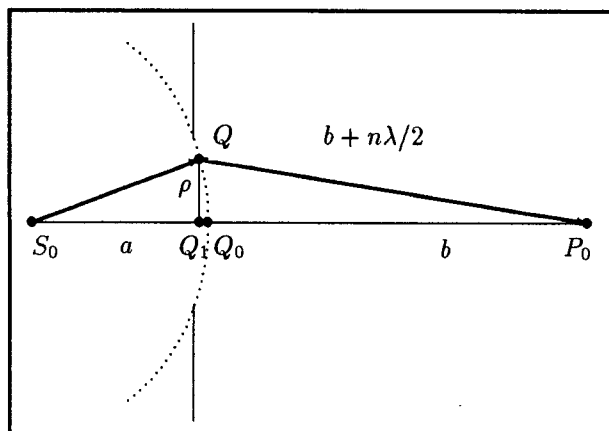
- N je sudé. Faktory sklonu pro malá n se prakticky neliší a proto je jejich suma rovna nule. Intenzita Fresnelovy difrakce v bodě P_0 je také rovna nule. Tato situace u Fraunhoferovy difrakce nemůže nikdy nastat.



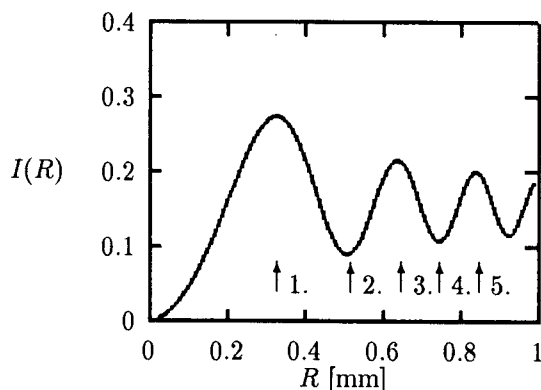
Obr. 3.17: Rozložení intenzity podél osy ξ při postupném zvětšování čtvercového otvoru. Přechod od Fraunhoferovy difrakce k Fresnelově difrakci a ke geometrickému stínu. Tečky na ose vyznačují okraje geometrického stínu difrakčního otvoru. V levém sloupci od shora dolů je velikost difrakčního otvoru rovna $1/32$, $1/8$, $1/4$, $1/2$ Fresnelovy 1. zóny a v druhém sloupci 1, 2, 3 a 4 Fresnelovým zónám.

- N je liché a v tomto případě je suma rovna $(K_1 + K_N)/2$ a intenzita v bodě P_0 je $I(P_0) = A_0^2(K_1 + K_N)^2/4$.

Fresnelova difrakce opírající se o konstrukci zón na kruhovém otvoru má jednu elegantní aplikaci v podobě tzv. **Soretovy destičky**. Jedná se o destičku, na níž jsou litograficky vytvořeny zóny tak, že všechny liché zóny světlo propouštějí a všechny sudé je absorbují. Všechny příspěvky vln od N propustných zón mají v bodě P_0 stejné znaménko a vzájemně



Obr. 3.18: Geometrická situace při aplikaci zonální konstrukce na kruhový otvor o poloměru R .



Obr. 3.19: Závislost intenzity v bodě P_0 na poloměru R kruhového otvoru při Fresnelově difrakci. Šipky a jim příslušná čísla označují kolik zón se právě vešlo do kruhového otvoru.

se tedy zesilují. $I(P_0) = A_0^2 (NK_1)^2$. Soretova destička tak pracuje jako perfektní **fokusační systém** pro monochromatické světlo nebo i pro rtg záření a lze jí tedy využít k zobrazování jako tenké čočky. Z rovnice (3.49) plyne, že ohnisková vzdálenost tohoto zobrazovacího systému je $f = R^2/N\lambda$.

3.5.1 Fresnelova difrakce na terčičku

Na terčičích libovolného tvaru může nastávat vždy jen difrakce Fresnelová, protože terčič je konečný a zastíní malý počet zón. Při numerických výpočtech postupujeme podle Babinetova principu, avšak pomocí zonální konstrukce můžeme zdůvodnit jeden velice zajímavý jev, pokud jde o kruhový terčič. Ukazuje se totiž, že v centru difrakční stopy pozorujeme

vždy **světly bod**. Jestliže kruhový terčik zakryje N_1 zón, pak vlna v bodě P_0 je

$$\psi(P_0) = A_0 \sum_{n=N_1}^{n=N} K_n (-1)^{n-1} = A_0 (K_{N_1}/2 + 0) ,$$

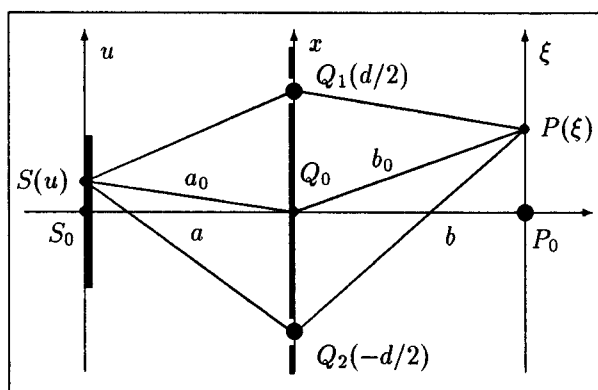
jak bylo ukázáno při důkazu H-F principu. Intenzita v bodě P_0 je tedy

$$I(P_0) = A_0^2 (K_{N_1}/2)^2$$

a dosahuje tedy přibližně hodnoty $1/4$ intenzity, jaká by zde byla bez terčiku.

3.6 Prostorová koherence

Ukázali jsme v předchozí kapitole, že s ohledem na atomární procesy při vzniku světla **jsou běžné světelné zdroje nekoherentní**. Jinými slovy řečeno, dvě vlny, šířící se ze dvou různých bodů zdroje S , jsou nekoherentní. Naskytá se otázka, jak je to s koherencí dvou libovolných sekundárních vln šířících se ze dvou libovolných bodů Q_1 a Q_2 na vlnoploše, která je generována nekoherentním lineárním zdrojem o velikosti s .



Obr. 3.20: Experimentální uspořádání idealizovaného Youngova pokusu s nekoherentním zdrojem světla při vyšetřování prostorové koherence vlny šířící se ze zdroje.

Abychom se mohli lépe soustředit na vyšetřování koherence sekundárních zdrojů, využijeme k těmto úvahám idealizovaného Youngova pokusu. Idealizace bude spočívat v tom, že obdélníkové otvory ve stínítku nahradíme bodovými otvory Q_1 a Q_2 . Při takovém stínítku bude vlna v bodě P vlastně superpozicí jen sekundárních vln šířících se z těchto bodů. Pro jednoduchost předpokládejme, že jde o rovinný problém a souřadnicové osy u , x a ξ jsou rovnoběžné, jak je zřejmé i z obr. 3.20.

Výsledná vlna v bodě $P(\xi)$ od libovolného bodu zdroje $S(u)$ tedy bude

$$\psi(S, P) = \psi_1(S, P) + \psi_2(S, P) ,$$

kde

$$\psi_1(S, P) = \frac{K_1 A(S)}{SQ_1 \cdot Q_1 P} e^{i[\omega t - k(SQ_1 + Q_1 P)]}$$

$$\psi_2(S, P) = \frac{K_2 A(S)}{SQ_2 \cdot Q_2 P} e^{i[\omega t - k(SQ_2 + Q_2 P)]} .$$

Intenzita v bodě P od bodu S je pak dána vztahem

$$I(S, P) = I_1(S, P) + I_2(S, P) + 2\sqrt{I_1(S, P)I_2(S, P)} \cos k(SQ_1 + Q_1 P - SQ_2 - Q_2 P) , \quad (3.50)$$

kde

$$I_1(S, P) = \left| \frac{K_1 A(S)}{SQ_1 \cdot Q_1 P} \right|^2$$

$$I_2(S, P) = \left| \frac{K_2 A(S)}{SQ_2 \cdot Q_2 P} \right|^2 .$$

Vzhledem k integrační době detektorů a předpokladu, že zdroj světla je nekoherentní, je celková intenzita v bodě P dána integrálem přes celý zdroj

$$I(\xi) = \int_{-s/2}^{s/2} I(u, \xi) du .$$

Prvé dva členy v rovnici (3.50) jsou vzhledem k předpokladu $s \ll a$ konstanty nezávislé na integrační proměnné u . Vzdálenosti příslušných bodů v interferenčním členu vyjádříme přibližně pomocí binomického rozvoje podobně, jako u Fraunhoferovy difrakce. Označme

$$a_0 = \sqrt{a^2 + u^2}$$

$$b_0 = \sqrt{b^2 + \xi^2} .$$

Pak platí

$$SQ_1 = \sqrt{a_0^2 - ud + (d/2)^2} \doteq a_0 \left(1 - \frac{d}{2a_0}\right)$$

$$SQ_2 = \sqrt{a_0^2 + ud + (d/2)^2} \doteq a_0 \left(1 + \frac{d}{2a_0}\right)$$

$$Q_1 P = \sqrt{b_0^2 - \xi d + (d/2)^2} \doteq b_0 \left(1 - \frac{d}{2b_0}\right)$$

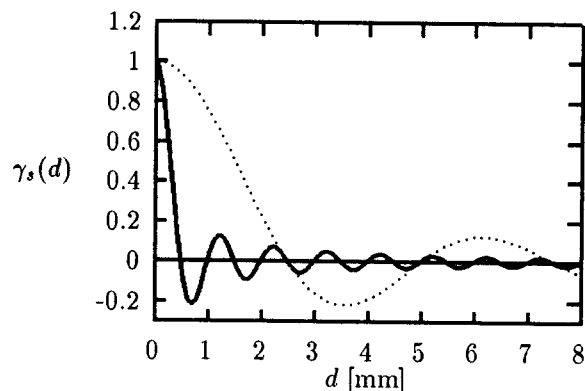
$$Q_2 P = \sqrt{b_0^2 + \xi d + (d/2)^2} \doteq b_0 \left(1 + \frac{d}{2b_0}\right) .$$

Tato přibližná vyjádření dosadíme do interferenčního členu a dostáváme

$$I(\xi) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \int_{-s/2}^{s/2} \cos kd(u/a_0 + \xi/b_0) du .$$

Za předpokladu, že každý bod zdroje generuje vlnu o stejné amplitudě $A(S) = A$, pak po integraci dostaneme

$$I(\xi) = sI_1 + sI_2 + 2s\sqrt{I_1 I_2} \frac{\sin(kds/2a_0)}{(kds/2a_0)} \cos(kd\xi/b_0) . \quad (3.51)$$



Obr. 3.21: Závislost stupně prostorové koherence na vzdálenosti d sekundárních zdrojů pro dvě různé velikosti zdroje. $\lambda = 500\text{nm}$, $a_0 = 1\text{m}$ a $s = 1\text{mm}$ (plně) a $s = 0.2\text{mm}$ (tečkovaně).

Vidíme, že interferenční člen ovlivňuje faktor

$$\gamma_s(s) = \frac{\sin(kds/2a_0)}{(kds/2a_0)}, \quad (3.52)$$

který nazýváme **stupeň prostorové koherence** sekundárních vln šířících se z bodu Q_1 a Q_2 . Podle velikosti stupně koherence jsou sekundární vlny:

Prostorově koherentní , když $\gamma_s = 1$.

Částečně prostorově koherentní , když $0 < |\gamma_s| < 1$.

Prostorově nekoherentní , když $\gamma_s = 0$.

Závislost stupně prostorové koherence γ_s na vzdálenosti sekundárních zdrojů Q_1 a Q_2 je na obr. 3.21. Stupeň koherence s rostoucí vzdáleností d klesá, ale co je zajímavé, mění i znaménko. To znamená, že pro jisté velikosti zdroje s nebo vzdálenosti a_0 je roven nule, interference nenastane. Dále je zajímavé, že pro γ_s záporné, je pro $\xi = 0$, tj. v bodě P_0 , minimum intenzity přesto, že vzdálenost $Q_1P_0 = Q_2P_0$.

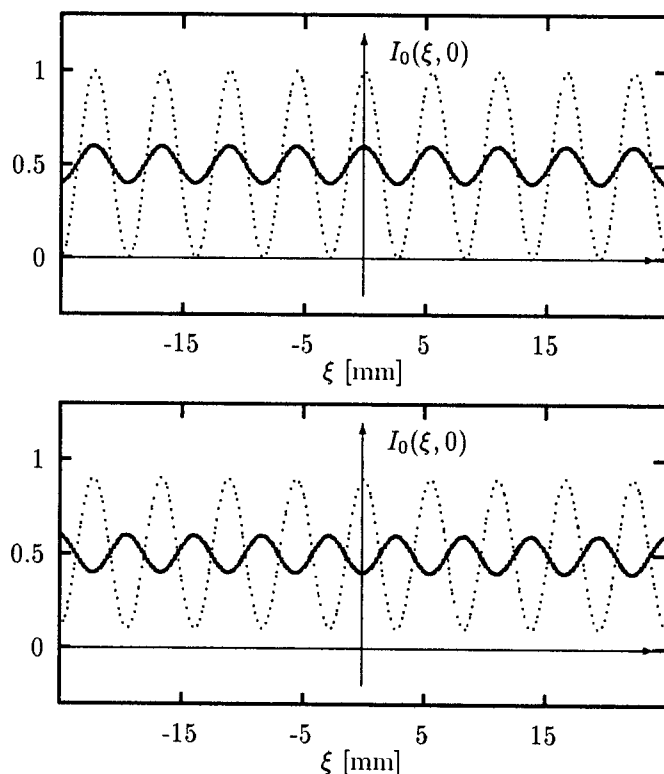
Stupeň koherence je možné určit pomocí měřitelné veličiny zvané **viditelnost interference** $V(P)$. Ta je definována takto:

$$V(P) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (3.53)$$

Z rovnice (3.51) plyne, že I_{max} nastane, když interferenční člen má hodnotu $+2\sqrt{I_1I_2}|\gamma_s|$ a I_{min} nastane, když má hodnotu $-2\sqrt{I_1I_2}|\gamma_s|$. Dosadíme-li do definice pro viditelnost, dostaneme

$$V(P) = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_s|. \quad (3.54)$$

Pro $I_1 = I_2$ je $V(P) = |\gamma_s|$.



Obr. 3.22: Závislost intenzity $I(\xi)$ na ξ pro různé stupně prostorové koherence: $\gamma_s = 1, 0.2$ (tečkovaně a plně) na horním obrázku a $\gamma_s = -0.2, 0.8$ (plně a tečkovaně) na spodním obrázku.

Vidíme, že prostřednictvím Youngova pokusu lze měřit i stupeň prostorové koherence sekundárních vln. Prostorová koherence světla je tedy reálná, dobře měřitelná vlastnost světla.

Pro jednoduché odhady, jestli při dané geometrii Youngova pokusu nastane interference nebo ne, se používá veličina zvaná **koherenční šířka**. Označíme ji β a je to taková vzdálenost otvorů Q_1 a Q_2 , pro niž je $\gamma_s(s) = 0$, tj. k

$$\beta ks/2a_0 = \pi,$$

nebo jinak

$$\beta = \lambda \frac{a_0}{s}. \quad (3.55)$$

Dvě sekundární vlny jsou částečně koherentní, pokud jejich bodové zdroje mají menší vzdálenost než β . Zdůrazněme na tomto místě, že koherenční šířku měříme vždy ve stejném směru, v jakém měříme rozměr zdroje. Tak např. vlna šířící se z vlákna žárovky o délce 10mm a šířky 0.1mm bude mít v jednom směru 100x menší koherenční šířku než ve druhém.

Podobnou vlastnost bude mít světlo vycházející ze štěrbinových rozměrů, jako má vlákno, osvětlené ze vzdálenosti 10cm projekční žárovkou, kde plocha vlákna je 5mm x 5mm.

Taková štěrba se jeví jako nekoherentní zdroj světla, protože v místě štěrby je koherenční šířka $\beta = \lambda a_0/s = 500\text{nm} \cdot 100\text{mm}/5\text{mm} = 0.01\text{mm}$. Pokud by se ale taková štěrba nacházela ve vzdálenosti 10m, pak by již v jednom směru byla zdrojem koherentního světla, ale v druhém ještě ne.

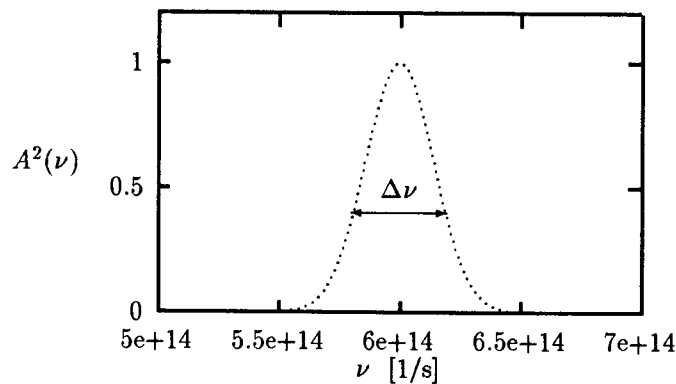
Dvě vlny považujeme za koherentní, jestliže jejich superpozicí vznikne stálý, na čase nezávislý, interferenční jev. Připomeňme, že k rychlému střídání maximální a minimální intenzity v každém bodě dochází stále, avšak díky integrační době detektorů pozorujeme jen její střední hodnotu.

3.7 Časová koherence

Časová koherence sekundárních vln souvisí s jejich frekvenčním složením, nebo, jak jsme ukázali, s konečnou délkou vlnových klubek. Pomocí idealizovaného Youngova pokusu opět objasníme, jak tyto vlastnosti reálných světelných vln souvisejí se stálostí interferenčního jevu. Předpokládejme, že z bodového zdroje S se šíří vlna, jejíž spektrální složení je dáno funkcí

$$A(\nu) = A_0 e^{-[(\nu - \nu_0)/2\Delta\nu]^2} \quad (3.56)$$

Jedná se tedy o Gaussovu křivku, která má maximum pro frekvenci ν_0 a šířka je charakterizována veličinou $\Delta\nu$. Její graf normovaný v maximum na 1 je na obr.3.23.



Obr. 3.23: Závislost kvadrátu amplitudy $A^2(\nu)$ na ν . Tato Gaussova funkce dobře vystihuje profil spektrální čáry, nebo i profil propustnosti interferenčních filtrů.

Podle rovnice (3.51) je intenzita v bodě $P(\xi)$ pro bodový zdroj ($s = 0$) a frekvenci ν dána vztahem

$$I(\xi, \nu) = I_1(\nu) + I_2(\nu) + 2\sqrt{I_1(\nu) \cdot I_2(\nu)} \cos \frac{2\pi\xi\nu d}{cb_0}, \quad (3.57)$$

kde

$$I_1(\nu) = I_1 e^{-[(\nu - \nu_0)/\Delta\nu]^2}$$

a podobě i $I_2(\nu)$.

Detektor světla v tomto případě naměří hodnotu

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} I(\xi, \nu) d\nu .$$

Po dosazení do této rovnice a integraci dostáváme

$$I(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Delta\nu \left[I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} e^{-(2\pi\xi\Delta\nu d/cb_0)^2} \cos \frac{2\pi\xi\nu_0 d}{cb_0} \right] . \quad (3.58)$$

Vidíme, že při interferenčním členu se vyskytl opět faktor, který omezuje viditelnost interferenčního jevu. Nazýváme jej **stupeň časové koherence** a značíme

$$\gamma_t(\xi, \Delta\nu) = e^{-(2\pi\xi\Delta\nu d/cb_0)^2} . \quad (3.59)$$

Podle velikosti stupně časové koherence jsou interferující vlny :

Časově koherentní , když $\gamma_t = 1$.

Částečně časově koherentní , když $0 < |\gamma_t| < 1$.

Časově nekoherentní , když $\gamma_t = 0$.

Graf závislosti stupně časové koherence na ξ nebo na dráhovém rozdílu interferujících vln $d \sin \Theta$ je na obr.3.24. Pro jednoduché odhady časové koherence zavedeme **koherenční délku**, což je takový dráhový rozdíl δ , pro nějž má γ_t hodnotu blízkou jedničce

$$\frac{2\pi\xi\Delta\nu d}{cb_0} = 2\pi\delta\Delta\nu/c = 2\pi .$$

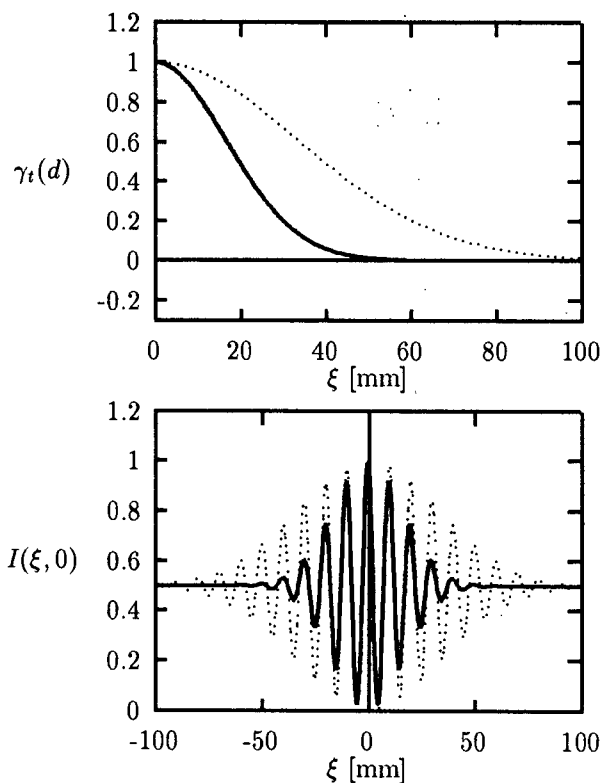
Odtud dostáváme

$$\delta = c/\Delta\nu = \lambda^2/\Delta\lambda . \quad (3.60)$$

Vidíme, že takto zavedená koherenční délka má až na konstantní faktor význam **délky vlnového klubka**. Hodnota tohoto faktoru, jak víme z odstavce o vlnových klubkách, závisí na tvaru amplitudové funkce a pro jednoduché úvahy o koherenci jej můžeme položit rovný 1.

Tento model nemonochromatické vlny zavedený dříve umožní jednoduchou interpretaci vzniku interference , jak je znázorněna na obr.3.25. Jestliže se vlnová klubka v bodě P aspoň částečně potkají, pak jsou částečně koherentní. Jestliže dráhový rozdíl obou vln je tak velký, že detektor v bodě P zaznamená nejdříve první vlnu a pak teprve druhou vlnu, jsou v P časově nekoherentní.

Časovou koherenci snadno experimentálně prokážeme, když budeme pozorovat interferenční jev pomocí Youngova pokusu v bílém světle a pak před jeden otvor vložíme sklo. (Pro bílé světlo je $\delta = 1.5\mu\text{m}$.) Tím jednu vlnu, která prochází sklem **zpozdíme** tak, že stupeň časové koherence je pro takový dráhový rozdíl roven nule. Při použití laseru interferenční jev nezanikne, protože koherenční délka světla z laseru může být až několik metrů.



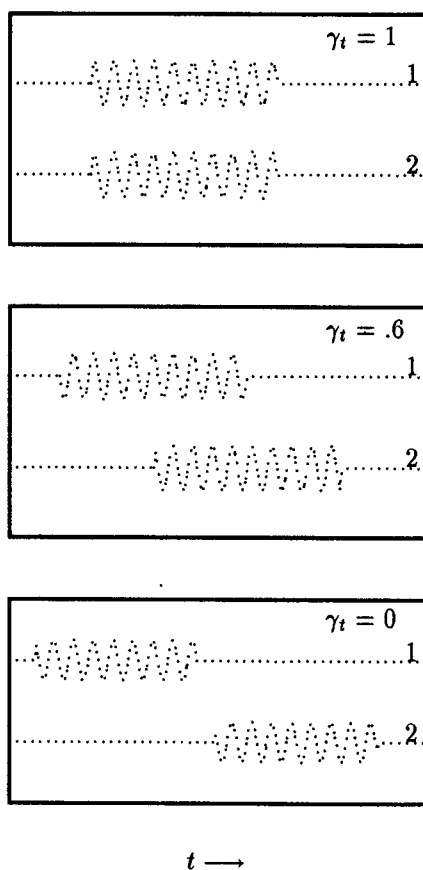
Obr. 3.24: Závislost stupně časové koherence na dráhovém rozdílu interferujících vln pro dvě různě široké spektrální čáry $\Delta\nu = 0.1\nu_0, 0.03\nu_0$. Na spodním obrázku je závislost intenzity $I(\xi)$ na dráhovém rozdílu pro obě spektrální čáry.

3.8 Koherence světla

Z předchozích úvah o interferenci světla jsme zjistili, že to, jestli budeme pozorovat časově stálý interferenční jev závisí na stupni časové a prostorové koherence. Tyto vlastnosti světla jsou nerozlučně spojeny vlastnostmi reálných světelných zdrojů, tj. s konečnou šířkou spektrálních čar, resp. s konečnou velikostí zdrojů. Do těchto koherenčních vlastností světla se tedy, obrazně řečeno, otiskl jejich statistický a kvantový charakter. S interferencí a difrací se samozřejmě setkáváme i u radiových elektromagnetických vln, avšak tyto vlny se chovají jako prostorově a časově naprosto koherentní.

Jak v optice rigorózně postupovat při výpočtu intenzity na stínítku u reálných experimentů jsme ukázali: Vypočteme intenzitu pro jeden bod zdroje a jednu monochromatickou kulovou vlnu šířící se z tohoto zdroje a pak teprve provedeme integraci přes celou plochu zdroje a přes celé spektrální složení.

Tento postup je však velice komplikovaný a proto kvůli zjednodušení úvah aproximujeme reálné světelné vlny šířící se ze zdrojů monochromatickými kulovými nebo rovinnými vlnami (získáme je dostatečně daleko od zdroje nebo pomocí čoček), a při interpretaci vezmeme



Obr. 3.25: Vzájemná poloha vlnových klubek v bodě P pro tři různé dráhové rozdíly.

úvahu koherenční vlastnosti světla.

Zavedení stupně časové a prostorové koherence a způsobu měření jejich hodnoty pomocí viditelnosti interferenčního jevu má dvě velice zajímavé aplikace:

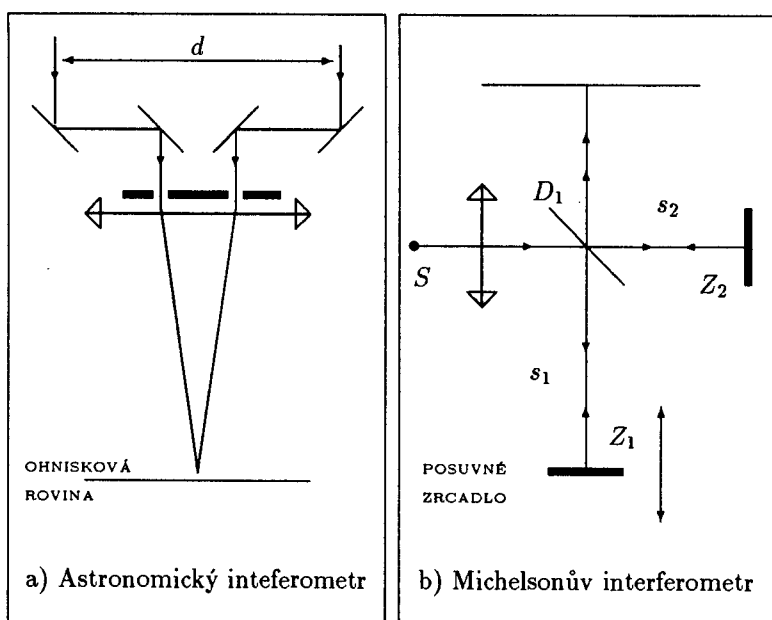
1. Měření průměru hvězd

Vzdálenost hvězd umí astronomie změřit, avšak jejich plošný obraz ani ty největší astronomické dalekohledy nevytvoří. Na obr.3.26 je schéma astronomického interferometru. Světlo z hvězdy dopadá na dvě zrcadla, jejichž vzdálenost je d , odráží se a dopadá na dvě štěrbinu situované před objektiv dalekohledu. V ohniskové rovině pak pozorujeme difrakci na dvojštěrbině a můžeme měřit, jak závisí jeho viditelnost na vzdálenosti zrcadel. Tato závislost odpovídá stupni prostorové koherence světla z dané hvězdy a protože vzdálenost hvězdy a vlnovou délku známe, můžeme určit její průměr.

2. Měření šířky spektrálních čar

Na obr.3.26b) je schéma Michelsonova interferometru, který se užívá pro přesná měření profilů spektrálních čar, které je založeno opět na principu měření viditelnosti interferenčního jevu v závislosti na dráhovém rozdílu interferujících vln. Z bodového zdroje S se čočkou vytvoří rovinná vlna, která se na polopropustné desce D_1 jednak odráží a po odraze na zrcadle Z_1 , zase prochází polopropustnou deskou, jednak prochází, odráží se na zrcadle Z_2 a na polopropustné desce D_1 . Tyto dvě vlny pak na stínítku interferují a posuvem zrcadla Z_1 lze měnit definovaně jejich dráhový rozdíl $s_1 - s_2$.

Toto uspořádání umožňuje naměřit závislost viditelnosti interferenčního jevu na dráhovém rozdílu, jinými slovy naměřit **stupeň časové koherence** γ_t , kde podle rovnice 3.59 vystupuje jako parametr šířka spektrální čáry $\Delta\nu$. Tomuto způsobu měření profilů spektrálních čar se říká Fourierova spektroskopie a Michelson za vypracování tohoto postupu dostal Nobelovu cenu za fyziku.



Obr. 3.26: Schéma hvězdářského interferometru pro měření průměru hvězd a schéma Michelsonova interferometru pro měření profilu spektrálních čar .

Výpočet difrakčních jevů jsme prováděli pro bodový monochromatický zdroj světla. Pokud chceme, aby při experimentální verifikaci těchto výpočtů nastala shoda mezi teorií a experimentem, musíme zajistit to, aby celý difrakční otvor byl prostorově koherentní a aby byla i dostatečná koherenční délka použitého světla. Prakticky to znamená vložit do cesty bílému světlu vhodný filtr, zúžit tak spektrální obor a tím prodloužit koherenční délku.

Kapitola 4

Světlo a optické prostředí

Doposud jsme se zabývali šířením světla ve vakuu a zkoumali jsme, jak se bude chovat, když mu do cesty postavíme stínítko, které světlo neodráží, ale jen absorbuje nebo propouští. Můžeme hned na tomto místě konstatovat, že všechny naše **dosavadní úvahy platí** i pro šíření světla v homogenním izotropním a neabsorbujícím prostředí.

V následujících odstavcích se budeme zabývat interakcí světla s hmotným prostředím a to pouze z hlediska chování světla v rámci elektromagnetické (EM) teorie.

Optické prostředí charakterizujeme zejména těmito vlastnostmi:

Absorbující prostředí . Při průchodu světelného svazku absorbujícím prostředím klesá intenzita světla. Část toku světelné energie se přemění v tepelnou energii, nebo v látce vyvolá jiné atomární procesy podobné procesům u detektorů světla. V rámci EM teorie souvisí absorpce světla s elektrickou vodivostí prostředí. Tak např. sklo je nevodič (izolátor) a světlo se téměř nezeslabí ani průchodem přes vrstvu 1 cm. Naproti tomu vrstvičkou kovu tloušťky $1\mu\text{m}$ žádné světlo neprojde.

Homogenní prostředí . Jak si ukážeme později, optické prostředí je charakterizováno indexem lomu a indexem absorpce. Jestliže v každém bodě mají tyto veličiny stejnou hodnotu, pak jde o prostředí homogenní – např. sklo, voda apod. V nehomogenním prostředí nastává **rozptyl světla**. Příkladem nehomogenního prostředí je mlha, kapka

mléka ve vodě apod. Takové prostředí také zeslabuje primární svazek, ale na rozdíl od absorbujícího prostředí se energie EM vln nepřeměňuje v jiný druh energie, ani při rozptylu nemění svoji frekvenci, jak se to děje při fluorescenci.

Izotropní prostředí . Kapaliny, plyny, amorfní a polykrystalické pevné látky jsou izotropní na rozdíl od látek monokrystalických, které jsou **anizotropní** (krystaly křemene, vápence aj.). Index lomu i absorpce závisí na tom, jakým směrem anizotropní látkou světlo prochází spřihlednutím ke krystalografickým osám nebo optické ose, která je jimi určena. Optická osa rovněž určuje polarizaci procházejícího svazku. Anizotropii je však možné vyvolat i v látkách izotropních, např. tím, že je mechanicky deformujeme.

Optické rozhraní dvou prostředí . Způsob šíření světla v prostředí významně ovlivní už to, jak světlo do prostředí vnikne. Důležité je rovinné rozhraní dvou homogenních prostředí, na nichž dochází jen k odrazu a lomu, na rozdíl od rozhraní drsných, které způsobí rozptyl světla (např. matnice – jemně broušený povrch skla).

Je zřejmé, že všechny tyto vlastnosti se v praxi nejrůznějším způsobem kombinují. V nastávajících odstavcích se budeme, zabývat vlivem těchto vlastností na šíření světla v idealizované podobě těchto jevů.

4.1 Odraz a lom světla

Naším úkolem nyní bude definovat index lomu a najít směr šíření a amplitudu rovinné monochromatické vlny po odraze nebo lomu na rozhraní dvou homogenních neabsorbujících prostředích, které od sebe odděluje nekonečná rovina. Zdůraznění, že jde nekonečnou rovinu souvisí s tím, že nebereme v úvahu difrakční jevy, které by nastaly, kdyby např. k odrazu docházelo jen na malé plošce . Jedná se o tzv.**geometrickou aproximaci vlnění**, o níž pojednáme podrobněji později.

V rámci EM teorie je prostředí charakterizováno materiálovými konstantami, tj.

- **permitivitou** $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$
- **permeabilitou** $\mu = \mu_0 \mu_r$
- **měrnou elektrickou vodivostí** σ ,

kde indexem nula jsou značeny konstanty vztahující se k vakuu a indexem r jejich relativní hodnoty v prostředí.

V homogenním dielektriku je měrná vodivost $\sigma = 0$ a Maxwellovy rovnice v něm mají tvar:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 . \quad (4.4)$$

Využijeme nyní těchto rovnic k tomu, abychom našli souvislost mezi materiálovými konstantami a rychlostí šíření EM vln v tomto prostředí. Provedeme to tak, že odvodíme vlnovou rovnici.

Za tím cílem aplikujme operaci rotace na rovnici (4.2). Dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Levou stranu rozepíšeme podle známého matematického pravidla a na pravé straně rovnice zaměníme pořadí derivací.

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} .$$

První člen v této rovnici je vzhledem k (4.3) roven nule a na pravou stranu dosadíme z rovnice (4.1). Po úpravě dostaneme

$$\Delta \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} . \quad (4.5)$$

Tato rovnice je již shodná s vlnovou rovnicí a ze srovnání obou rovnic dostáváme pro rychlost šíření EM vln v výraz

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} . \quad (4.6)$$

Pro index lomu pak dostáváme

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} . \quad (4.7)$$

Toto je velice důležitý vztah, protože nyní již víme, jak souvisí s EM materiálovými konstantami optická materiálová konstanta, tj. **index lomu**.

U harmonických vln souvisí s rychlostí šíření vlnové číslo $k = \omega/v$ a v prostředí je tedy dáno vztahem $k_p = n\omega/c = nk$, kde k je vlnové číslo ve vakuu.

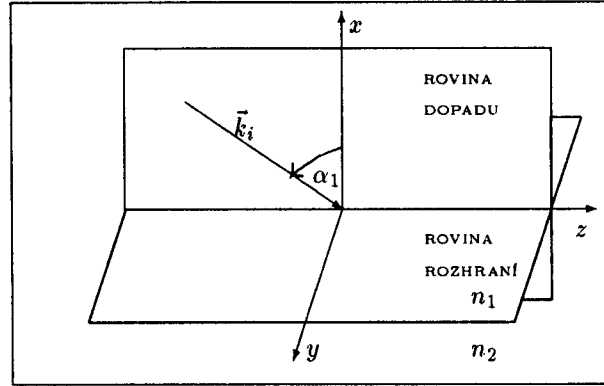
Na rozhraní dvou prostředí musejí vektory \vec{E} a \vec{H} zachovávat svoje tečné složky do roviny rozhraní. Tohoto výsledku EM teorie využijeme při výpočtu amplitudy vlny za rozhraním.

Pro následující úvahy o chování vlny na rozhraní zvolme si souřadný systém tak, jak je uveden na obr. 4.1. Nad rovinou rozhraní necht' je index lomu n_1 a pod ní n_2 . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vlnový vektor dopadající rovinné vlny má složky

$$\vec{k}_i \equiv (n_1 k_x, 0, n_1 k_z) ,$$

kde \vec{k} je vlnový vektor ve vakuu. Vlnové vektory odražené a lomené vlny označme

$$\vec{k}_r \equiv (n_1 k_{rx}, n_1 k_{ry}, n_1 k_{rz})$$



Obr. 4.1: Zavedení souřadného systému na rozhraní dvou prostředí.

$$\vec{k}_t \equiv (n_2 k_{tx}, n_2 k_{ty}, n_2 k_{tz}).$$

Vektor intenzity elektrického pole je kolný na směr šíření. Zvolme jeho směr tak, že je kolný na **rovinu dopadu**, která je určena normálou k rozhraní a vektorem dopadající vlny \vec{k}_i .

$$\vec{E}_i \equiv (0, E_i, 0).$$

Podobně vektory amplitudy odražené \vec{E}_r a lomené vlny \vec{E}_t mají pouze složky do osy y . Jednotlivé vlny jsou tedy v bodě P o polohovém vektoru $\vec{r}_0 \equiv (x, y, z)$ dány rovnicemi

$$\begin{aligned} \psi_i &= E_i e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_0)} \\ \psi_r &= E_r e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}_0 + \delta_r)} \\ \psi_t &= E_t e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r}_0 + \delta_t)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

V rozhraní s indexem lomu n_1 se šíří vlna dopadající a vlna odražená a v druhém rozhraní jen vlna lomená. Amplitudy všech těchto elektrických složek EM vln jsou rovnoběžné s rozhraním. Z EM teorie plyne, že v rovině rozhraní musí na sebe tyto vlny spojitě navazovat. To znamená, že

$$\psi_i(0, y, z) + \psi_r(0, y, z) = \psi_t(0, y, z)$$

Dosazením z (4.8) do této hraniční podmínky dostáváme

$$E_i e^{i(\omega t - n_1 k_{iz} z)} + E_r e^{i(\omega_r t - n_1(k_{ry} y + k_{rz} z) + \delta_r)} = E_t e^{i(\omega_t t - n_2(k_{ty} y + k_{tz} z) + \delta_t)} \quad (4.9)$$

Tato rovnice musí platit pro **každé hodnoty souřadnic z a y** a pro **každý časový okamžik**. Tento požadavek nelze splnit jinak, než že exponenty všech tří členů se rovnají (faktory $e^{i\delta_r}$ a $e^{i\delta_t}$ lze zahrnout do amplitudy). V obou prostředích mohou tedy současně

existovat jen takové EM vlny, jejichž frekvence se rovnají ($\omega = \omega_r = \omega_t$) a vlnové vektory splňují následující podmínky

$$n_1 k_{iz} = n_1 k_{rz} \quad (4.10)$$

$$k_{ry} = 0$$

$$n_1 k_{iz} = n_2 k_{tz}$$

$$k_{ty} = 0$$

Třetí složka vlnových vektorů je už určena podmínkami

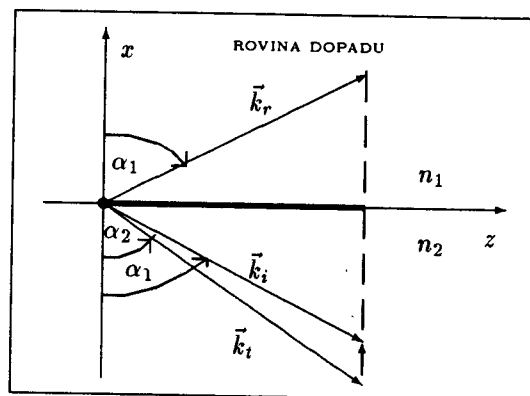
$$|\vec{k}_i| = n_1 k$$

$$|\vec{k}_r| = n_1 k$$

a

$$|\vec{k}_t| = n_2 k.$$

Z těchto rovnic plyne důležitý závěr: Vlnové vektory \vec{k}_r i \vec{k}_t leží rovněž v rovině dopadu, protože jejich složky do osy y jsou rovny nule. Dále odtud plyne, že jejich průměty do rozhraní se zachovávají. Tento závěr je vlastně jen jinou formulací známého Snellova zákona (Francouzi jej připisují Descartovi), jak je zřejmé z geometrické situace na obr. 4.2.



Obr. 4.2: Vlnové vektory zachovávají velikost svých průmětů do rozhraní dvou prostředí.

Zavedením úhlů **odrazu** a **lomu** do podmínek (4.10) dostáváme

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (4.11)$$

Na závěr těchto úvah o odrazu a lomu EM vln na rozhraní poznamenejme, že odvození zákona lomu a odrazu bylo provedeno jen pro vlnu, jejíž vektor amplitudy byl kolmý na rovinu dopadu, ale dodejme hned, že ke stejnému závěru bychom došli pro jiné orientace amplitudy. Těchto výsledků využijeme hned v dalších odstavcích.

4.2 Fresnelovy koeficienty odrazu a lomu

Nyní se budeme zabývat výpočtem amplitudy odražené a lomené vlny. Vzhledem k hraničním podmínkám je zřejmé, že celou úlohu musíme hned zpočátku rozdělit na dvě části podle orientace vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} :

1. \vec{E} je kolmý k rovině dopadu – **s polarizace** – odpovídající veličiny budou mít index s
2. \vec{E} je rovnoběžný s rovinou dopadu – **p polarizace** – index p .

Poznamenejme, že se nejedná o žádné omezení obecnosti, protože každou vektorovou vlnu lze rozložit do dvou složek na sebe kolmých a řešit problém pro každou z nich samostatně. To plyne z principu superpozice.

Než započneme s řešením každého případu samostatně, zavedeme řadu nových veličin, které pak budeme jen rozlišovat příslušnými indexy. Jsou to:

Koeficient odrazu je dán poměrem výchylek vlny odražené ku dopadající. Podle (4.8) dostáváme

$$r = \frac{\psi_r(0, y, z)}{\psi_i(0, y, z)} = \frac{E_r}{E_i} e^{i\delta_r} \quad (4.12)$$

Koeficient propustnosti je dán poměrem výchylek vlny lomené ku dopadající. Podle (4.8) opět dostáváme

$$t = \frac{\psi_t(0, y, z)}{\psi_i(0, y, z)} = \frac{E_t}{E_i} e^{i\delta_t} \quad (4.13)$$

Odrzivost rozhraní je poměr toku energie odražené vlny ku toku energie dopadající vlny.

Hustota toku energie v dielektriku o indexu lomu n je dána velikostí časové střední hodnoty Poyntingova vektoru

$$S = \frac{1}{2} cn |E|^2. \quad (4.14)$$

Pro odrazivost R na základě rovnice (4.14) dostáváme

$$R = \frac{S_r s_r}{S_i s_i} = r r^* , \quad (4.15)$$

kde $s_r = s_i$ jsou průřezy odraženého a dopadajícího svazku. Ty se při odrazu nemění.

Propustnost rozhraní je poměr mezi tokem energie lomené vlny ku toku energie vlny dopadající. Podle obr.4.3 platí mezi průřezy svazků vztah

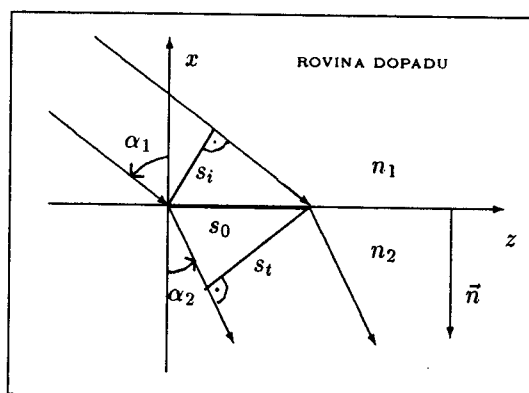
$$s_t = s_0 \cos \alpha_2$$

$$s_i = s_0 \cos \alpha_1.$$

Analogicky jako v předchozím případě dostáváme pro propustnost vztah

$$T = \frac{S_t s_t}{S_i s_i} = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} t t^* . \quad (4.16)$$

Koeficienty odrazu a lomu se též nazývají **Fresnelovy koeficienty** nebo **Fresnelovy amplitudy** a je zřejmé, že mají význam amplitudy odražené nebo lomené vlny, když dopadá na rozhraní vlna s **jednotkovou amplitudou**.



Obr. 4.3: Změna průřezu lomeného svazku na rozhraní dvou prostředí.

Poznamenejme, že tok energie rozhraním jsme měli správně počítat jako skalární součin Poyntingova vektoru a normály k rozhraní, protože předpokládáme, že dopadá rovinná vlna u níž nemá smysl mluvit o průřezu svazku. Tento termín má však dobrý smysl v tzv. geometrické aproximaci vlnění. Zvoleným postupem jsme však chtěli upozornit na to, že při reálných experimentech s odrazem či lomem světla pracujeme vždy se svazkem světla a tam pak **změna průřezu svazku** reálně nastává, ale difrakční jevy, které takové vymezení svazku nerozlučně doprovázejí, zanedbáváme.

Při řešení odrazu na rozhraní máme **dvě nezuámé veličiny** – amplitudy odražené a lomené vlny. Kromě podmínky na rozhraní pro vektor \vec{E} musíme tedy použít i podmínky pro vektor \vec{H} a pamatovat na to, že tento vektor je kolmý jak na \vec{E} , tak na \vec{k} . Dosazením elektrické složky EM vlny

$$\psi_E = E e^{i(\omega t - n \vec{k} \vec{r}_0)}$$

a ji odpovídající magnetické složky

$$\psi_H = H e^{i(\omega t - n \vec{k} \vec{r}_0)}$$

do (4.1), zjistíme, že mezi amplitudami obou složek EM vlny platí vztah

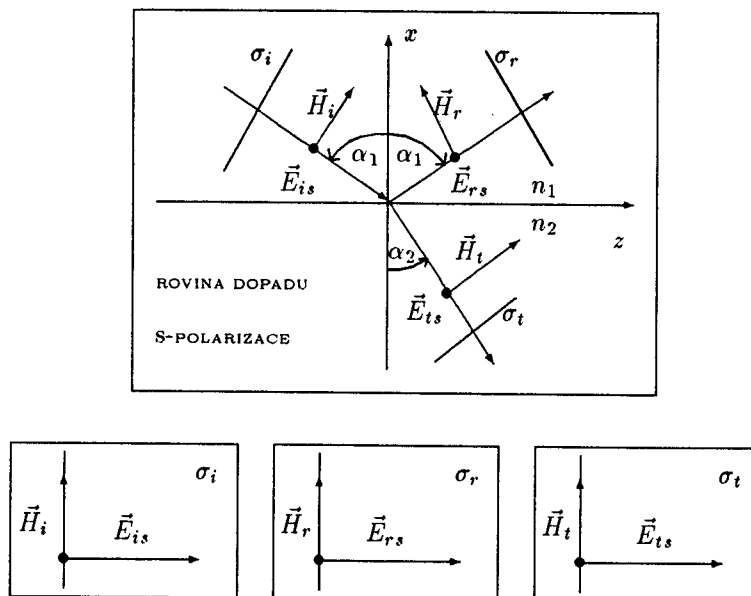
$$H = \frac{n}{\mu c} E, \quad (4.17)$$

kde n je index lomu prostředí v němž se vlny šíří.

Tímto jsme si připravili všechny potřebné veličiny a můžeme přikročit k výpočtu amplitud odražené a lomené vlny.

4.2.1 Fresnelovy koeficienty pro s-polarizaci

Při této polarizaci EM vlny je vektor \vec{E} kolmý na rovinu dopadu a vektor \vec{H} s ní rovnoběžný. Jak ukážeme později, v souvislosti s elementární teorií indexu lomu, je při interakci s látkou podstatný vektor \vec{E} a proto o polarizaci světla rozhoduje jeho poloha.



Obr. 4.4: Znázornění orientace vektorů \vec{E} a \vec{H} v dopadající, odražené a lomené vlně. Pro větší názornost jsou zavedeny roviny σ kolmé na příslušné vlnové vektory a v nich jsou rovněž zakresleny uvažované vektory a průsečnice s rovinou dopadu při pohledu ve směru šíření vlny.

Orientace vektorů \vec{E} a \vec{H} u všech vln je zřejmá z obr.4.4. S ohledem na platnost Snellova zákona a zákona odrazu vede hraniční podmínka pro tečné složky vektoru \vec{E} k rovnici

$$E_{is} + E_{rs} = E_{ts} ,$$

odkud po vydělení E_{is} dostaneme

$$1 + r_s = t_s , \tag{4.18}$$

Hraniční podmínka pro vektory \vec{H} vede k rovnici

$$H_i \cos \alpha_1 - H_r \cos \alpha_1 = H_t \cos \alpha_2 ,$$

kam dosadíme podle rovnice (4.17)

$$n_1 E_{is} \cos \alpha_1 - n_1 E_{rs} \cos \alpha_1 = n_2 E_{ts} \cos \alpha_2 ,$$

odkud zase po vydělení dopadající amplitudou dostaneme

$$n_1 \cos \alpha_1 - n_1 r_s \cos \alpha_1 = n_2 t_s \cos \alpha_2 . \tag{4.19}$$

Tak jsme dostali dvě rovnice (4.18) a (4.19) pro dvě neznámé veličiny r_s a t_s . Jejich řešením dostaneme

$$r_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (4.20)$$

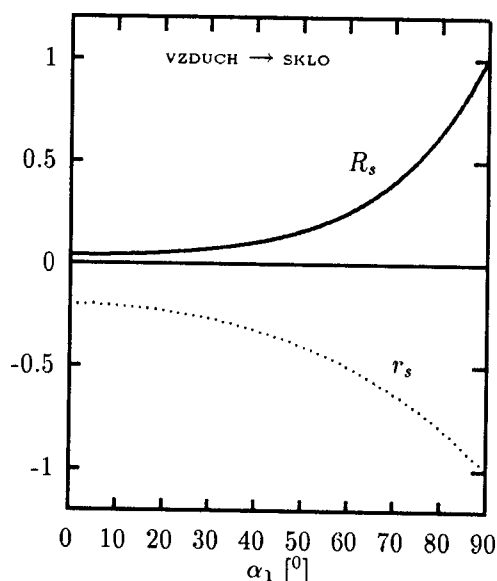
$$t_s = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (4.21)$$

kde při úpravě na druhý tvar bylo využito Snellova zákona. Tím jsou Fresnelovy koeficienty pro s -polarizaci vypočítány. Odrazivost a propustnost je pak dána vztahy

$$R_s = r_s r_s^* = \left[\frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \right]^2 \quad (4.22)$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} t_s t_s^* = \left[\frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \right]^2 \quad (4.23)$$

Dosazením těchto výrazů do rovnice



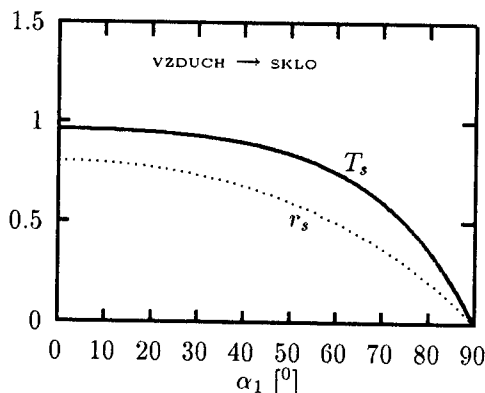
Obr. 4.5: Graf závislosti koeficientu odrazivosti r_s (tečkovaně) a odrazivosti R_s (plně) při s -polarizaci na úhlu dopadu pro přechod světla ze vzduchu ($n_1 = 1$) do skla ($n_2 = 1.5$).

$$R_s + T_s = 1$$

se můžeme přesvědčit, že je splněn zákon zachování toku energie rozhraním. Na rozhraní dvou prostředí se EM energie ani nehromadí, ani nevzniká.

Z obr.4.5 je vidět, že koeficient odrazivosti je pro všechny úhly záporný, což lze interpretovat také tak, že se změnila fáze odražené vlny o π . Podle definice tohoto koeficientu obsahuje totiž i změnu fáze na rozhraní. Připomeňme, že

$$\delta_s = \arctan(\Im(r_s)/\Re(r_s)),$$



Obr. 4.6: Graf závislosti koeficientu propustnosti t_s (tečkovaně) a propustnosti T_s (plně) při s -polarizaci na úhlu dopadu pro přechod světla ze vzduchu ($n_1 = 1$) do skla ($n_2 = 1.5$).

jak plyne z pravidel popisu vlnění komplexními čísly. Dále si všimněme toho, že odrazivost je nejmenší, když dopadá světlo při s -polarizaci kolmo na rozhraní a největší $R_s = 1$ při tečném dopadu.

Konkrétní hodnoty odrazivosti a propustnosti pro rozhraní vzduch - sklo je třeba orientačně znát. Velice to usnadní chápání funkce optických interferometrů a i jiných přístrojů.

4.2.2 Fresnelovy koeficienty pro p-polarizaci

V tomto případě vektory \vec{E} leží v rovině dopadu a příslušné vektory \vec{H} jsou na ni kolmé, jak je znázorněno na obr.4.7. Postup při odvozování Fresnelových koeficientů bude stejný jako v předchozím případě: Napíšeme hraniční podmínky pro vektory \vec{E} a \vec{H} , amplitudy H nahradíme podle (4.17), zavedeme Fresnelovy amplitudy a máme opět dvě rovnice, z nichž je už vypočteme.

Tak tedy hraniční podmínka pro vektory \vec{E}

$$E_{ip} \cos \alpha_1 - E_{rp} \cos \alpha_1 = E_{tp} \cos \alpha_2 .$$

Hraniční podmínka pro vektory \vec{H}

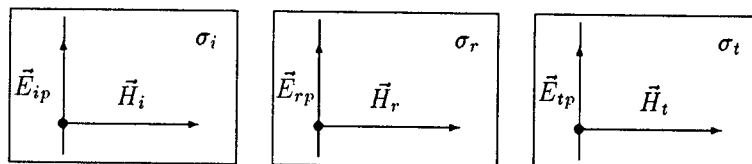
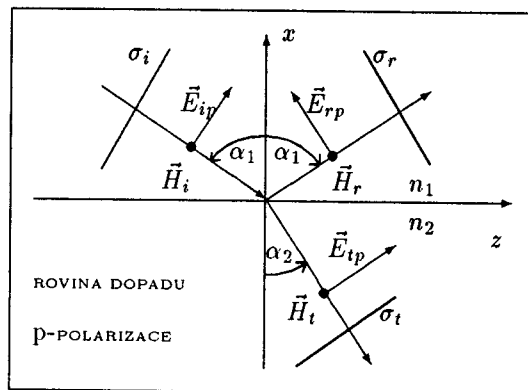
$$H_i + H_r = H_t$$

se po dosazení z (4.17) změni na tvar

$$n_1 E_{ip} + n_1 E_{rp} = n_2 E_{tp}$$

Po zavedení Fresnelových amplitud budou mít hraniční podmínky tvar

$$\cos \alpha_1 + r_p \cos \alpha_1 = t_p \cos \alpha_2 \quad (4.24)$$



Obr. 4.7: Znázornění orientace vektorů \vec{E} a \vec{H} v dopadající, odražené a lomené vlně při p -polarizaci. V dolní části jsou opět uvedeny roviny σ kolmé na příslušné vlny a v nich zakresleny uvažované vektory a průsečnice s rovinou dopadu při pohledu ve směru šíření vlny.

$$n_1 + n_1 r_p = n_2 t_p . \quad (4.25)$$

Z těchto dvou rovnic pak pro Fresnelovy koeficienty dostáváme

$$r_p = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} . \quad (4.26)$$

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} , \quad (4.27)$$

kde pro přepis na druhé výrazy bylo opět použito Snellova zákona. Odrazivost a propustnost je opět dána výrazy

$$R_p = r_p r_p^* = \left[\frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \right]^2 \quad (4.28)$$

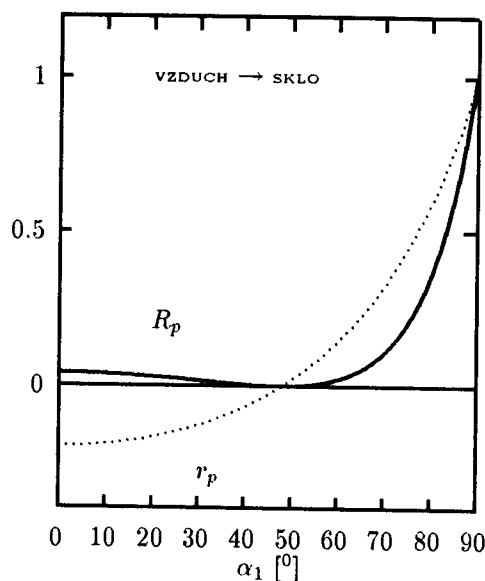
$$T_p = \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1} \left[\frac{2n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} \right]^2 \quad (4.29)$$

Odrazivost a propustnost opět splňuje zákon zachování toku energie na rozhraní pro neabsorbující prostředí.

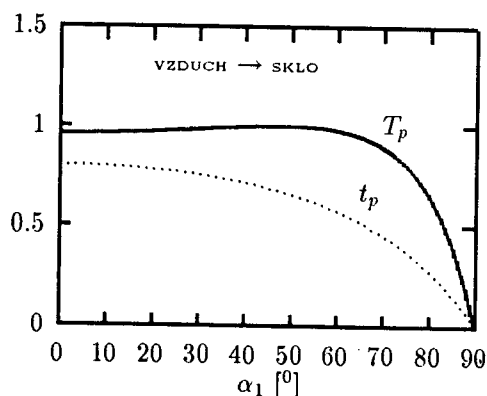
Na tomto místě je užitečné všimnout si **rozporu** v našich výpočtech koeficientů odrazivosti. Rozpor vynikne, když do rovnic (4.20) a (4.26) dosadíme $\alpha_1 = 0$. Dostáváme

$$r_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -r_s$$



Obr. 4.8: Graf závislosti koeficientu odrazivosti r_p (tečkovaně) a odrazivosti R_p (plně) při p -polarizaci na úhlu dopadu pro přechod světla ze vzduchu ($n_1 = 1$) do skla ($n_2 = 1.5$).



Obr. 4.9: Graf závislosti koeficientu propustnosti t_p (tečkovaně) a propustnosti T_p (plně) při p -polarizaci na úhlu dopadu pro přechod světla ze vzduchu ($n_1 = 1$) do skla ($n_2 = 1.5$). Protože při existuje úhel α_1 , kdy je $R_p = 0$, tak při tomtěž úhlu je $T_p = 1$.

Rozpor spočívá v tom, že při kolmém dopadu vlnění na rozhraní není definována rovina dopadu a tedy r_s se musí rovnat r_p . Absolutní hodnoty shodné jsou, avšak liší se ve fázi. Při uplatňování podmínky na rozhraní pro vektory \vec{E} jsme totiž automaticky zvolili orientaci vektoru \vec{E}_{r_p} shodnou s \vec{E}_{i_p} . Z obr. 4.8 však vidíme, že koeficient odrazivosti r_p mění znaménko a tím i fázi v závislosti na úhlu dopadu. Dodatečně tedy provedeme opravu znaménka před r_p v tom smyslu, aby při kolmém dopadu vlny na rozhraní byly shodné i fáze.

Správné vzorce pro Fresnelovy amplitudy tedy jsou

$$r_p = -\frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (4.30)$$

Graf závislosti r_p na úhlu dopadu na obr.4.8 je kreslen již podle tohoto opraveného vzorce. U vzorců pro koeficienty propustnosti se žádné problémy nevyskytují, protože v závislosti na úhlu dopadu nemění svoje znaménko. Poznamenejme, že uvedená nesrovnalost u Fresnelových amplitud se vyskytuje i v řadě renomovaných knih.

4.3 Totální odraz světla

K zajímavému jevu dochází, když světlo dopadá z prostředí o větším indexu lomu do prostředí s menším indexem lomu. Podle Snellova zákona pro úhel lomu dostáváme

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1.$$

Pravá strana této rovnice musí být vždy menší než jedna. Tato podmínka omezuje interval možných úhlů dopadu při nichž nastane lom světla. Pro **mezní úhel** α_{1m} tedy platí

$$\sin \alpha_{1m} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.31)$$

Pro úhly dopadu větší než je α_{1m} tedy lomená vlna vůbec neexistuje. Podívejme se podrobněji, co se děje s koeficienty odrazivosti při přechodu tohoto mezního úhlu.

Za tím účelem upravme rovnice pro r_s a r_p tak, aby v nich vystupoval pouze úhel dopadu α_1 . Ze Snellova zákona plyne

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2}.$$

Dosazením do rovnic (4.20) a (4.30) dostaneme pro úhly $\alpha_1 < \alpha_{1m}$ výrazy

$$r_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2}}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2}}.$$

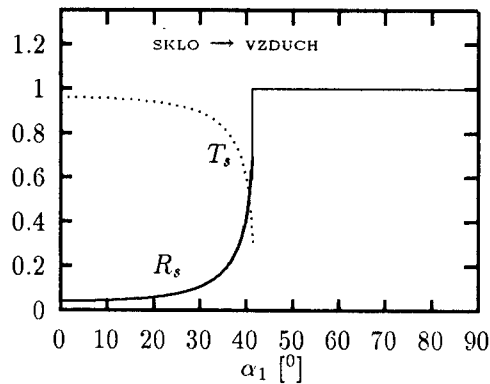
$$r_p = \frac{n_1 \sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2} - n_2 \cos \alpha_1}{n_1 \sqrt{1 - (n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2} + n_2 \cos \alpha_1}.$$

Pro úhly $\alpha_1 > \alpha_{1m}$ je výraz pod odmocninou záporný a odmocnina je tedy ryze imaginární. Proto budou mít tyto rovnice tvar

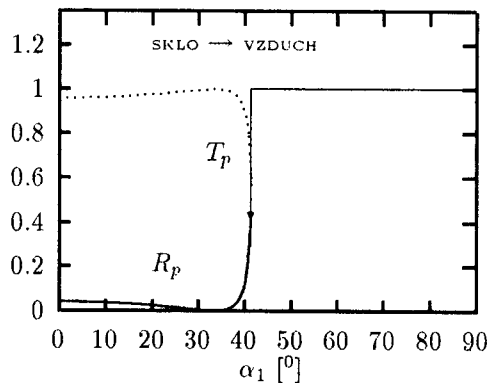
$$r_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - in_2 \sqrt{(n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2 - 1}}{n_1 \cos \alpha_1 + in_2 \sqrt{(n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2 - 1}} = |r_s| e^{i\delta_{rs}}.$$

$$r_p = \frac{in_1 \sqrt{(n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2 - 1} - n_2 \cos \alpha_1}{in_1 \sqrt{(n_1/n_2 \sin \alpha_1)^2 - 1} + n_2 \cos \alpha_1} = |r_p| e^{i\delta_{rp}}.$$

Fresnelovy amplitudy jsou komplexní a fázový posuv odražené vlny oproti vlně dopadající je tedy různý od nuly nebo od π a závisí na úhlu dopadu. Absolutní hodnota je však v této



Obr. 4.10: Závislost odrazivosti a propustnosti na úhlu dopadu při přechodu světla ze skla ($n_1 = 1.5$) do vzduchu ($n_2 = 1$) pro s -polarizaci.



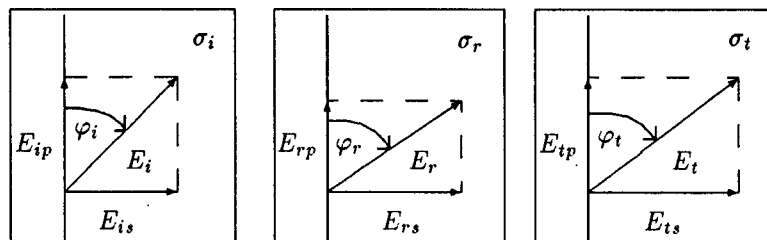
Obr. 4.11: Závislost odrazivosti a propustnosti na úhlu dopadu při přechodu světla ze skla ($n_1 = 1.5$) do vzduchu ($n_2 = 1$) pro p -polarizaci.

oblasti rovna 1, jak se o tom můžeme přesvědčit výpočtem součinu rr^* . $|r_s| = |r_p| = 1$. Oblast úhlů pro něž je $R = 1$ se nazývá **oblastí totálního odrazu**. Zdůrazněme, že mezní úhel nezávisí na polarizaci dopadající vlny.

Této vlastnosti, kdy se světlo odráží na rozhraní sklo vzduch bez ztráty intenzity, se využívá v různých optických přístrojích (např. v triedrech zkracuje vzdálenost mezi objektivem a okulárem) a významnou aplikaci nachází ve spojovací technice v podobě **optických vláken** a **světlovodů** užívaných v lékařství. Ty jsou tvořeny skleněnými vlákny o průměru cca $10\mu\text{m}$. Mohou se různě ohýbat a světlo z nich stěnou neprosteupí ven, protože vždy dopadne na stěnu pod úhlem větším než je úhel mezní, a proto se zase totálně odrazí. Optická vlákna uspořádaná ve světlovodu do matice, mohou dokonce přenášet i světelný obraz rozložený do plošek průřezů vláken.

4.4 Odraz a lom lineárně polarizovaného světla

Zabývejme se nyní stručně problémem, kdy na rozhraní dopadá lineárně polarizovaná vlna s azimutem φ_i . Azimutem rozumíme úhel, který svírá vektor \vec{E} v rovině σ_i s průsečnicí s rovinou dopadu, jak je znázorněno na obr.4.12. Postup při řešení odrazu a lomu takové



Obr. 4.12: Znázornění azimutu v rovinách σ .

vlny spočívá v tom, že vektor amplitudy \vec{E}_i rozložíme na složky E_{is} a E_{ip} . Odraz a lom těchto složek je již vyřešen. Po odrazu a lomu můžeme zase najít výslednou amplitudu a příslušný azimut následujícím postupem. Pro dopadající vlnu platí

$$E_{is} = E_i \sin \varphi_i$$

$$E_{ip} = E_i \cos \varphi_i .$$

Pro odraženou vlnu platí

$$E_{rs} = r_s E_{is} = r_s E_i \sin \varphi_i$$

$$E_{rp} = r_p E_{ip} = r_p E_i \cos \varphi_i$$

$$\tan \varphi_r = \frac{r_s \sin \varphi_i}{r_p \cos \varphi_i} .$$

Pro lomenou vlnu

$$E_{ts} = t_s E_{is} = t_s E_i \sin \varphi_i$$

$$E_{tp} = t_p E_{ip} = t_p E_i \cos \varphi_i$$

$$\tan \varphi_t = \frac{t_s \sin \varphi_i}{t_p \cos \varphi_i} .$$

Při odrazu na dielektriku, mimo oblast totálního odrazu, je odražená i lomená vlna opět lineárně polarizovaná, protože fázový posuv mezi složkami s a p je buď π nebo 0 . V oblasti totálního odrazu nebo, jak ukážeme později, i při odrazu na kovech vznikne vlna obecně elipticky polarizovaná.

4.5 Odraz a lom nepolarizovaného světla

Nekoherentní zdroje světla vysílají vlnová klubka, jejichž vektor amplitudy \vec{E} má zcela náhodnou orientaci v rovině σ kolmé na směr šíření. Zcela dokonalá nepravidelnost orientace těchto amplitud nás oprávnňuje k následujícímu tvrzení.

Nepolarizovanou vlnu o intenzitě I rozložíme na vlnu s -polarizovanou s intenzitou $I_s = I/2$ a na vlnu p -polarizací o intenzitě $I_p = I/2$. Po odraze dostáváme

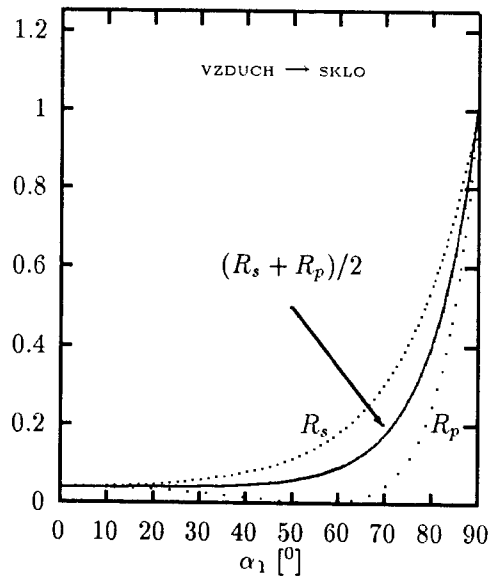
$$I_{rs} = R_s I/2$$

$$I_{rp} = R_p I/2$$

Celková intenzita odražené vlny je

$$I_r = I_{rs} + I_{rp} = I(R_s + R_p)/2$$

Vidíme, že po odraze už není vlna ideálně nepolarizovaná, protože $R_s \neq R_p$. Pro popis



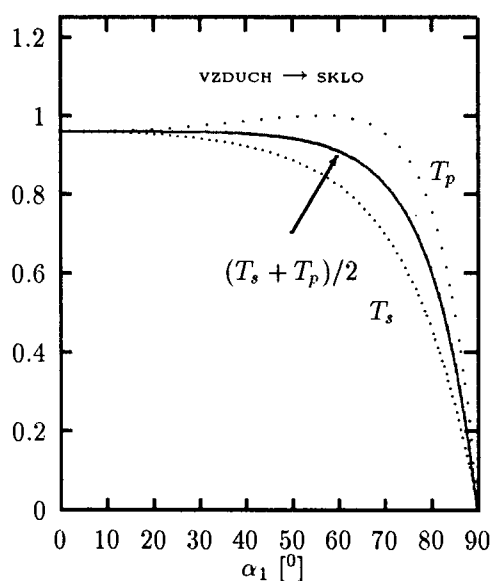
Obr. 4.13: Graf závislosti odrazivosti na úhlu dopadu pro nepolarizované světlo při odraze na rozhraní vzduch – sklo $n_2 = 1.5$.

takových změn polarizace se zavádí nová veličina zvaná **stupeň polarizace** vztahem

$$P_r = \left| \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p} \right| \quad (4.32)$$

pro vlnu odraženou a vztahem

$$P_t = \left| \frac{T_s - T_p}{T_s + T_p} \right| = \left| \frac{R_s - R_p}{2 + R_s + R_p} \right| \quad (4.33)$$



Obr. 4.14: Graf závislosti propustnosti na úhlu dopadu pro nepolarizované světlo při průchodu rozhraním vzduch - sklo, $n_2 = 1.5$.

pro vlnu lomenou, kde pro druhý výraz bylo využito zákona zachování toku energie. Na základě stupně polarizace pak mluvíme o vlně **nepolarizované**, **částečně polarizované** a **polarizované**, když $P = 0$, $1 > P > 0$ a $P = 1$.

Z obr.4.8 a 4.11 je vidět, že pro R_p existuje vždy úhel dopadu, kdy $R_p = 0$. Z rovnice (4.28) vidíme, že je to takový úhel α_{1B} , kdy jmenovatel $\rightarrow \infty$, tj., kdy

$$\alpha_{1B} + \alpha_2 = \pi/2.$$

Dosadíme-li tuto podmínku do Snellova zákona dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha_{1B} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.34)$$

což je vztah pro tzv. **Brewsterův úhel** při němž nastává lineární polarizace odražené vlny, přes to, že dopadá vlna nepolarizovaná. Po odraze pod tímto úhlem má vlna pouze složku R_s , protože $R_p(\alpha_{1B}) = 0$.

Poznamenejme, že pro lomenou vlnu taková situace pro žádný úhel nenastane.

4.6 Světlo v absorbujícím prostředí

Chování světla v dielektriku i na jeho rozhraních popisujeme indexem lomu, jehož souvislost s permitivitou ϵ a magnetickou permeabilitou μ udává rovnice (4.7). Takové prostředí je neabsorbující a EM vlna se v něm šíří podobně, jako ve vakuu. Typickým absorbujícím

prostředím jsou kovy, které v EM teorii charakterizuje elektrická vodivost $\sigma > 0$. To se projeví ve výpočtech tím, že Maxwellova rovnice bude mít tvar

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (4.35)$$

Předpokládejme, že elektrické pole se harmonicky mění s úhlovou frekvencí ω

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

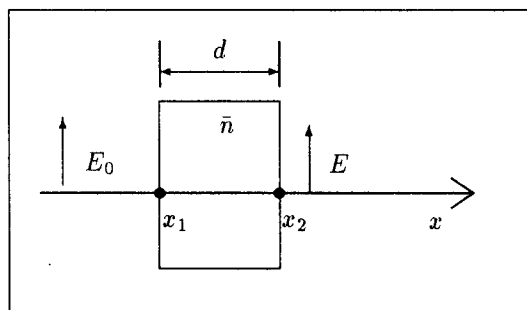
Dosadíme-li tento výraz do Maxwellovy rovnice dostaneme rovnici

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu(\sigma \vec{E}_0 e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon \vec{E}_0 e^{i\omega t}) = i\mu\omega \vec{E}_0 e^{i\omega t}(-i\sigma/\omega + \varepsilon), \quad (4.36)$$

kteřá je formálně shodná s Maxwellovou rovnicí, kdy je $\sigma = 0$, nebo jinak řečeno, když za ε dosadíme výraz $(-i\sigma/\omega + \varepsilon)$, jehož imaginární část je určena elektrickou vodivostí σ . Dosadíme-li tento mezivýsledek do definice indexu lomu rovnici (4.7), vidíme, že pod odmocninou je komplexní číslo, a tedy i odmocnina z něho je komplexní.

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu(-i\sigma/\omega + \varepsilon)}{\mu_0\varepsilon_0}} = n(1 + i\kappa), \quad (4.37)$$

kde κ se nazývá **index absorpce** a jak ukážeme následujícím výpočtem, souvisí jednoduchým způsobem s **lineárním koeficientem absorpce**, který označíme μ_a . Předpokládejme, že



Obr. 4.15: Průchod rovinné vlny absorbujícím prostředím tloušťky d .

absorbujícím prostředím o komplexním indexu lomu \bar{n} se šíří rovinná vlna, jak je znázorněno na obr.4.15. V bodě x_1 je vlna dána rovnicí

$$\psi(x_1) = E_0 e^{i(\omega t - kx_1)}$$

a má intenzitu

$$I_0 = \psi(x_1)\psi^*(x_1) = E_0^2.$$

Na výstupní stěně z absorbujícího prostředí má vlna tvar

$$\psi(x_2) = \psi(x_1 + d) = E_0 e^{i(\omega t - kx_1 - \bar{n}kd)}$$

$$\psi(x_2) = E_0 e^{i(\omega t - kx_1 - nkd + i\kappa kd)}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\psi(x_2) = E_0 e^{-n\kappa k d} e^{i(\omega t - kx_1 - n\kappa d)}. \quad (4.38)$$

Je vidět, že faktor s imaginární částí indexu lomu lze zahrnout do amplitudy.

Intenzita v bodě x_2 je dána vztahem

$$I(x_2) = \psi(x_2)\psi^*(x_2) = E_0^2 e^{-2n\kappa k d} = I_0 e^{-\mu_a d}. \quad (4.39)$$

Lineární koeficient absorpce je tedy dán vztahem

$$\mu_a = 2n\kappa k = \frac{4\pi}{\lambda} n\kappa. \quad (4.40)$$

Poznamenejme, že při tomto odvození lineárního koeficientu absorpce jsme nepostupovali zcela přesně, protože jsme zanedbali propustnost obou rozhraní. Dodejme, že naše závěry se týkají jen šíření světla v absorbujícím homogenním prostředí, v němž nedochází k rozptylu, a netýká se přechodu přes rozhraní (ten je řešen Fresnelovými amplitudami).

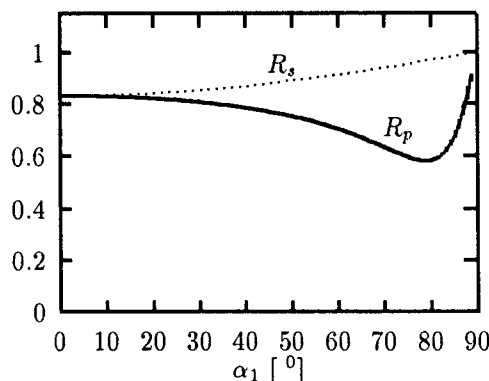
Optické konstanty kovů ($\lambda = 589nm$)			
kov	n	$n\kappa$	Odrazivost ($\alpha_1 = 0$)
Sodík	0.044	2.42	0.97
Stříbro	0.20	3.44	0.94
Hliník	1.44	5.23	0.83
Zlato	0.47	2.83	0.83
Rtuť	1.60	4.80	0.77
Germanium	5.75	1.64	
Křemík	3.97	0.07	
Diamant	2.41	1e-6	

Dosažením komplexního indexu lomu kovů do Fresnelových vzorců se můžeme přesvědčit, že vysoká hodnota indexu absorpce znění kvalitativně chování světla na rozhraní absorbujícího prostředí a dielektrika zejména v těchto směrech:

- **Odrazivost** takových prostředí je vysoká v celém rozsahu úhlů dopadu. Proto se kovové vrstvy na skle chovají jako zrcadla.
- **Fázový posuv** odražené vlny oproti dopadající δ_r je různý od 0 i od π . To znamená, odrazem lineárně polarizované vlny vzniká obecně vlna elipticky polarizovaná $\delta_{rs} - \delta_{rp} \neq 0$. Měřením parametrů elipsy přístrojem zvaný **elipsometr**, lze určovat zpětně index lomu i index absorpce.
- Odrazem na kovu nelze získat ze světla nepolarizovaného světlo lineárně polarizované, tzn. že **neexistuje Brewsterův úhel**.
- Postrádá smysl jev, který jsme nazvali **totální odraz**, protože při šíření světla v takovém prostředí vždy dochází k absorpci. Zákon zachování toku energie se pak musí psát ve tvaru

$$1 = R + T + A,$$

kde A je tzv. **absorbance**.



Obr. 4.16: Závislost odrazivosti R_s a R_p pro hliník na úhlu dopadu při vlnové délce světla $\lambda = 589\text{nm}$.

4.7 Mikroskopická teorie indexu lomu

Homogenní optické prostředí jsme doposud charakterizovali indexem lomu a indexem absorpce, které souvisejí s materiálovými konstantami ϵ , μ a σ . Jedná se o **makroskopické charakteristiky** prostředí, které vystupují v EM teorii. Podobně jako tlak a teplotu uvádí kinetická teorie plynů do souvislosti s chaotickým pohybem molekul, tak index lomu lze zase uvést do souvislosti s mikrostrukturou optického prostředí, v tomto případě s harmonickým pohybem elektronů, kterými se začnou pohybovat při dopadu EM vlny, tj. světla.

Bez vnějšího elektrického pole tvoří jádro atomu s elektrony elektricky neutrální celek. Při dopadu EM vlny se jádro, ve srovnání s elektrony, téměř pohybovat nebude, protože má asi 2000 krát větší hmotnost než elektron. Harmonickým pohybem elektronu tak vznikne **elementární elektrický dipól** \vec{p} , a všechny dipóly společně pak vytvoří dodatečné elektrické pole \vec{P} . Pro velikost výsledného elektrického pole v dielektriku ($\mu_r = 1$) platí:

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_r \epsilon_0 E$$

Odtud dostáváme

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}.$$

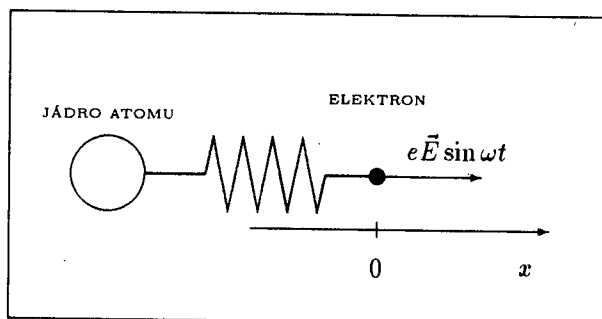
Pro jednoduchost předpokládejme, že naše dielektrikum obsahuje jen jeden typ elementárních dipólů p a jejich počet v objemové jednotce je N . Pak můžeme psát

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Np}{\epsilon_0 E}. \quad (4.41)$$

Dále předpokládejme, že sekundární elektrické pole, tj. pole vyvolané dipóly, je ve srovnání s primárním polem **velmi slabé**. Tento předpoklad bude dobře splněn u plynů,

kde je dostatečně velká vzdálenost mezi atomy, takže dipólové pole jednoho atomu neovlivní pole v místě jiného atomu, protože jeho intenzita klesá s kvadrátem vzdálenosti. **Pro pevné látky tato elementární teorie tedy neplatí**, tam tento předpoklad není splněn a výpočet P bude mnohem složitější, protože zde bude hrát roli i prostorové rozložení atomů, tedy krystalová struktura látky.

Vypočítejme nyní velikost elementárního dipólu. Předpokládejme, že elektrické pole EM vlny má směr osy x , jejíž počátek položíme pro jednoduchost do rovnovážné polohy elektronu, jak plyne z obr.4.17. Na elektron působí vnější síla elektrického pole EM vlny



Obr. 4.17: Znázornění geometrické situace pro výpočet harmonických kmitů elektronu.

$$\vec{F} = -|e|\vec{E}\varepsilon_0 \sin \omega t$$

a pohybová rovnice elektronu tedy je

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = -|e|E\varepsilon_0 \sin \omega t,$$

kde m je hmotnost elektronu a ω_0 je jeho vlastní úhlová frekvence elektronu na daném orbitu. Výraz $m\omega_0^2 x$ má význam pružné síly, která vrací elektron při vychýlení zpět do rovnovážné polohy při malých výchylkách. Předpokládáme-li, že stacionární řešení této diferenciální rovnice ve tvaru

$$x = x_0 \sin \omega t,$$

pak pro amplitudu těchto kmitů dostáváme výraz

$$x_0 = \frac{|e|E\varepsilon_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Pro elementární elektronový dipól pak dostáváme

$$p = -ex_0 = \frac{-e^2 E\varepsilon_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

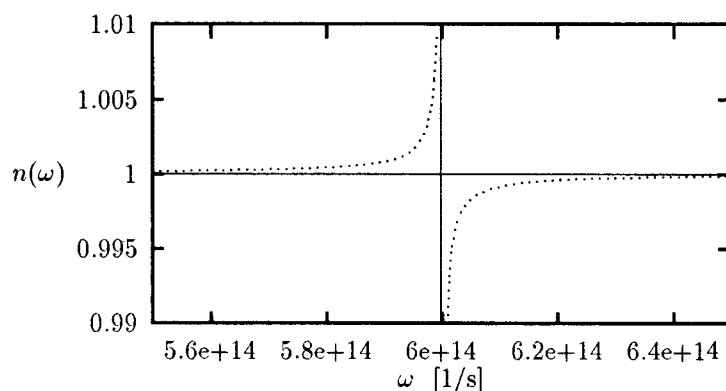
Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (4.41), jsme již téměř u cíle celého výpočtu

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Z definice indexu lomu v EM teorii pak plyne

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \doteq 1 + \sum_j \frac{e^2 N_j}{2m(\omega_{0j}^2 - \omega^2)} . \quad (4.42)$$

Tato rovnice uvádí do souvislosti čtyři veličiny: index lomu, objemovou hustotu elektronů,



Obr. 4.18: Závislost indexu lomu na frekvenci. Oblast nalevo od $\omega_0 = 6e + 14$, kde index lomu s frekvencí roste je oblastí nazývanou **normální disperze**. V okolí ω_0 se mluví o **anomální disperzi**.

frekvenci dopadající EM vlny, vlastní frekvenci elektronu na atomovém orbitu, pro níž platí $h\omega_{0j}/2\pi = A_j$, kde A_j je ionizační energie j -tého elektronu.

Všimněme si důležité závislosti indexu lomu na ω . Pro frekvenci **viditelného světla** ω a naprostou většinu orbitů obsazených elektrony platí $\omega_{0j} > \omega$. Tzn., že index lomu pro viditelnou oblast EM vln je větší než 1 a s rostoucí frekvencí EM vlny jeho hodnota roste.

Jinak tomu je pro oblast EM vln odpovídající rentgenovému záření, jemuž odpovídají vlnové délky ve vakuu z intervalu 0.01 nm až 1 nm. Pro tuto oblast platí nerovnost $\omega_{0j} < \omega$ a z toho důvodu je **index lomu látek pro rentgenové záření menší než 1** a s rostoucí frekvencí EM vlny se index lomu více a více blíží 1.

Na první pohled se zdá, že jde o zásadní rozpor s teorií relativity, neboť rentgenové záření by se v látkách mělo šířit rychleji než rychlostí světla ve vakuu, avšak o žádný rozpor nejde. Napadený axióm teorie relativity se týká přenosu energie světlem, tedy rychlosti šíření světelných klubek, tj. rychlosti **grupové** o níž pojednáme v následujícím odstavci, zatímco v definici indexu lomu vystupují rychlosti **fázové**.

Závislosti indexu lomu na objemové koncentraci elektronů lze u plynů využít k měření jejich tlaku a to pomocí např. Jaminova interferometru.

4.8 Grupová a fázová rychlost světla

V odstavci o vlnových klubečích jsme došli k závěru, že časově omezenou harmonickou vlnu o frekvenci ω lze vyjádřit jako superpozici nekonečně mnoha rovinných vln o amplitudě $A(\varepsilon)$ a frekvenci $\omega + \varepsilon$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(\varepsilon) e^{i(\omega+\varepsilon)(t-x/c)} d\varepsilon .$$

Předpokládali jsme, že vlny se šíří ve vakuu všechny stejnou rychlostí c . V optickém prostředí se však vlny o různé frekvenci šíří různou rychlostí

$$v(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} ,$$

neboť index lomu závisí na frekvenci. Této vlastnosti indexu lomu říkáme **disperze**. Zahrneme-li tuto závislost do vlnového čísla $k(\omega)$, můžeme rovnici vlnového klubka přepsat na tvar

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(\varepsilon) e^{i[(\omega+\varepsilon)t - xk(\omega+\varepsilon)]} d\varepsilon .$$

Hodnotu vlnového čísla k v bodě $\omega + \varepsilon$ vyjádříme přibližně pomocí prvních dvou členů Taylorovy řady

$$k(\omega + \varepsilon) = k(\omega) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega} \varepsilon + \dots$$

Pak pro vlnové klubko dostáváme

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(\varepsilon) e^{i\varepsilon(t - \frac{dk}{d\omega} x)} e^{i\omega(t - xk(\omega)/\omega)} d\varepsilon .$$

Tento výraz má následující fyzikální význam:

Prvé dva faktory za integračním znaménkem závisí pouze na rozladění ε . Výraz $d\omega/dk$ lze pak interpretovat jako rychlost šíření amplitudy $A(\varepsilon)$, tedy jako rychlost šíření intenzity světla. Tato rychlost se nazývá **grupová** a platí tedy pro ji vztah

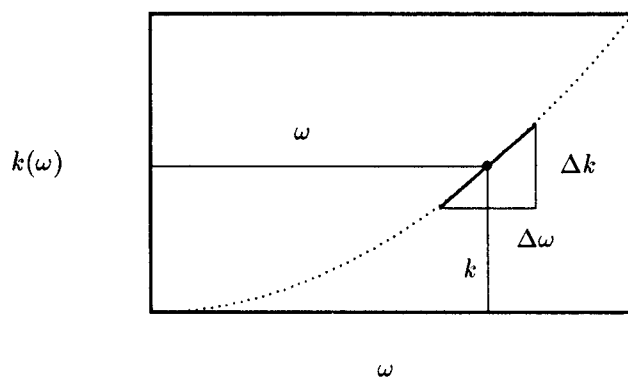
$$v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk} . \quad (4.43)$$

Vlna o střední frekvenci klubka se šíří rychlostí **fázovou** a platí

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{n(\omega)k_0} = \frac{c}{n(\omega)} . \quad (4.44)$$

Tím, že se jednotlivé vlny vytvářející vlnové klubko šíří různými rychlostmi, mění vlnové klubko v takovém prostředí svoji délku.

Detailní analýza různých relativistických i jiných efektů spojených se šířením světla v disperzních prostředích, která ještě i pohybují vzhledem ke zdroji (Dopplerův jev) sahají mimo základy optiky a proto se jimi dále zabývat nebudeme.



Obr. 4.19: Znázornění rozdílu mezi grupovou a fázovou rychlostí na grafu závislosti vlnového čísla na frekvenci.

4.9 Rozptyl světla

Rozptyl světla nastává v **nehomogenních prostředích**, jako jsou mraky, kalná voda, ale i modrá barva oblohy je důsledek rozptylu slunečního světla na fluktuacích hustoty vzduchu. Problém rozptylu světla budeme řešit v rámci klasické fyziky na základě EM teorie.

Intenzita elektrického pole \vec{E} klesá se vzdáleností r od elektrického náboje q jak plyne z Coulombova zákona. Nepřekvapí nás tedy jiný závěr z EM teorie, že intenzita elektrického pole $\vec{E}(P)$ v bodě $P(\vec{r})$ se bude měnit, když elektrický náboj bude měnit svou polohu, když se bude zrychleně pohybovat. S ohledem na konečnou rychlost šíření elektrického pole však jeho změny v bodě P zaznamenáme se zpožděním r/c .

Podle EM teorie je intenzita elektrického pole \vec{E} (amplituda dipólové vlny) v bodě P daleko od dipólu je dána vztahem

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ddot{\vec{e}}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (4.45)$$

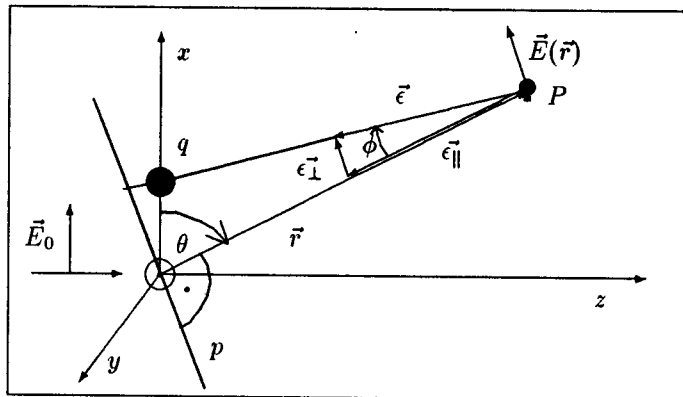
kde \vec{e} má význam druhé derivace jednotkového vektoru podle času, pod nímž pozorujeme z bodu P zrychleně se pohybující náboj q . Z tohoto vztahu vyjdeme při následujícím výpočtu intenzity rozptýleného světla.

Všimněme si, že směr hledaného vektoru \vec{E} (amplitudy dipólové vlny) je určen směrem vektoru \vec{e} . Jak plyne z obr.4.20 rozložíme vektor \vec{e} na složku rovnoběžnou s průvodičem \vec{r} a na složku na něj kolmou.

$$\vec{e} = \vec{e}_{\parallel} + \vec{e}_{\perp}.$$

S dostatečně velkou přesností pro druhou derivaci podle času platí

$$\ddot{\vec{e}} = \ddot{\vec{e}}_{\perp},$$



Obr. 4.20: Okamžitá poloha náboje q kmitajícího podél osy x . Vektor \vec{r} svírá s osou x úhel Θ a určuje polohu bodu P , v němž pozorujeme EM vlnu generovanou nábojem q . Přímka p je kolmá na \vec{r} a leží v rovině úhlu Θ .

přes to, že přísně vzato $\ddot{\vec{e}}$ není kolmý na \vec{e} . Z geometrické situace na obr.4.20 plyne, že úhel ϕ je velice malý neboť $|x| \ll r$. Platí

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} \phi = \phi = \frac{x \sin \theta}{r}$$

a tedy po druhé derivaci dostaneme

$$\ddot{\vec{e}} = \ddot{\phi} = \frac{\sin \theta}{r} \ddot{x},$$

kde x je výchylka harmonických kmitů náboje q kmitající ve směru osy x pod vlivem dopadající EM vlny s amplitudou \vec{E}_0 rovnoběžnou s osou x . Necht' tedy kmity náboje q popisuje rovnice

$$x(t) = x_0 E_0 e^{i\omega t}.$$

Pak

$$\ddot{x} = -\omega x_0 E_0 e^{i\omega t}$$

a

$$\ddot{\vec{e}} = \ddot{\phi} = -\frac{\sin \theta}{r} \omega x_0 E_0 e^{i\omega t}.$$

Když dosadíme nyní tento výraz do rovnice (4.45) dostáváme pro velikost intenzity elektrického pole v bodě P výraz

$$E(r, t) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \omega x_0 E_0 e^{i\omega(t-r/c)}, \quad (4.46)$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$E(r, t) = A \frac{E_0 \omega \sin \theta}{r} e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (4.47)$$

Vidíme, že formálně má tento výraz tvar kulové vektorové EM vlny, jejíž amplituda závisí na úhlu mezi směrem kmitů náboje q a průvodičem r . Směr vektoru amplitudy je kolmý na \vec{r} a leží v rovině určené průvodičem \vec{r} a vektorem amplitudy dopadající EM vlny.

Tím jsme ukázali, že vynucené kmity elektronu jsou zdrojem sekundárních kulových EM vln, které se nám jeví jako rozptyl světla v nehomogenním prostředí.

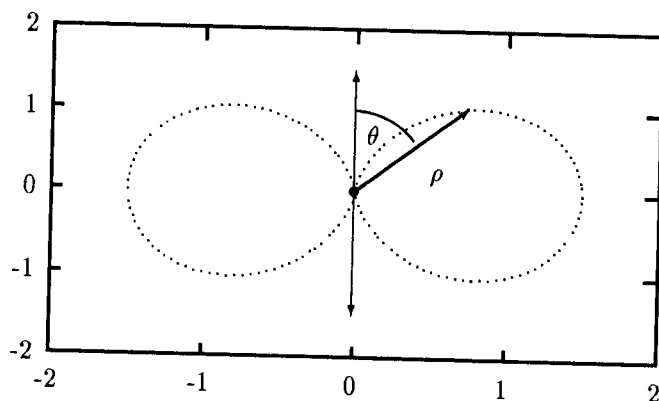
EM vlnám s touto směrovou charakteristikou amplitudy se říká **dipólové vlny** a setkáváme se s nimi nejen v optice při rozptylu světla, ale i v teorii objasňující dvojlom a optickou aktivitu látek. Dále pak při šíření EM vln z televizních a rozhlasových vysílačů.

Všimněme si, že **ve směru kmitů dipólu je amplituda dipólové vlny nulová**. Dipólová vlna se tedy šíří do všech směrů od dipólu, kromě výše uvedeného. Abychom pozorovali rozptyl světla, musí nehomogenity hustoty elektronů mít lineární rozměr menší, než je vlnová délka dopadajícího světla. Při větších rozměrech (např. kapičky vody v mracích) dochází jak k rozptylu, tak i k odrazu na povrchu i k lomu.

K čistému rozptylu dochází např. na fluktuacích elektronové hustoty ve vzduchu. Mluví se často o **Rayleigho rozptylu** podle fyzika, který na konci minulého století tento jev poprvé objasnil. Intenzitu rozptýleného světla vypočteme z dipólové vlny. Dostaneme

$$I(r, \theta) = \left[A_0 E_0 \omega \frac{\sin \theta}{r} \right]^2 = I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{r^2}. \quad (4.48)$$

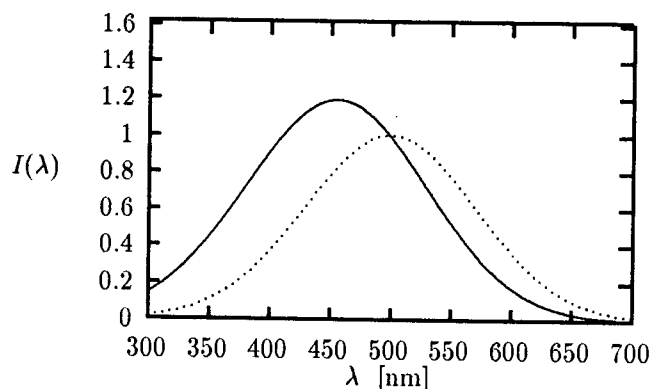
Z obr.4.22 vidíme, že intenzita rozptýleného světla je úměrná čtvrté mocnině frekvence.



Obr. 4.21: Polární vyzářovací diagram dipólu. Průvodič ρ je úměrný intenzitě světla vyzářené dipólem do směru určeného úhlem Θ . Oboustranné šipky znázorňují směr kmitů dipólu a ρ míří k pozorovateli do bodu P .

Kratší vlnové délky vykazují mnohonásobně větší intenzitu rozptylu, než delší vlnové délky. Proto se nám jeví obloha modrá a vycházející nebo zapadající Slunce načervenalé. Mraky jsou bílé jako sluneční světlo, protože na kapičkách vody dochází především k odrazu slunečního světla všemi směry a ten překryje slabý rozptyl. Kapičky vody jsou obvykle větší než vlnová délka světla a proto dochází k odrazu na rozhraní vzduch - voda.

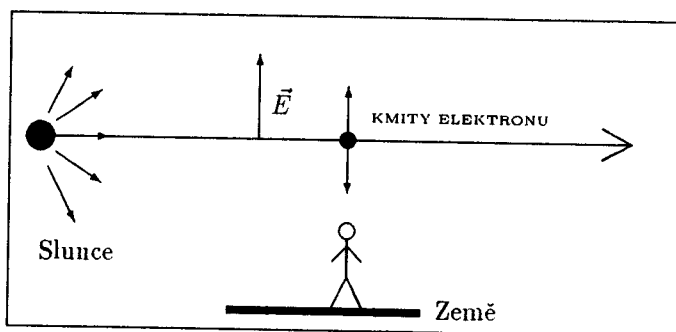
Modrá obloha vykazuje ještě jeden velice zajímavý efekt. Při západu nebo při východu slunce modrá obloha nad naší hlavou vysílá k nám **lineárně polarizované světlo**, jehož vektor amplitudy leží v rovině kolmé na směr šíření světla od Slunce – viz 4.23. Vektory



Obr. 4.22: Graf závislosti intenzity rozptýleného světla na vlnové délce (plně), jestliže se rozptylovalo sluneční bílé světlo, jehož spektrální složení je znázorněno tečkovaně .

amplitudy \vec{E} nepolarizovaného světla ze Slunce leží v rovině kolmé na směr šíření, protože jde o příčné EM vlny. Kmity elektronů a jim odpovídající vektory amplitudy rozptýleného světla leží tedy ve stejné rovině a rozptýlené světlo je tedy lineárně polarizované.

Tohoto polarizačního efektu rozptýleného světla se využívá v praxi pro určení **směru propustnosti polaroidů** založených na dichroizmu. Taková látka má molekuly orientované přesně jedním směrem a koeficient lineární absorpce silně závisí na orientaci vektoru \vec{E} dopadající vlny vzhledem k tomuto směru. Průchodem nepolarizovaného světla přes vrstvu takové látky získáme světlo lineárně polarizované.



Obr. 4.23: Znázornění situace při pozorování polarizace světla modré oblohy při východu nebo západu slunce.

Jestliže elementární dipóly jsou v látce homogenně rozloženy, dá se ukázat, že k **rozptylu nedochází**, ale na rozhraní vznikne vlna odražená a v látce vlna lomená, jak to známe z makroskopické EM teorie. Polarizační efekty při odraze a úhlová závislost Fresnelových koeficientů je důsledek úhlové závislosti amplitudy dipólové vlny na úhlu θ . O této mikroskopické teorii Fresnelových koeficientů odrazu a lomu pojednává Ewaldova - Oseenova teorie.

Zcela zřejmý důkaz o existenci dipólových vln i v homogenním optickém prostředí

vyplyne ze sledování polarizačních vlastností odražené vlny. Jestliže dopadající vlna vykazuje s -polarizaci, pak elementární dipóly v prostředí kmitají ve stejném směru a vzniklá dipólová vlna, která odpovídá za vznik odražené vlny, nevymizí při žádném úhlu dopadu. Při p -polarizaci je tomu jinak. Do směru kolmého na směr šíření vlny v prostředí se dipólová vlna nemůže šířit a odražená vlna má tedy nulovou amplitudu. Tato situace odpovídá přesně tomu, kdy Fresnelův koeficient $r_p = 0$.

4.10 Dvojlomné látky

Krystaly s nižší symetrií krystalové mřížky než je kubická, se chovají ke světlu jako **anizotropní prostředí** (A-prostředí) a při dopadu rovinné vlny na takový krystal vykazují **dvojlom**. Tak se nazývá jev, kdy v A-prostředí z jedné dopadající vlny vzniknou vlny dvě, s různými vlnovými vektory a dodejme hned, že polarizované v rovinách na sebe kolmých. Tyto vlastnosti předurčují dvojlomné látky k využití u různých optických přístrojů jako polarizátory, kompenzátory fázového posuvu, polarizační mikroskopy, apod. Proto se budeme šířením světla v těchto látkách zabývat jen v takovém rozsahu, abychom objasnili funkci těchto zařízení.

Index lomu anizotropního prostředí není skalární veličina, jako u izotropních látek, ale je to **tenzor 2. řádu**.

Problém šíření vln v A-prostředí objasníme pomocí tzv. **k-prostoru**. Je to prostor všech vlnových vektorů \vec{k} , které mohou v daném prostředí vzniknout. Tak např. ve vakuu se mohou šířit rovinné vlny všemi směry a absolutní hodnota \vec{k} má ve všech směrech stejnou hodnotu $k = \omega/c$. Geometrické místo koncových bodů těchto vektorů vytváří **kulovou plochu** o poloměru k . V izotropním prostředí o indexu lomu n je to také kulová plocha, avšak její poloměr je nk . Vlnový vektor o souřadnicích (k_x, k_y, k_z) musí vždy vyhovovat rovnici

$$\left(\frac{k_x}{nk}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{nk}\right)^2 + \left(\frac{k_z}{nk}\right)^2 = 1.$$

Jednoosé dvojlomné krystaly (jinými se zabývat nebudeme) jsou charakterizovány **dvěma** indexy lomu, které odpovídají dvěma vlnám polarizovaným kolmo na sebe, jež vzniknou v takovém prostředí při průchodu světla:

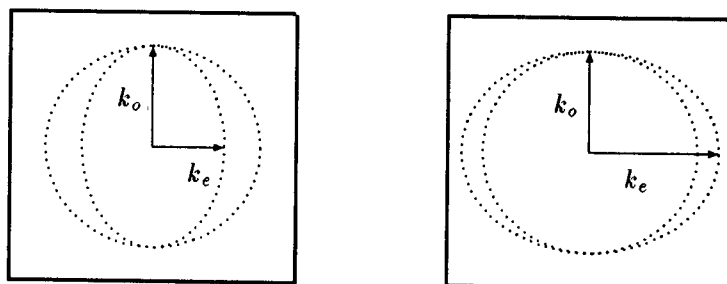
indexem lomu vlny řádné - veličiny s touto vlnou spojené budeme značit indexem o podle názvu *ordinarius*.

indexem lomu vlny mimořádné - veličiny s touto vlnou spojené budeme značit indexem e podle názvu *extraordinarius*.

Koncové body vektorů \vec{k}_e vytvářejí v k-prostoru rotační elipsoid

$$\left(\frac{k_{ex}}{n_e k}\right)^2 + \left(\frac{k_{ey}}{n_e k}\right)^2 + \left(\frac{k_{ez}}{n_o k}\right)^2 = 1, \quad (4.49)$$

kdežto koncové body vektorů \vec{k}_o vytvářejí v k-prostoru kouli. Známe-li tedy indexy lomu



Obr. 4.24: Znázornění k-prostoru pro jednoosé dvojlomné látky pozitivní ($n_o > n_e$) a negativní ($n_o < n_e$).

n_o a n_e , pak podle rovnice (4.49) můžeme vypočítat vlnové číslo k'_e a tedy i index lomu n'_e pro libovolný směr šíření rovinné vlny vzhledem k **optické ose**. Ta odpovídá směru hlavní poloosy rotačního elipsoidu, která má stejnou velikost jako poloměr kulové plochy. Na obr.4.24 je to směr k_o .

krystal	n_o	n_e	typ dvojlomu
vápenec	1.6584	1.4864	pozitivní
křemen	1.5443	1.5534	negativní
led	1.309	1.313	negativní

4.10.1 Odraz a lom na rozhraní dvojlomné látky

Optická osa je pevně spojena s krystalografickou mřížkou dvojlomné látky a proto povrch může mít vzhledem k ní zcela obecnou orientaci. Při dopadu rovinné vlny na rozhraní dvojlomné látky vznikne v obecném případě vlna odražená s vlnovým vektorem \vec{k}_r a dvě vlny lomené \vec{k}_{ot} a \vec{k}_{et} .

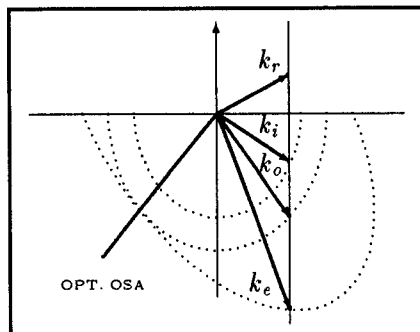
Výpočet Fresnelových amplitud příslušných vln provádět nebudeme. Omezíme se pouze na nalezení vlnových vektorů, tzn. analogie Snellova zákona pro dvojlom.

Z podobných úvah o odrazu a lomu na rozhraní izotropních prostředí byl podle EM teorie odvozen Snellův zákon z požadavku rovnosti fáze všech vln v rovině rozhraní, jak plyne z rovnice (4.9). Naše 4 vln musejí splňovat podobnou podmínku na rozhraní dvojlomné

látky

$$\vec{r}_s \vec{k}_i = \vec{r}_s \vec{k}_r = \vec{r}_s \vec{k}'_{et} = \vec{r}_s \vec{k}_{ot} ,$$

kde $\vec{r}_s = (0, y, z)$ je polohový vektor bodu P ležící v rozhraní. Splnit tuto podmínku pro libovolný bod na rozhraní vede k nám již známé podmínce, že průměty všech vektorů \vec{k} do rozhraní musejí být stejné. Vzhledem k tomu, že velikost k'_{et} závisí na orientaci povrchu a optické osy, je určení směru šíření vlny ψ_e složité. Řešení naznačíme pouze v případě, kdy vlnový vektor dopadající vlny leží v rovině optické osy a normály k povrchu. V tomto



Obr. 4.25: Lom a odraz vlny na rozhraní vakuum – negativní jednoosá dvojlomná látka, kdy vlnový vektor dopadající vlny leží v rovině optické osy a normály k povrchu.

speciálním případě dostáváme pro lomenou vlnu podobnou podmínku jako Snellův zákon

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_{2o} \sin \alpha_{2o}$$

pro řádnou vlnu a

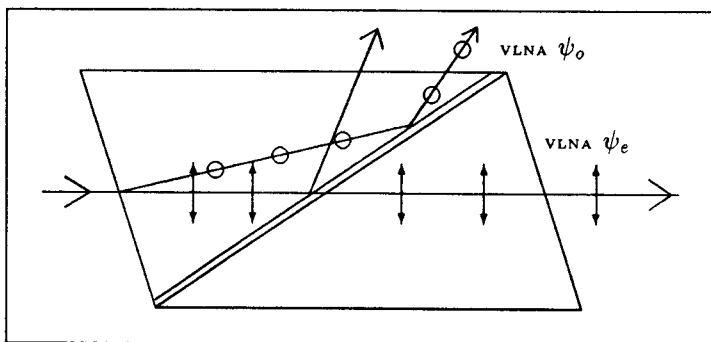
$$n_1 \sin \alpha_1 = n'_{2e} \sin \alpha_{2e}$$

pro mimořádnou vlnu, kde však za index lomu n'_{2e} musíme dosadit hodnotu vypočtenou z rovnice (4.49) pro danou orientaci optické osy vzhledem k povrchu.

4.10.2 Polarizace dvojlomem

Významnou vlastností dvojlomných látek je schopnost lineárně polarizovat světlo. Využívá se k tomu faktu, že vektor \vec{E}_o leží v rovině určené optickou osou a vlnovým vektorem dopadající vlny a vektor \vec{E}_e je na ni kolmý. Teoretické zdůvodnění tohoto faktu plyne z EM teorie a přesahuje rámec tohoto úvodu do optiky.

Nejznámějším polarizačním zařízením pracujícím na principu dvojlomu je tzv. **Nicolův hranol**, nebo polarizátor. Schematicky je řez takovým hranolem nakreslen na obr.4.26. Jde o krystal islandského vápence (ty jsou velice čisté), který je rozříznut nadvě částí a znovu slepen, jak je naznačeno na obrázku. Při dopadu světla vzniknou v první části vlna řádná



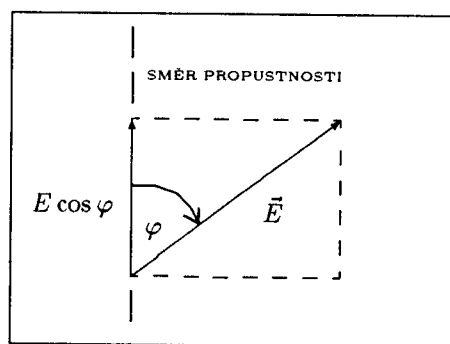
Obr. 4.26: Znázornění průchodu světla přes Nicolův hranol a polarizace řádné a mimořádné vlny.

a mimořádná. Mimořádná na rozhraní řezu se odráží a lomí a tak vystoupí druhou částí krystalu. Vlna řádná se na rovině řezu totálně odráží a vystupuje boční stěnou. Je zřejmé, že vstupní povrchy i řez musejí mít přesně zvolenou orientaci vzhledem k optické ose, aby se v něm světlo chovalo tak, jak bylo popsáno.

Dodejme, že dvojlomné látky jsou ideální polarizátory na rozdíl od polaroidů založených na dichroizmu, kdy se jedna z vln v krystalu přímo absorbuje.

4.10.3 Polostínový analyzátor

Analyzátozem nazýváme polarizátor užívaný k analýze polarizačního stavu světla. Tak jako polarizátor, je i analyzátor charakterisován směrem propustnosti. Protože se analyzátozy dělají často z dvojlomných látek, může být směr propustnosti totožný např. s optickou osou, která leží v rovině povrchu takové destičky vybroušené z krystalu.



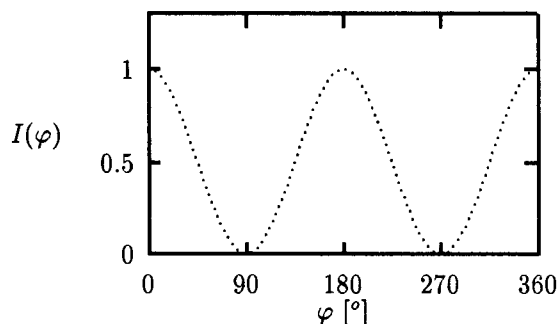
Obr. 4.27: Znázornění polohy směru propustnosti analyzátozu a amplitudy dopadající lineárně polarizované vlny \vec{E} a amplitudy vlny prošlé analyzátozem \vec{E}_o .

Dopadá-li na analyzátoz rovinná vlna, jejíž amplituda svírá s optickou osou úhel φ , tak

po průchodu má amplitudu $t'E \cos \varphi$, kde t a t' jsou příslušné koeficienty propustnosti vstupního a výstupního rozhraní. Intenzita je pak dána vztahem

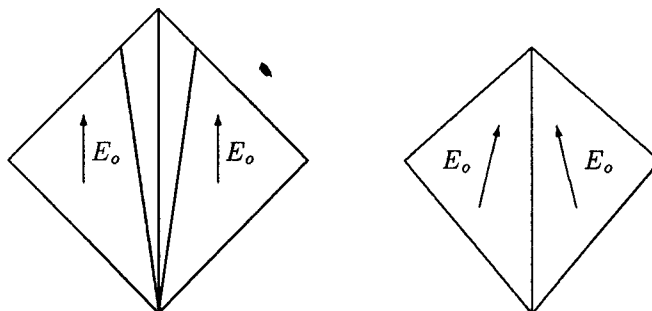
$$I(\varphi) = I_0 \cos^2 \varphi.$$

Vidíme, že intenzita prošlého světla je vždy nulová, když $\varphi = \pi/2$ nebo $3\pi/2$. Minimum



Obr. 4.28: Graf závislosti intenzity lineárně polarizované vlny na úhlu mezi směrem propustnosti a vektorem amplitudy.

intenzity je však velmi ploché a určení této polohy analyzátoru tedy značně nepřesné.



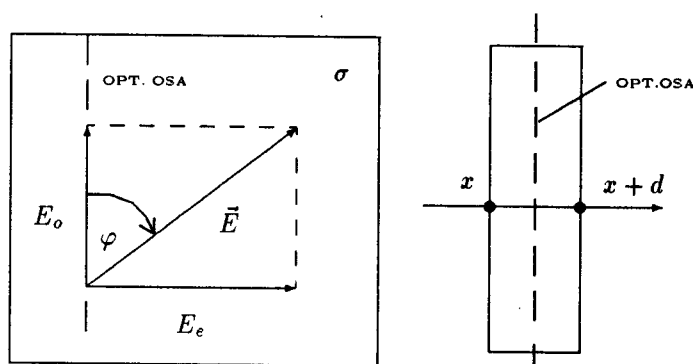
Obr. 4.29: Znázornění vzniku polostínového analyzátoru vyříznutím klínu z dvojhlovného krystalu a následujícím slepením.

Tuto negativní vlastnost jednoduchého polarizátoru odstraňuje při vizuálním pozorování polostínový analyzátor. Ten vznikne tak, že se např. z Nicolů vyřízne klín o úhlu asi 3° až 6° podél směru průchodu světla a znovu se slepí, viz obr.4.29. Tím směry propustnosti v obou polovinách analyzátoru spolu svírají malý úhel. Oko dovede velice dobře porovnat intenzitu světla, kterou propouští obě poloviny analyzátoru a nastavením na stejnou šed' velice přesně určit optimální polohu analyzátoru a tím i směr polarizace dopadající vlny. V tom spočívá význam polostínových analyzátorů.

4.10.4 Fázový kompenzátor

Skládá se jednak z dvojlomné destičky s optickou osou ležící v povrchu a z druhé destičky, která je ale tvořena dvěma klíny jejichž posuvem se mění její tloušťka. Optické osy obou destiček jsou na sebe kolmé. To znamená že vlna, která se v první destičce šíří jako řádná, postupuje druhou jako mimořádná a obráceně. Posuvem klínu lze tedy docílit na výstupu libovolný fázový posuv mezi řádnou a mimořádnou vlnou.

Funkce a význam fázového kompenzátoru vyplývá z následující úvahy. Mějme dvojlomnou



Obr. 4.30: Průchod lineárně polarizovaného světla dvojlomnou destičkou ve směru osy x . Optická osa je rovnoběžná s povrchem destičky.

destičku tloušťky d , jejíž povrch je rovnoběžný s optickou osou, jak je znázorněno na obr.4.30. Nechť na ni dopadá rovinná vlna s vektorem amplitudy \vec{E} , který s optickou osou svírá úhel φ . Tuto vlnu rozložíme na dvě složky: Jedna bude rovnoběžná s optickou osou a bude mít amplitudu $E \cos \varphi$ a druhá bude na ni kolmá a bude mít amplitudu $E \sin \varphi$. Po průchodu destičkou (koeficienty propustnosti pro jednoduchost položíme rovny jedničce) vznikne mezi nimi fázový posuv, protože jim odpovídá různý index lomu.

$$\psi_o = E \cos \varphi e^{i(\omega t - kz - n_o kd)} \quad (4.50)$$

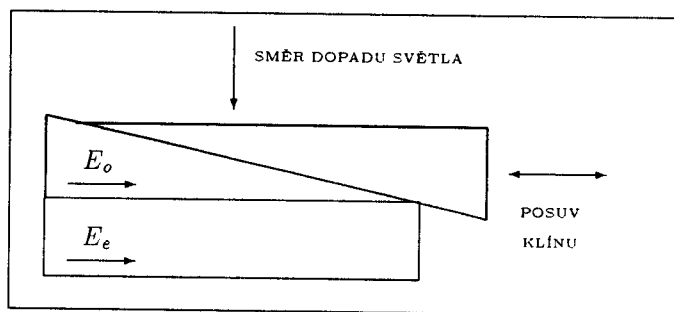
$$\psi_e = E \sin \varphi e^{i(\omega t - kz - n_e kd)}$$

Superpozicí takových dvou vln, jak jsme dříve ukázali, vzniká obecně vlna elipticky polarizovaná, když $kd(n_o - n_e) \neq N\pi$, kde N je celé číslo. Vektor \vec{E} na výstupu z destičky tedy neustále mění svůj směr. Když vložíme do cesty takové vlně analyzátor, pak jím vždy taková vlna projde bez ohledu na směr jeho propustnosti.

Pokud $kd(n_o - n_e) = N\pi$, vznikne na výstupu vlna lineárně polarizovaná. Vložíme-li ji do cesty analyzátor, pak při jeho otáčení vlna neprojde, když je jeho amplituda kolmá na směr propustnosti.

Toto je důležitá vlastnost, která nám umožní analyzátozem odlišit od sebe světlo částečně polarizované od elipticky polarizovaného právě pomocí fázového kompenzátoru. Jeho schéma

je na obr.4.31.



Obr. 4.31: Znázornění průchodu světla přes fázový kompenzátor. Optická osa obou klínů je orientována rovnoběžně s rovinou obrázku, naproti tomu optická osa destičky je na něj kolmá.

Jestliže na takový kompenzátor tedy dopadá elipticky polarizovaná vlna, pak vhodným posuvem kompenzátoru z ní vznikne vlna lineárně polarizovaná a tu analyzátozem snadno poznáme. Naproti tomu když na kompenzátor dopadá světlo částečně polarizované, pak žádným nastavením kompenzátoru nedocílíme toho, že na výstupu bude lineárně polarizované. Tedy samotným analyzátozem nepoznáme je-li světlo částečně polarizované nebo elipticky polarizované.

Fázovým kompenzátozem tedy můžeme definovaně měnit fázový posuv mezi navzájem kolmými složkami téže vlny, a původně elipticky polarizované světlo tak změnit na lineárně polarizované. V tom spočívá jejich velký význam v optice. Tvoří podstatnou součást tzv. **elipsometrů**, které slouží k měření tloušťek tenkých vrstev.

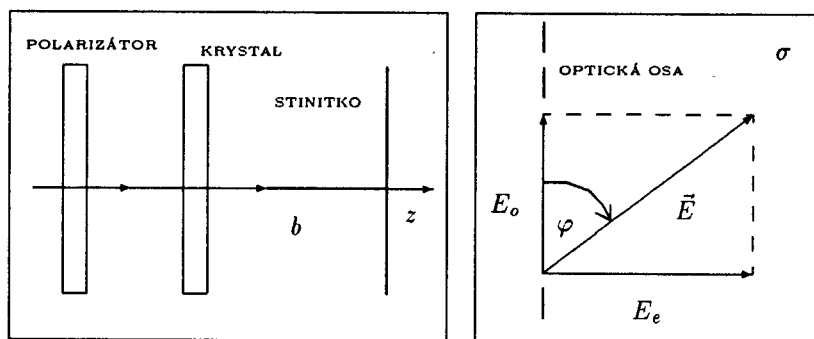
4.10.5 Polarizační interference

Když dopadá lineárně polarizované světlo kolmo na dvojlomnou destičku, která má povrch rovnoběžný s optickou osou, vystupuje z ní světlo obecně elipticky polarizované. Pouhým okem nerozpoznáme takové světlo od světla nepolarizovaného nebo lineárně polarizovaného. Fázový posuv mezi vlnou řádnou a mimořádnou se nijak neprojeví při pozorování intenzity na stínítku, ať má jakoukoliv hodnotu.

Výpočtem toto tvrzení snadno potvrdíme. Detailnější komentování tohoto výpočtu nám pomůže objasnit mechanismus interference polarizovaného světla. Po průchodu lineárně polarizované vlny dvojlomnou destičkou (viz obr. 4.32) má vlna řádná amplitudu $E_o = E \cos \varphi$ a mimořádná $E_e = E \sin \varphi$. Na stínítku ve vzdálenosti b od destičky jsou dány rovnicemi

$$\psi_o = E \cos \varphi e^{i[\omega t - k(z+b) - n_o k d]} \quad (4.51)$$

$$\psi_e = E \sin \varphi e^{i[\omega t - k(z+b) - n_e k d]}$$



Obr. 4.32: Optické schéma uspořádání při průchodu světla ve směru osy z přes polarizátor a dvojlomnou destičku (krystal). Rovina σ znázorňuje situaci v rovině kolmé na směr šíření světla.

a výsledná vlna na stínítku však není dána jejich prostou superpozicí, $\psi = \psi_o + \psi_e$, protože jde o vektorové vlny, jejichž amplitudy leží v rovinách na sebe kolmých. Jedná se tedy o vektorovou superpozici, jak plyne z vlastnosti EM vln. Pouze v případě, že obě amplitudy leží v jednom směru, nemusíme vektorový charakter vln při superpozici zdůrazňovat.

Výsledná vlna je vektorovým součtem

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_o + \vec{\psi}_e.$$

a velikost její amplitudy je přeponou v pravouhlém trojúhelníku.

$$E_b^2 = E_o^2 + E_e^2 = (E \cos \varphi)^2 + (E \sin \varphi)^2.$$

Pro výpočet intenzity není podstatné, že výsledný vektor \vec{E}_b neustále mění svou polohu v prostoru, ale podstatná je pouze jeho absolutní hodnota. Intenzita světla na stínítku je tedy pouze součtem intenzit jednotlivých vln

$$I_b = I_o + I_e = I_0. \quad (4.52)$$

Zajímavá situace však nastane, když do cesty světlu mezi destičku a stínítko dáme ještě analyzátor - viz obr.4.33. Analyzátor propustí pouze průměty amplitud řádné a mimořádné vlny do svého směru propustnosti. Pro vlny na stínítku tedy platí

$$\psi_{oa} = E \cos \varphi \cos \phi e^{i[\omega t - k(z+b) - n_o k d - \delta]} \quad (4.53)$$

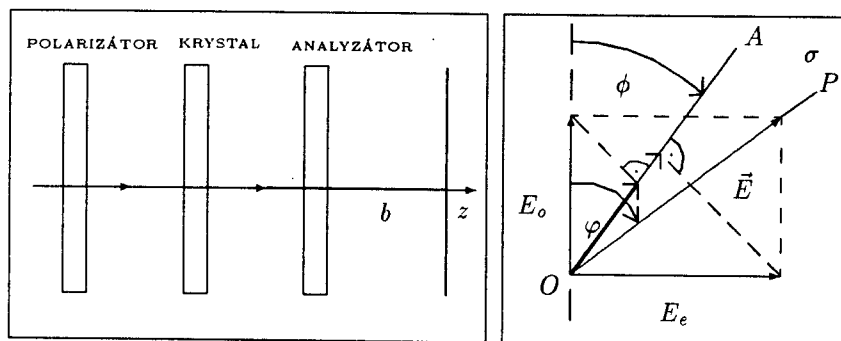
$$\psi_{ea} = E \sin \varphi \sin \phi e^{i[\omega t - k(z+b) - n_e k d - \delta]}.$$

Obě vlny mají vektor amplitudy ve stejném směru a proto výsledná amplituda na stínítku je $\psi_a = \psi_{ea} + \psi_{oa}$ a intenzita je pak dána vztahem

$$I_a = (\psi_{ea} + \psi_{oa})(\psi_{ea} + \psi_{oa})^*, \quad (4.54)$$

odkud po dosazení dostáváme

$$I_a = (E \cos \varphi \cos \phi)^2 + (E \sin \varphi \sin \phi)^2 + 2E^2 \sin \varphi \sin \phi \cos \varphi \cos \phi \cos kd(n_o - n_e). \quad (4.55)$$



Obr. 4.33: Optické schéma uspořádání experimentu při pozorování interference vlny řádné a mimořádné na stínítku. Rovnoběžný svazek světla ze zdroje prochází postupně polarizátorem, krystalem, analyzátozem a pak teprve dopadá na stínítku. φ je úhel mezi polarizátorem a optickou osou krystalu a ϕ je úhel mezi analyzátozem a optickou osou.

Vidíme nyní, že intenzita na stínítku závisí nejen na poloze analyzátozu, ale i na fázovém posuvu mezi vlnou řádnou a mimořádnou.

Analýzu tohoto výrazu provedeme pouze pro dvě speciální polohy polarizátoru a analyzátozu:

1. $\varphi = \pi/4$ a $\phi = \pi/4$, směr analyzátozu je rovnoběžný s polarizátorem
2. $\varphi = \pi/4$ a $\phi = -\pi/4$, směr analyzátozu je kolmý na polarizátor.

V prvním případě je intenzita dána vztahem

$$I_{a\parallel} = E^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos kd(n_o - n_e) \right]$$

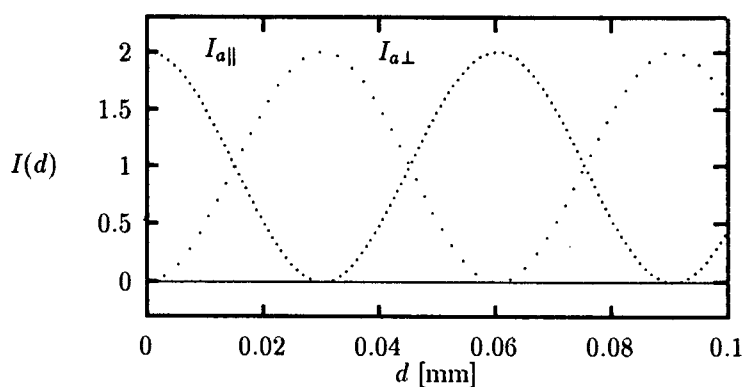
a v druhém

$$I_{a\perp} = E^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cos kd(n_o - n_e) \right].$$

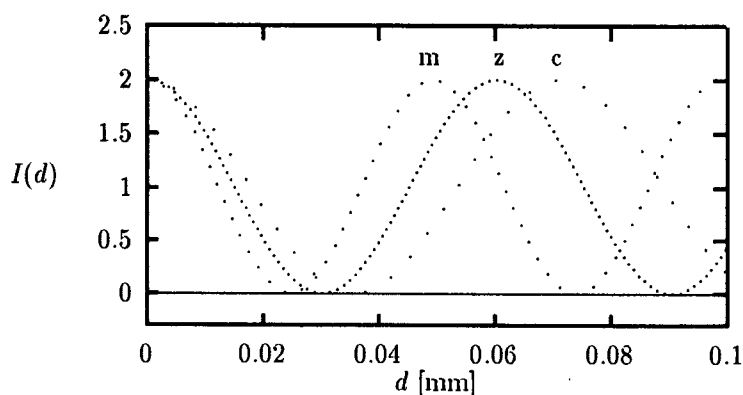
Tyto dvě polohy analyzátozu odpovídají komplementárnímu osvětlení stínítku - obr.4.34. Je zajímavé, že součet $I_{a\perp} + I_{a\parallel}$ je konstantní, nezávisí na dráhovém rozdílu interferujících vln. Tento závěr platí pro všechny vlnové délky použitého světla.

Použijeme-li však při takovém experimentu bílé světlo, objeví se na stínítku krásné jasné barvy, přičemž jejich součet dá vždy barvu bílou. Z obr. 4.35 je vidět, že s křemene lze vyrobit destičku, která pro okolí jmenovité hodnoty vlnové délky světla způsobuje fázový posuv $\pi/4$ (závislost rozdílu $n_o - n_e$ na vlnové délce je malá a proto ji neuvažujeme). Takové destičce se říká **čtvrtvlnná destička** a samozřejmě její hodnota platí přesně jen pro uvedenou jmenovitou hodnotu.

Z obr. 4.35 můžeme rovněž odhadnout výsledné zbarvení stínítku pro danou tloušťku destičky podle úrovně intenzity příslušné barvy.



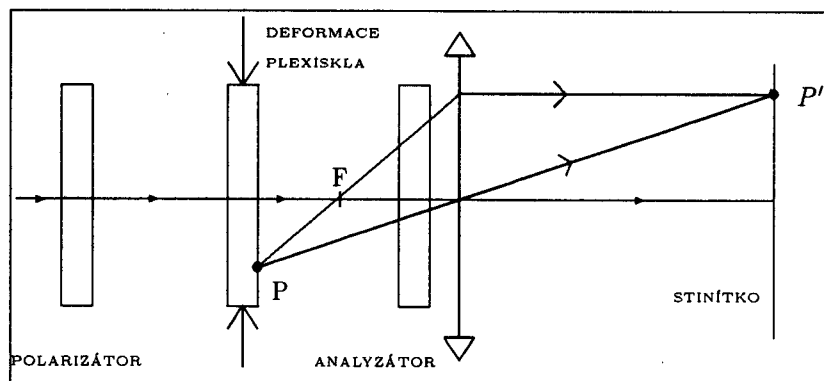
Obr. 4.34: Závislost intenzity na tloušťce křemenné destičky při pozorování interference vlny řádné a mimořádné, když jsou směry propustnosti polarizátoru a analyzátoru jsou rovnoběžné a zkřížené.



Obr. 4.35: Závislost intenzity na tloušťce křemenné destičky při pozorování interference vlny řádné a mimořádné třech barev, modré, zelené a červené, když jsou směry propustnosti polarizátoru a analyzátoru jsou rovnoběžné .

4.10.6 Fotoelasticimetrie

Doposud jsme se zabývali dvojlomem krystalických látek, jejichž krystalová struktura určuje směr optické osy. Dvojlom však může vzniknout i u látek izotropních jako je sklo, plexisklo apod., jestliže jsou podrobeny jednoosému tlaku nebo tahu a tím elastické deformaci. V prvním přiblížení platí, že rozdíl indexů lomu $n_o - n_e$ je úměrný tlaku a optická osa odpovídá směru deformace. Průchodem lineárně polarizovaného světla přes takovou destičku, v níž byl vyvolán umělý dvojlom, a přes analyzátor, je pak možné zviditelnit na destičce geometrická místa bodů stejné napjatosti, jako geometrická místa stejného jasů. Tento způsob zviditelnění elastické deformace má významnou aplikaci při zkoumání napjatosti stavebních a mostních konstrukcí na modelech zhotovených z plexiskla. Tato metoda se nazývá fotoelasticimetrie.

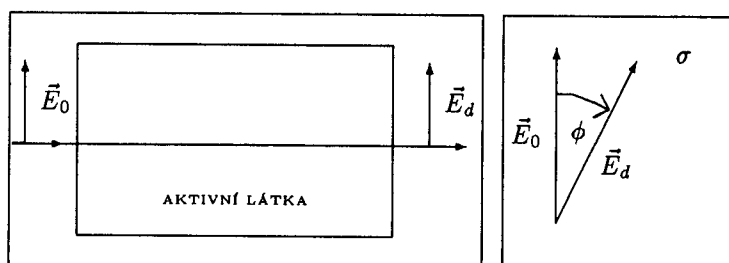


Obr. 4.36: Optické schéma zařízení užívaného ve fotoelasticimetrii.

4.11 Látky opticky aktivní

Anisotropie krystalů je způsobena nízkou symetrií krystalové struktury a optická osa je jí pevně dána. U kapalin existuje skupina látek, jejichž molekuly nemají ani střed, ani rovinu symetrie. Takové látky způsobují **stáčení roviny lineárně polarizovaného světla**. Ze známých látek je to cukr, methyl, benzyl aj.

Analýza tohoto jevu na základě EM teorie vede k závěru, že takovou látkou se šíří dvě rotačně polarizované vlny. Vektor amplitudy jedné rotuje nalevo, druhé napravo. Rychlost šíření těchto vln se však maličko liší. Proto na výstupu z látky do vakua má vektor amplitudy jiný směr než na vstupu. V kapalině se najdou vždy molekuly tak vhodně orientované ve směru šíření světla, že jejich struktura vyvolá tento efekt.



Obr. 4.37: Schéma stočení amplitudy lineárně polarizovaného světla po průchodu opticky aktivním prostředím.

Úhel tohoto stočení pak závisí dráze světla v takovém prostředí d , na látce $K(\lambda)$ a její koncentraci ρ v roztoku.

$$\phi = K(\lambda)\rho d.$$

U mnohých látek lze optickou aktivitu vyvolat jejich vložením do magnetického nebo elektrického pole.

Kapitola 5

Geometrická optika a zobrazování

Kapitola optiky pojednávající o zobrazování se často nazývá **geometrická optika**. Jistým způsobem je stavěna do protikladu **vlnové optice**. Pokusme se nejdříve objasnit, co oba přístupy mají společného a čím se odlišují.

Ústředním bodem vlnové optiky je **Huygensův - Fresnelův princip**, který bezezbytku objasňuje způsob šíření vln v prostoru i přes překážky, tj. difrakční jevy. Klademe-li důraz na slovo bezezbytku, máme tím na mysli, že výpočty provedené pomocí něho jsou v souladu s experimentem, jak co do hodnot intenzity, tak fáze světla.

Za ústřední bod geometrické optiky se považuje diferenciální rovnice pro **eikonál** nebo **Fermatův princip**, který objasňuje, na rozdíl od H-F principu, pouze geometrii šíření světla a to v aproximaci odpovídající geometrické optice.

5.1 Geometrická aproximace vlnění

Výpočet difrakčních jevů podle H-F principu vede k tomu, že výsledná vlna je **nehomogenní**, tzn. že její amplituda je funkcí souřadnic. Obecně zapíšeme takovou vlnu ve

tvaru

$$\psi(x, y, z, t) = A(x, y, z)e^{i\omega t}e^{ikS(x, y, z)}, \quad (5.1)$$

kde $k = 2\pi/\lambda$ je vlnčet ve vakuu a $S(x, y, z)$ je fázová funkce. Bez újmy na obecnosti můžeme tuto rovnici přepsat na tvar

$$\psi(x, y, z, t) = e^{i\omega t}e^{ik[S(x, y, z) - i2\pi a(x, y, z)]}, \quad (5.2)$$

kde $a(x, y, z) = \lg(A)$. Dosadíme-li nyní tento výraz do vlnové rovnice (viz odst.1.1) a celou rovnici podělíme k^2 , objeví se na levé straně členy násobené λ^2 , dále λ^1 a λ^0 a na pravé straně rovnice $(\omega/k)^2$. Provedeme-li nyní limitní přechod této rovnice pro $\lambda \rightarrow 0$, zůstanou tam pouze členy, které násobeny λ nebyly. Po tomto dlouhém, ale jednoduchém výpočtu dostáváme

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2} = \frac{n^2}{c^2}. \quad (5.3)$$

Funkci S , která vyhovuje této diferenciální rovnici se říká **eikonál** a rovnice $S(x, y, z) = konst.$ má význam čela vlny v geometrické aproximaci. Tato rovnice je nelineární a proto přímé matematické řešení je nesnadné. Dosazením do rovnice (5.3) se přesvědčíme, že jí vyhovuje v homogenním prostředí, kde $n(x, y, z) = konst.$, jak fázová funkce rovinné vlny

$$S = \frac{1}{k}(k_x x + k_y y + k_z z),$$

tak kulové vlny

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Paprsek je ve všech bodech kolmý na eikonál a v geometrické aproximaci určuje směr toku hustoty světelné energie, tj. směr intenzity světla \vec{I} . Z EM teorie totiž plyne, že v geometrické aproximaci pak platí

$$\langle \vec{I} \rangle = v \langle w \rangle \vec{s}, \quad (5.4)$$

kde $v = c/n$ je rychlost toku hustoty energie w v prostředí o indexu lomu n a

$$\vec{s} = \frac{1}{n} \text{grad} S(x, y, z)$$

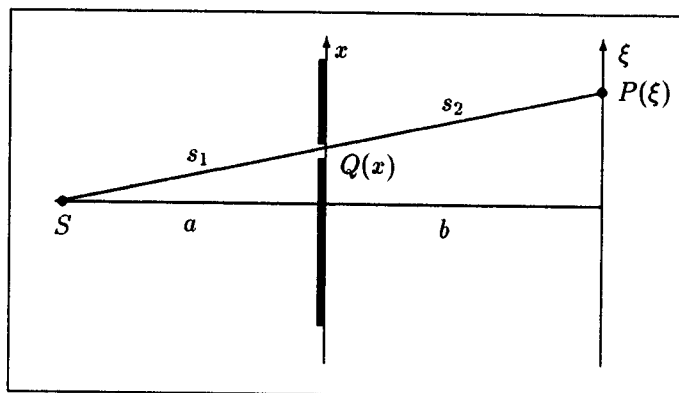
je jednotkový vektor kolmý na eikonál $S(x, y, z)$. Lomené závorky značí, že jde o střední časovou hodnotu. V homogenním prostředí je eikonál totožný s vlnoplochou a paprsek je normálou k vlnoploše.

Optická dráha světla je systém ortonormálních křivek k eikonálům, podobně jako silokřivky jsou kolmé na ekvipotenciální plochy v elektrostátice. Pro optickou dráhu přitom platí **Fermatův princip**. To znamená, že mezi dvěma eikonály se šíří světlo po nejkratší optické dráze. Tuto jejich vlastnost zajišťuje rovnice 5.3.

Tato rovnice, na rozdíl od vlnové rovnice, nijak neurčuje amplitudu vlny. Tomuto zjednodušenému popisu vlnění se říká **geometrická aproximace**.

5.2 Stínový obraz

Šíření světla v rámci geometrické optiky objasníme na příkladu osvětlení stínítka bodovým zdrojem přes difrakční stínítko s bodovým otvorem - viz obr. 5.1.



Obr. 5.1: Osvětlení stínítka přes bodový otvor Q v rámci geometrické optiky znamená, že na stínítku je osvětlen pouze bod P .

V prostoru před difrakčním stínítkem odpovídá eikonál kulové ploše a v bodě Q má paprsek směr z bodu S do bodu Q . Bodovým otvorem projde pouze jeden paprsek a ten osvětlí stínítko jen v bodě P . Vlnový stav v bodě P bude podle geometrické aproximace

$$\psi(\xi) = A\delta\left(\xi - x\frac{a+b}{a}\right)e^{i(\omega t - k\sqrt{(a+b)^2 + \xi^2})},$$

kde δ je Diracova funkce. Vlnový stav v bodě P podle H-F principu je

$$\psi(\xi) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{b^2 + (x - \xi)^2}}e^{i(\omega t - k\sqrt{a^2 + x^2} - k\sqrt{b^2 + (x - \xi)^2})}.$$

Intenzita na stínítku pak podle geometrické aproximace je

$$I(\xi) = I_0\delta\left(\xi - x\frac{a+b}{a}\right)$$

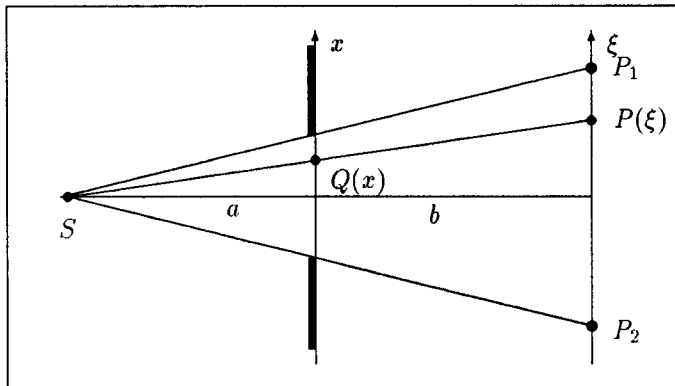
a podle H-F principu

$$I(\xi) = \frac{A^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + (x - \xi)^2)}.$$

Vidíme, že rozdíl v osvětlení stínítka podle geometrické optiky a vlnové optiky je podstatný. Podle geometrické optiky z bodu Q se nešíří kulová sekundární vlna, ale jen jeden paprsek.

V případě, že by ve stínítku byly dva otvory Q , pak by podle geometrické optiky byly osvětleny dva různé body P a k žádné interferenci by nedošlo. Odpovídající paprsky nemají nikde společný bod a nemůže dojít k jejich superpozici. Vlnová optika by vedla k interferenčnímu jevu (Youngův pokus).

Nyní sledujme osvětlení stínítka ve směru osy ξ přes otvor o velikosti $2p$, jak je znázorněno na obr.5.2. Protože k interferenci na stínítku nemůže dojít, je výsledná intenzita superpozici



Obr. 5.2: Osvětlení stínítka přes otvor podle geometrické optiky. Osvětleny jsou jen body P ležící mezi P_1 a P_2

intenzit od jednotlivých bodů Q . Tedy

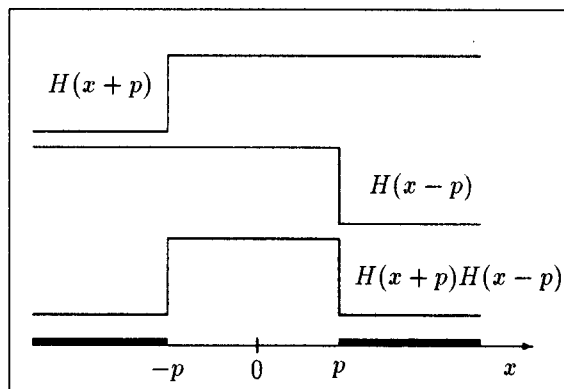
$$I(\xi) = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \delta(\xi - x \frac{a+b}{a}) dx.$$

Funkci propustnosti $T(x)$ můžeme vyjádřit pomocí tzv. **Heavisidovy funkce** $H(x)$, která je definována takto:

$H(x) = 0$ pro $x < 0$ a $H(x) = 1$ pro $x > 0$. Funkci propustnosti pak napíšeme jako součin

$$T(x) = H(x - p)H(x + p). \quad (5.5)$$

Oprávněnost tohoto tvaru funkce propustnosti je zřejmá z obr.5.3. Intenzita na stínítku je



Obr. 5.3: K objasnění konstrukce funkce propustnosti otvoru o velikosti $2p$.

pak dána vztahem

$$I(\xi) = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} H(x - p)H(x + p) \delta(\xi - x \frac{a+b}{a}) dx ,$$

odkud po integraci dostáváme

$$I(\xi) = H(\frac{a\xi}{a+b} + p)H(\frac{a\xi}{a+b} - p) . \quad (5.6)$$

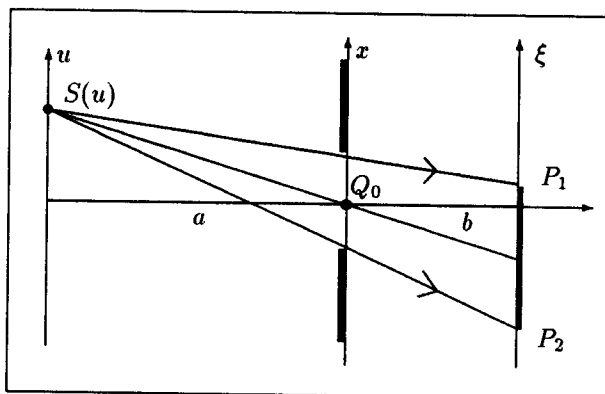
Rozložení intenzity na stínítku , které odpovídá této funkci je schematicky nakresleno na obr. 5.2. Odpovídá stínové projekci otvoru.

Pokud otvor svými rozměry splňuje podmínky pro vznik Fraunhoferovy difrakce, pak náš výpočet podle geometrické aproximace se od reálného experimentu výrazně liší. Jestliže však je mnohem větší, pak náš výpočet rozložení intenzity na stínítku bude odpovídat experimentu mnohem lépe.

5.3 Camera obscura

Tímto historickým názvem se označuje **dírková komora**, pomocí níž se pozorovala první optická zobrazení dobře osvětlené krajiny ještě před vynálezem čoček. Obraz udivoval experimentátory věrností i barevností. Naším úkolem bude analyzovat tento obraz podle geometrické optiky.

Vyjdeme ze situace na obr.5.4 a využijeme výsledků z předchozího odstavce. Necht' ro-



Obr. 5.4: Zobrazení bodu $S(u)$ předmětu dírkovou komorou. Každý bod předmětu vytvoří na stínítku osvětlenou plošku odpovídající bodové projekci otvoru.

zložení intenzity na předmětu je dáno funkcí $s(u)$. Velikost otvoru je $2p$. Podle výsledku z předchozího odstavce je rozložení intenzity na stínítku os bodu $S(u)$ přes otvor dáno vztahem

$$I(\xi, u) = I_0 H\left(\frac{\xi a}{a+b} + \frac{ub}{a+b} + p\right) H\left(\frac{\xi a}{a+b} + \frac{ub}{a+b} - p\right).$$

Celkové osvětlení, od každého bodu $S(u)$ předmětu, je pak dáno integrálem

$$I(\xi) = \int s(u) I(\xi, u) du. \quad (5.7)$$

Tím je výpočet zobrazení dírkovou komorou v podstatě ukončen. Dodejme jen, že takto zobrazíme každý **svítící bod** $S(u)$ předmětu. Důraz na svítící byl dán úmyslně, protože body S musí být zdrojem vzájemně nekoherentních vln. Obrazy bodů se na stínítku překrývají

a pokud by body předmětu svítily koherentně, pak by na jejich překrývajících se oblastech nastal interferenční jev.

5.4 Definice optického zobrazení

Každý z nás intuitivně chápe, co se rozumí obrazem předmětu, i pojmem zvětšení. Toho jsme využili při analýze zobrazení dírkovou komorou. Nyní naše představy o zobrazení upřesníme.

Zobrazované předměty jsou trojrozměrné, obraz na stínítku dvojrozměrný. V našich úvahách o zobrazení se omezíme na zobrazování dvojrozměrných předmětů. Zobrazování trojrozměrných předmětů pak doplníme úvahou o **hloubce ostrosti** při fotografování.

Jednotlivé body předmětu jsou zdrojem navzájem nekoherentních vln, které se šíří podle pravidel geometrické optiky, tj. jako paprsky vycházející z bodového zdroje. Díky nekoherentnosti nastává na obrazovém stínítku **superpozice intenzit obrazů jednotlivých bodů předmětu**.

V našich úvahách se kvůli jednoduchosti omezíme pouze osově symetrické zobrazovací systémy a na **paprsky ležící v rovině osy a zobrazovaného bodu**. Toto je velice silné omezení množiny paprsků, zejména, když si uvědomíme, že z celého kužele paprsků vycházejícího z předmětového bodu vezmeme v úvahu jen paprsky ležící v jedné rovině. Tím obdivuhodnější je, že závěry našich výpočtů budou tak dobře odpovídat experimentu.

Klademe-li si otázku čím to je, docházíme k závěru, že naše vnímání obrazu je velice nepřesné a je i principiálně omezeno **prostorovou rozlišovací schopností detektorů**, např. filmu při fotografování, obrazovky televizoru při snímání televizní kamerou a v neposlední řadě lidského oka. Tato omezení určují tedy i nároky na přesnost našich matematických formulací i na optické zařízení jímž zobrazujeme.

Problém vztahu obrazu a předmětu lze **matematicky** formulovat takto:

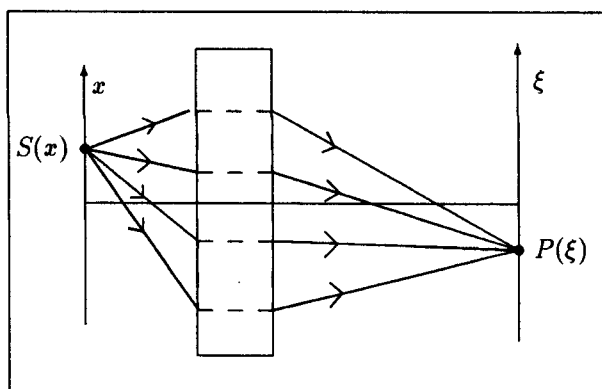
Nechť $s(x)$ je funkce udávající rozložení intenzity na předmětu. Funkce $I(\xi)$ je obrazem daného předmětu, jestliže platí

$$I(\xi) = Ks(\xi/\gamma), \quad (5.8)$$

kde K je konstanta úměrnosti a $\gamma = \xi/x$ je **zvětšení obrazu**.

Tak např. tohoto **ideálního** zobrazení lze podle geometrické optiky dosáhnout kamerou obskurou, pokud otvor bude mít nulový rozměr ($p \rightarrow 0$). Za této podmínky se změní součin $H(\frac{\xi a}{a+b} + \frac{ub}{a+b} + p)H(\frac{\xi a}{a+b} + \frac{ub}{a+b} - p)$ na delta funkci $\delta(\xi + ub/a)$. Když tuto funkci dosadíme do integrálu (5.7) dostaneme

$$I(\xi) = I_0 \int s(u)\delta(\xi + ub/a) du = I_0 s(-\xi a/b). \quad (5.9)$$



Obr. 5.5: Obecný zobrazovací systém.

Vidíme, že ideálního zobrazení lze dosáhnout, když bod předmětu se zobrazí jako bod a nikoliv jako ploška. Mluvíme v této souvislosti o **odezvě optického systému** na zobrazení bodu. Funkce popisující reakci fyzikálního systému na bodový impulz se obecně nazývá **Greenova funkce** a má široké uplatnění např. při přenosu proudových signálů elektrickým zařízením. Označíme-li Greenovu funkci optického systému $G(\xi)$, pak zobrazení je dána vztahem

$$I(\xi) = K \int s(u)G(\xi - u\gamma) du \quad (5.10)$$

Greenova funkce dírkové komory tedy je

$$G(\xi) = H(\xi - (1 + b/a)p)H(\xi + (1 + b/a)p)$$

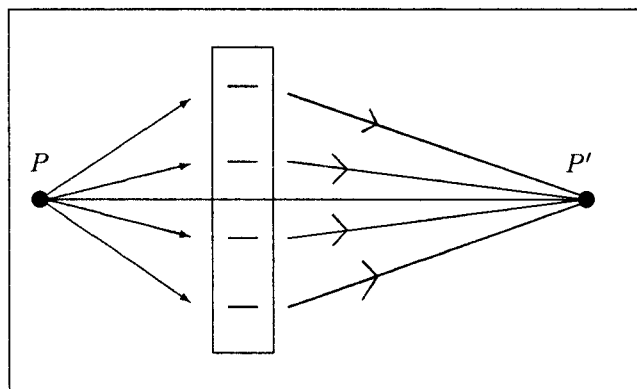
a ideálního zobrazení je delta funkce, jak je dána rovnicí (5.9).

Tato teoretická analýza dává jasný návod, jak experimentálně postupovat při hodnocení kvality optického zobrazení, tj. experimentálně najít odezvu zobrazovacího systému na zobrazení jednoho bodu. Je zřejmé, že od znalosti této odezvy se odvíjí informace o rozlišovací schopnosti, kontrastu i jasů obrazu.

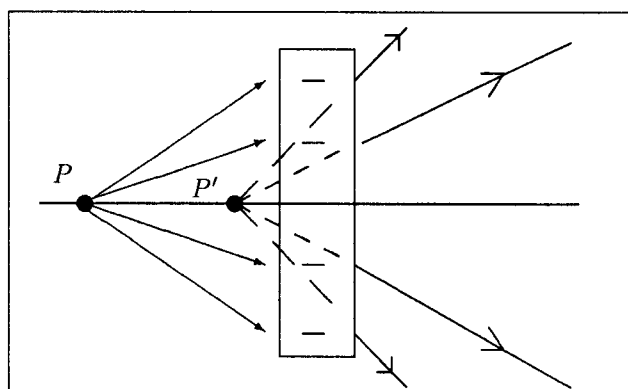
5.4.1 Reálný a virtuální obraz

Doposud jsme v souvislosti s dírkovou komorou a s definicí zobrazení mluvili zcela samozřejmě pouze o **reálném**, nebo-li **skutečném obrazu**, tj. takovém, který můžeme zachytit na stínítko.

Optický systém, který takové zobrazení realizuje se nazývá spojný, kladný nebo pozitivní – viz obr.5.6. Má tu vlastnost, že divergentní svazek paprsků, nebo divergentní kulovou vlnu vycházející z předmětového bodu P , přetransformuje na sbíhavý svazek nebo konvergentní vlnu, protínající se v obrazovém bodě P' , který leží v předmětovém prostoru.



Obr. 5.6: Spojný zobrazovací systém vytváří reálný obraz P' bodu P .



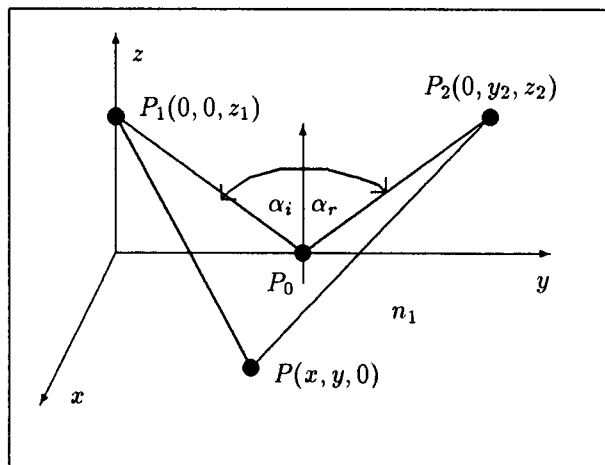
Obr. 5.7: Zobrazovací systém vytváří virtuální obraz P' bodu P .

Naproti tomu **virtuální, tj. neskutečný, obraz** vytvoříme vždy jen prodloužením skutečných paprsků na opačnou stranu než se skutečně šíří. Optický systém v tomto případě přetransformuje paprsky tak, že se nám za optickým systémem jeví, **jako kdyby vycházely z tohoto virtuálního obrazu** – viz obr.5.7.

5.5 Fermatův princip a rovinné zrcadlo

Rovinné zrcadlo je nám důvěrně známé, protože jej denně používáme. Naším okem pozorujeme virtuální obraz za zrcadlem. Provedeme analýzu tohoto zobrazení podle geometrické optiky a tentokrát k ní využijeme **Fermatova principu**.

Podle tohoto principu se paprsky světla šíří z bodu A do B tak, aby optická dráha (tj. součin geometrické dráhy a indexu lomu) byla extrémální. Jde vlastně o slovní vyjádření geometrického významu diferenciální rovnice elikonálu (5.3), která má na levé straně kvadrát elementu optické dráhy a na pravé straně konstantu pokud se jedná o homogenní prostředí.



Obr. 5.8: Geometrická situace při aplikaci Fermatova principu na odraz paprsků světla na rovinném rozhraní.

Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit souřadný systém pro náš výpočet dráhy světla podle Fermatova principu tak, jak je znázorněno na obr.5.8. V homogenním prostředí je dráhou světla přímka. Hledejme proto souřadnice bodu $P(x, y, 0)$ ležícího v rozhraní tak, aby byl splněn Fermatův princip. Podle obr.5.8 je optická dráha z bodu P_1 přes bod P do bodu P_2 dána vztahem

$$l = n_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2} + n_1 \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2} .$$

Extrém dráhy nastane v takovém bodě, v němž derivace podle x a derivace podle y jsou rovny nule.

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} + \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{n_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} + \frac{n_1 (y - y_2)}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}} = 0$$

Při řešení této soustavy dvou rovnic (připomeňme, že neznámé jsou x a y) postupujeme např. tak, že druhý člen v obou rovnicích převedeme na pravou stranu rovnice a obě rovnice pak podělíme. Pro $y \neq 0$ a $y \neq y_2$ dostaneme

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y - y_2}$$

a tedy

$$x = x \frac{y}{y - y_2} .$$

Tato rovnice je splněna pro libovolné y jen tehdy, když $x = 0$. Dosadíme-li tento kořen do soustavy rovnic dostáváme

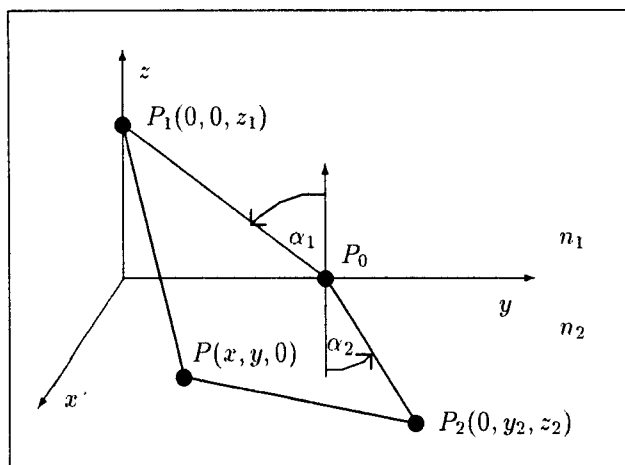
$$\frac{y}{\sqrt{y^2 + z_1^2}} = \frac{(y - y_2)}{\sqrt{(y - y_2)^2 + z_2^2}} .$$

Podíváme-li se na geometrický význam této rovnice za podmínky $x = 0$, vidíme, že bod P musí ležet na ose y a jeho ypsilonová souřadnice musí být taková, že

$$\sin \alpha_i = \sin \alpha_r ,$$

což je nám známý **zákon odrazu** pro rovinné vlny odvozený z E-M teorie.

Podobným postupem odvodíme i **zákon lomu** paprsků, tj. Snellův zákon. Vyjdeme ze situace na obr.5.9.



Obr. 5.9: Geometrická situace při aplikaci Fermatova principu na lom paprsků světla na rovinném rozhraní.

Optická dráha v tomto případě je

$$l = n_1 \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2} + n_2 \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2} .$$

Derivace podle x a y vede k systému rovnic

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} + \frac{n_2 x}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{n_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} + \frac{n_2 (y - y_2)}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2 + z_2^2}} = 0$$

Stejným postupem při řešení zjistíme, že jeden kořen je $x = 0$ a druhý musí vyhovovat rovnici

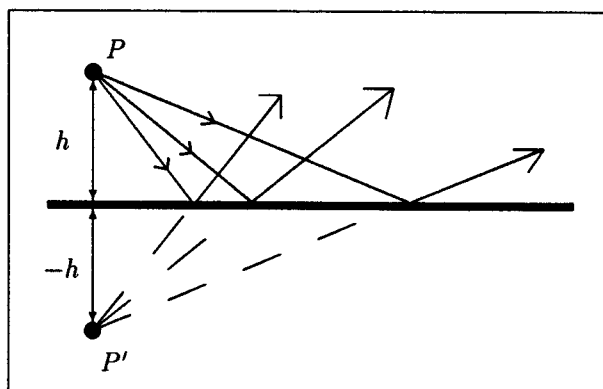
$$\frac{n_1 y}{\sqrt{y^2 + z_1^2}} = \frac{n_2 (y - y_2)}{\sqrt{(y - y_2)^2 + z_2^2}} .$$

Geometrický význam této rovnice nám napovídá, že bod P , kde paprsek protne rozhraní, leží na ose y tam, kde platí

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 .$$

Můžeme tedy konstatovat, že **paprsky se na rovinném rozhraní lomí a odrážejí tak, jako rovinné vlny**. Fermatův princip nám však neposkytuje žádné informace o intenzitě těchto paprsků. Pokud můžeme zanedbat efekty difrakce vznikající prostorovým vymezením svazku, popisují intenzitu lomeného i odraženého paprsku Fresnelovy vzorce. Zkreslení intenzity difrakčními efekty bude malé, když šířka světelného svazku bude mnohokrát větší, než je vlnová délka světla.

Paprsky vycházející z bodu P se odrážejí na rovinném zrcadle podle zákona odrazu. Z hlediska zobrazování se odražené paprsky chovají tak, jako kdyby vycházely z virtuálního obrazu P' , který leží za zrcadlem, jak je zřejmé z obr.5.10. Pozoruhodné na tomto virtuálním obrazu je, že jde o ideální zobrazení, se zvětšením $\gamma = -1$. Obrazem bodu je bod, nikoliv malá ploška.



Obr. 5.10: Poloha virtuálního obrazu P' při zrcadlení bodu P na rovinném zrcadle. Paprsky se odrážejí tak, jako by vycházely z bodu P' .

5.6 Kolineace

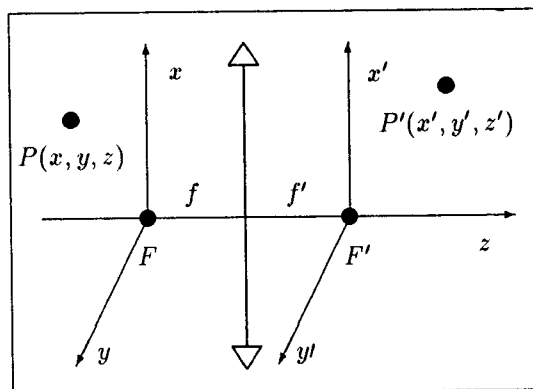
Od dob Descartových (1596 - 1650) a Gaussových (1777 - 1855) se geometrickou optikou a problémem zobrazování zabývalo mnoho matematiků. Výsledkem jejich práce je i speciální projektivní geometrická transformace, zvaná **kolineace**, která

- Bod zobrazí jako bod.
- Úsečku zobrazí jako úsečku.
- Rovinu zobrazí jako rovinu.

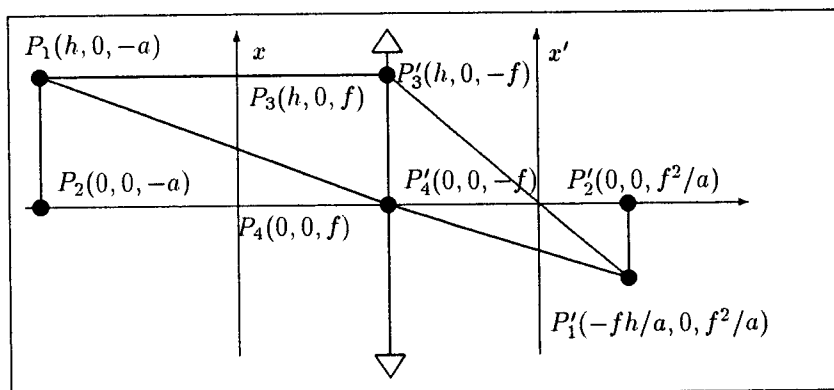
Podle kolineace se souřadnice bodů předmětu (nečárkované) transformují na souřadnice jejich obrazů (čárkované), podle následujících rovnic.

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{x}{z} & (5.11) \\ y' &= f \frac{y}{z} \\ z' &= -f^2 \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

kde f je polovina vzdálenosti mezi oběma souřadnými systémy v nichž popisujeme předmětové a obrazové objekty. Souřadné systémy jsou situovány do ohniskových rovin, tj. rovin kolmých na osu z obsahujících ohniska.



Obr. 5.11: Poloha souřadných systémů s vyznačením čočky, jak je předpokládají transformační rovnice kolineace. Index lomu je na obou stranách stejný, proto je f rovno f' .



Obr. 5.12: Korespondence předmětových a obrazových bodů a úseček, jak sobě odpovídají podle kolineace.

Dosažením do transformačních rovnic se můžeme např. přesvědčit, že sobě odpovídající body a jim odpovídající úsečky - viz 5.12 mají souřadnice:

$$P_1(h, 0, -a)P_2(0, 0, -a) \rightarrow P'_1(-fh/a, 0, f^2/a)P'_2(0, 0, f^2/a)$$

$$P_1(h, 0, -a)P_3(h, 0, f) \rightarrow P'_1(-fh/a, 0, f^2/a)P'_3(h, 0, -f)$$

$$P_1(h, 0, -a)P_4(0, 0, f) \rightarrow P'_1(-fh/a, 0, f^2/a)P'_4(0, 0, -f).$$

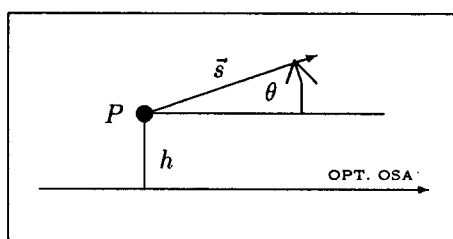
Podobně můžeme vyšetřovat zobrazení libovolného jiného útvaru. Poznamenejme ještě na závěr, že jde o matematickou transformaci, která má ale vlastnosti odpovídající reálnému zobrazování. Tato teorie nedává nám žádný návod, jak fyzikálně, pomocí jakého zařízení, je lze realizovat.

5.7 Kulové lámavé plochy

Pro optické zobrazování se používá v praxi téměř výhradně kulových lámavých ploch, přesto, že kulové plochy nejsou jediným teoreticky možným tvarem. Rozhodující však zde je poměrná snadnost výroby čoček ohraničených centrovanými kulovými plochami v požadované přesnosti i jejich snadná kombinace ve složitější zobrazovací systémy.

Nedokonalosti zobrazení kulovými lámavými plochami se studuje **teorie aberací**, která se zabývá analýzou odchylek od ideálního zobrazení. Z ní pak vyplývají postupy, jak nedostatky zobrazení jen potlačit, nikoliv odstranit.

Proces průchodu světla z předmětu přes takový zobrazovací systém až k obrazovému stínítku můžeme rozložit na šíření paprsku mezi dvěma lámavými plochami a na průchod paprsku přes lámavou plochu. Paprsky při našich výpočtech budeme popisovat **vektorem**



Obr. 5.13: Vzdálenost od optické osy h a vektor \vec{s} , jako charakteristiky paprsku při šíření optickým systémem. Sledované paprsky budou ležet vždy v rovině optické osy a bodu P .

\vec{s} , jehož absolutní hodnota je rovna indexu lomu prostředí, kterým prochází $|\vec{s}| = n$ a dále **vzdáleností** h tohoto vektoru od optické osy zobrazovacího systému.

Matematicky bychom mohli říci, že budeme hledat transformační rovnice pro tyto dva parametry paprsku při přechodu paprsku přes lámavou plochu a při šíření od jedné plochy ke druhé. Složením těchto transformací získáme transformační rovnici pro průchod celým optickým systémem. Tato matematická operace se pohodlně realizuje pomocí maticového počtu. Proto i my této metody využijeme.

Tento matematický přístup má rovněž tu výhodu, že se **vyhneme znaménkovým konvencím**, s nimiž se u jiných přístupů vždy setkáváme. V našem případě budeme totiž vždy pracovat se souřadnicemi kartézského systému a ty nepotřebují žádného dalšího objasňování.

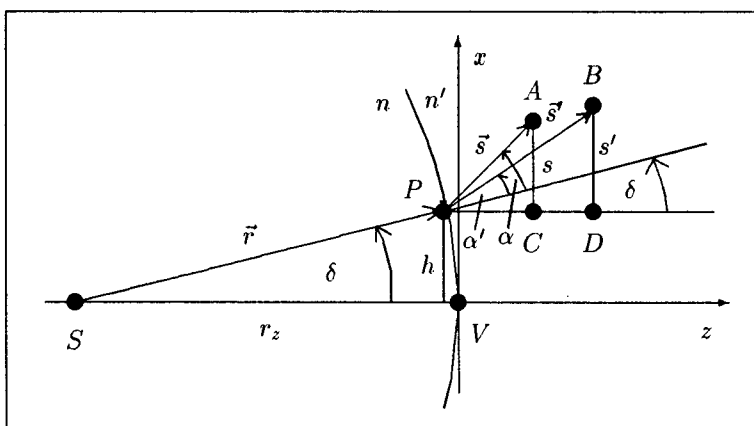
Úvodem našeho odvození transformačních rovnic pro průchod paprsků optickým systémem si ujednáme ještě toto:

- Čárkovaně budeme vždy označovat nové odpovídající si veličiny.

- Osu z souřadných systémů budeme vždy orientovat ve směru průchodu světla zobrazovacím systémem.
- Sledujeme jen průchod paprsků ležících v rovině osy x a optické osy.
- Naše výpočty se budou týkat jen paprsků ležících v malé vzdálenosti od optické osy a svírající s osou malé úhly. Tak malé, že sinus nebo tangens těchto úhlů můžeme nahradit přímo úhlem. Takové paprsky se nazývají **paraxiální**.

5.7.1 Refrakční matice

Vyjděme z geometrické situace, jak je znázorněna na obr.5.14, kde kulová plocha o poloměru r od sebe odděluje prostředí o indexech lomu n a n' . Zavedme vektor $\vec{r} = (r_x, r_z)$ jehož složku r_x položíme rovnou vzdálenosti počátečního bodu vektoru \vec{s} od optické osy, kterou budeme značit h . Souřadnice r_z určuje polohu středu S kulové plochy na ose z . Při



Obr. 5.14: Geometrická situace při lomu paprsku na kulové ploše.

dopadu na kulovou plochu je paprsek určen parametry: \vec{s} a h . Po lomu má parametry \vec{s}' a h' . Označme dále $\vec{s} = (s_x, s_z)$. Podle definice tohoto vektoru platí

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_z^2} = n$$

a podobně

$$|\vec{s}'| = \sqrt{s_x'^2 + s_z'^2} = n'.$$

Z těchto definičních vztahů plyne, že bude stačit, když se budeme zajímat jen o jednu složku vektoru \vec{s} , protože druhá je uvedenými vztahy již určena. Vybereme se složku s_x a pro jednoduchost zápisu budeme tyto složky dále značit bez indexu x . Pak platí

$$s_x = s = n \sin \theta \doteq n\theta$$

$$s_x' = s' = n' \sin \theta' \doteq n'\theta',$$

kde θ a θ' jsou úhly příslušných paprsků s optickou osou.

Z trojúhelníku ΔPBD plyne

$$s' = \theta' n' = (\alpha' + \delta) n' = \alpha' n' + \delta n'$$

Snellův zákon má v tomto případě paraxiálního přiblížení tvar

$$n' \alpha' = n \alpha = n(\theta - \delta) = s - n\delta.$$

Úhly α a α' jsou úhly, které svírají paprsky s a s' s normálou k lámavé ploše, tj. se směrem vektoru \vec{r} . Dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$s' = s - n\delta + n'\delta = s + (n' - n)\delta = s - (n' - n) \frac{h}{r_z},$$

kde jsme za úhel δ dosadili poměr $-h/r_z$ plynoucí v geometrie. Znaménko minus je tak proto, že úhel δ jsme brali jako kladný. Veličiny h a r_z však mají význam souřadnic a ten význam zachováme. Podle orientace našeho souřadného systému však je $h > 0$, ale $r_z < 0$.

Nyní již můžeme napsat příslušné transformační rovnice mezi parametry h, s a parametry h', s' . Vzdálenost h' se lomem nemění. Tedy

$$h' = h \tag{5.12}$$

$$s' = (n - n') \frac{h}{r_z} + s,$$

Tento systém rovnic můžeme ponocí matic napsat takto

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{r_z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = \tag{5.13}$$

Výraz $\frac{n-n'}{r_z}$ označme ϕ . Matice

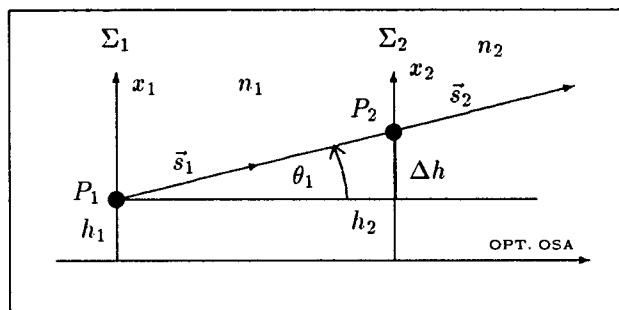
$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

charakterizuje tedy lom paprsku na lámavé ploše a nazýváme ji **refrakční**.

Poznamenejme, že pokud jde o odraz na kulovém zrcadle, tak musíme zachovat orientaci osy z ve směru šíření světla a index lomu n' položit rovný $-n$. Jinak není třeba nic na užitém formalismu měnit.

5.7.2 Translační matice

Nyní je naším úkolem najít transformační rovnice pro přechod od jedné lámavé plochy ke druhé, tj. od jedné souřadné soustavy ke druhé. V souřadné soustavě Σ_1 má paprsek parametry s_1 a h_1 . V souřadné soustavě Σ_2 má paprsek parametry s_2 a h_2 . Počátek druhé souřadné soustavy má v Σ_1 souřadnici t_1 a této oblasti přísluší index lomu n_1 .



Obr. 5.15: Geometrická situace při šíření paprsku od jedné souřadné soustavy ke druhé.

Ze situace na obr.5.15 je zřejmé že platí

$$h_2 = h_1 + \Delta h = h_1 + \theta_1 t_1 = h_1 + \frac{s_1}{n_1} t_1 .$$

Nyní už zase můžeme napsat příslušné transformační rovnice. Parametr h_2 jsme vypočetli a směr paprsku se nemění.

$$h_2 = h_1 + s_1 t_1 / n_1 \quad (5.15)$$

$$s_2 = s_1$$

Maticově tento systém dvou rovnic zapíšeme takto

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} h_1 \\ s_1 \end{pmatrix} , \quad (5.16)$$

kde \hat{T} značí příslušnou **translační matici**.

5.7.3 Přenosová matice

Nyní je naším úkolem najít transformační rovnice, kterými postihneme průchod paprsků celým optickým systémem složeným z několika lámavých ploch. Postup ukážeme na příkladu průchodu paprsku přes tři lámavé plochy. Vyjděme ze situace na obr.5.16.

Parametry paprsku v bodě P' vypočteme pomocí matice \hat{T}'

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{T}' \begin{pmatrix} h'_3 \\ s'_3 \end{pmatrix} .$$

Parametry h'_3, s'_3 vypočteme pomocí \hat{R}_3

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{T}' \hat{R}_3 \begin{pmatrix} h_3 \\ s_3 \end{pmatrix} .$$

A opět parametry h_3, s_3 vypočteme pomocí \hat{T}_2

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{T}' \hat{R}_3 \hat{T}_2 \begin{pmatrix} h'_2 \\ s'_2 \end{pmatrix} .$$

Z dosavadního postupu je již zřejmé, jak vypočteme celkovou transformační matici

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{T}' \hat{R}_3 \hat{T}_2 \hat{R}_2 \hat{T}_1 \hat{R}_1 \hat{T} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že je třeba vynásobit všechny matice v opačném pořadí než je směr chodu světla.

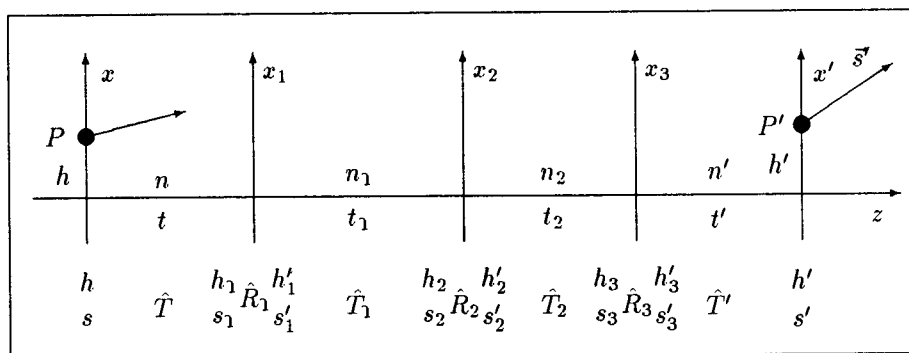
Přenosovou maticí \hat{A} se pak označuje součin matic

$$\hat{A} = \hat{R}_3 \hat{T}_2 \hat{R}_2 \hat{T}_1 \hat{R}_1 \quad (5.17)$$

a transformační rovnice má pak tvar

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{T}' \hat{A} \hat{T} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Poznamenejme, že determinant translačních i refrakčních matic je jednotkový a proto i



Obr. 5.16: Schéma transformace parametrů paprsku s bodu předmětového P do obrazu P' .

přenosová matice má determinant jednotkový. Těto vlastnosti lze využít ke kontrole správnosti násobení matic i při některých výpočtech.

5.7.4 Zobrazovací rovnice

Nyní máme vše připraveno k tomu, abychom odvodili, za jakých podmínek bude bod P' obrazem bodu P jestliže zobrazení se realizuje optickým systémem s přenosovou maticí \hat{A} . Označme prvky přenosové matice obecně jako

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

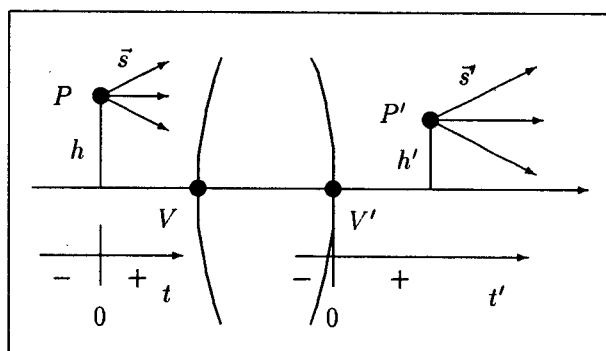
Transformační rovnice mezi parametry paprsku v bodě P' a v bodě P je pak dána rovnicí

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t'/n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Vynásobením těchto matic a porovnáním příslušných prvků dostáváme následující systém dvou rovnic pro hledané parametry

$$h' = \left(a + c \frac{t'}{n'}\right)h + \left(a \frac{t}{n} + c \frac{tt'}{nn'} + b + d \frac{t'}{n'}\right)s \quad (5.20)$$

$$s' = ch + (d + c\frac{t}{n})s \quad (5.21)$$



Obr. 5.17: Geometrická situace při zobrazení předmětového bodu P do bodu P' s vyznačením významu veličin t a t' .

Má-li bod P' být obrazem bodu P , pak všechny paprsky s vycházející z bodu P se musejí protnout v bodě P' . To znamená, že jeho parametr h' nesmí záviset na hodnotě parametru s . Z rovnice (5.20) plyne, že to je možné splnit pouze tak, že koeficient u s bude identicky roven nule. Tedy

$$a\frac{t}{n} + c\frac{tt'}{nn'} + b + d\frac{t'}{n'} = 0 \quad (5.22)$$

Toto je tedy formulace **nejobecnější zobrazovací rovnice**. Vystupují v ní prvky přenosové matice indexy lomu v předmětovém a obrazovém poloprostoru a příslušné vzdálenosti mezi zobrazovacím systémem, předmětem a obrazem. Na obr.5.17 je připomenuta orientace a počátek souřadnic t, t' .

Při zobrazení se tedy parametry h', s' transformují podle rovnic

$$h' = (a + c\frac{t'}{n'})h \quad s' = ch + (d + c\frac{t}{n})s \quad (5.23)$$

nebo v maticovém zápisu takto

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\frac{t'}{n'} & 0 \\ c & d + c\frac{t}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Z rovnice (5.23) dostáváme pro **příčné zvětšení** definované jako poměr h'/h výraz

$$\beta = \frac{h'}{h} = a + c\frac{t'}{n'}, \quad (5.25)$$

kam je třeba za t' dosadit ještě ze zobrazovací rovnice (5.22).

5.7.5 Ohniska a hlavní body

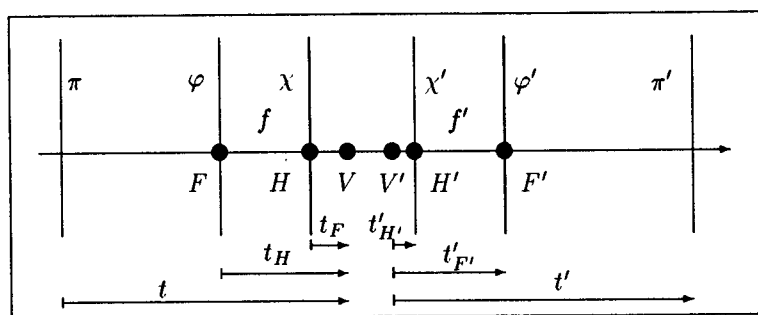
Jak jsme ukázali, zobrazovací systém je plně charakterizován přenosovou maticí. Z praktických důvodů se však zavádějí ještě jiné charakteristiky. Jsou to:

Hlavní roviny — jsou to roviny kolmé na optickou osu v nichž je příčné zvětšení rovno jedné. **Předmětová hlavní rovina** χ se protíná s optickou osou v hlavním bodě H . **Obrazová hlavní rovina** se protíná s optickou osou v hlavním bodě H' .

Ohniskové roviny — jsou kolmé na optickou osu a procházejí **předmětovým** F resp. **obrazovým** ohniskem F' , tj. takovými body na optické ose, v nichž se protnou po průchodu čoučkou paprsky rovnoběžné s optickou osou.

Rovina obrazová a předmětová — jsou roviny π a π' , jejichž vzájemná poloha je svázána zobrazovací rovnicí.

Ohnisková vzdálenost — vzdálenost f resp. f' mezi ohnisky a odpovídajícími hlavními body.



Obr. 5.18: Charakterizace optického systému pomocí hlavních, ohniskových a obrazových rovin. Body V a V' odpovídají vrcholům lánavých ploch.

Takto definované roviny budeme značit řeckými písmeny, jak je uvedeno na obr.5.18. Nyní podle těchto definic vypočteme příslušné polohy bodů na optické ose.

Poloha hlavního obrazového bodu Z definice hlavního bodu a z rovnice (5.25) plyne

$$t'_{H'} = n' \frac{1-a}{c} . \quad (5.26)$$

Poloha hlavního předmětového bodu Z podmínky, že determinant transformační matice při zobrazení daný rovnicí (5.24) je roven 1, plyne

$$(a + c \frac{t'}{n'}) (d + c \frac{t}{n}) = \beta (d + c \frac{t}{n}) = 1$$

Odtud pak dostaneme

$$t_H = n \frac{1-d}{c} . \quad (5.27)$$

Poloha obrazového ohniska Vyjdeme ze zobrazovací rovnice (5.22), rovnici podělíme součinem tt' a provedeme limitní přechod pro $t \rightarrow -\infty$, což odpovídá poloze předmětového bodu v nekonečnu. Poloha jeho obrazu pak odpovídá poloze hledaného ohniska

$$t'_{F'} = -n' \frac{a}{c} \quad (5.28)$$

Poloha předmětového ohniska Podobným postupem jako v předchozím případě vyjde

$$t_F = -n \frac{d}{c} \quad (5.29)$$

Obrazová ohnisková vzdálenost Podle její definice platí $f' = t'_F - t'_{H'}$. Po dosazení dostaneme

$$f' = -\frac{n'}{c} \quad (5.30)$$

Předmětová ohnisková vzdálenost Podobným postupem jako v předchozím případě dostaneme

$$f = -\frac{n}{c} \quad (5.31)$$

Pokud je $n = n' = 1$ je $f = f'$ a veličina $\varphi = 1/f$ se nazývá **optická mohutnost** a udává se v **dioptriích**, když se f měří v metrech.

Poznamenejme ještě, že při zobrazení se parametry h, s transformují podle rovnice (5.24), kterou nyní můžeme zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} h' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -f/n & 1/\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}.$$

5.7.6 Průchod některých paprsků zobrazovacím systémem

Pro grafickou konstrukci obrazu se v geometrické optice užívá některých význačných paprsků. Naším úkolem nyní bude odvodit tato pravidla z našich transformačních rovnic. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že na obou stranách optického systému je vakuum nebo vzduch, tzn. $n = n' = 1$. Zobrazovací rovnice má pak tvar

$$\frac{a}{t} + c + \frac{b}{tt'} + \frac{d}{t'} = 0 \quad (5.32)$$

a transformační rovnice mají tvar

$$h' = (a + ct')h \quad s' = ch + (ct + d)s \quad (5.33)$$

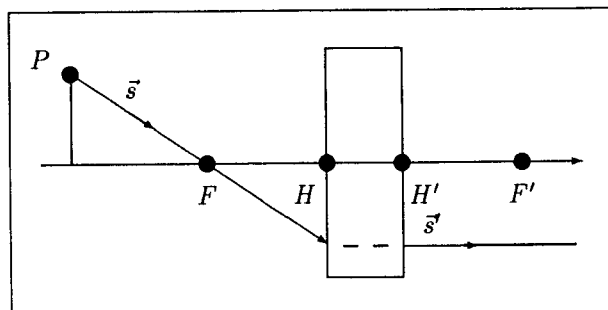
Paprsek jdoucí ohniskem a vycházející z bodu P má parametry h, s , kde

$$s = -\frac{h}{t - t_F} = \frac{-h}{t + d/c} = \frac{-ch}{ct + d}.$$

Po průchodu optickým systémem bude mít směr s' , který vypočteme z transformačních rovnic (5.33)

$$s' = ch + (ct + d) \frac{-ch}{ct + d} = 0.$$

Parametr $s' = 0$ a to znamená, že za optickým systémem je rovnoběžný s optickou osou - viz obr.5.19.

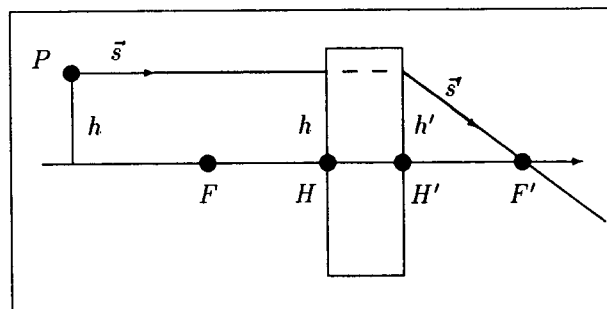


Obr. 5.19: Paprsek jdoucí předmětovým ohniskem jde rovnoběžně s optickou osou v obrazovém prostoru. Jak se šíří mezi hlavními rovinami nevíme, ale vzdálenost od osy h je v obou rovinách stejná.

Paprsek rovnoběžný s optickou osou a vycházející z bodu P má $s = 0$. Z transformační rovnice (5.33) dostáváme

$$s' = ch = -\frac{h}{f}.$$

Úhel tohoto paprsku s osou odpovídá tomu, že bude procházet obrazovým ohniskem.



Obr. 5.20: Paprsek rovnoběžný s optickou osou prochází obrazovým ohniskem v obrazovém prostoru.

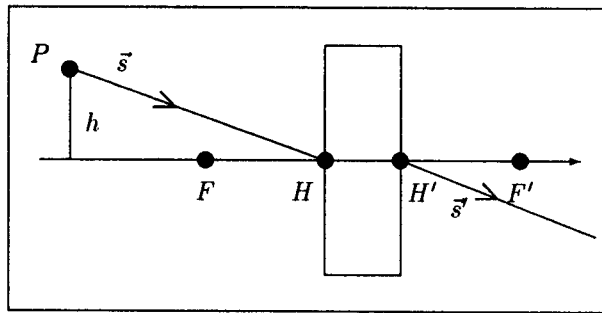
Paprsek jdoucí hlavním bodem a vycházející z bodu P je dán vztahem

$$s = \frac{-h}{t - t_H} = \frac{-hc}{ct + d - 1}.$$

Z transformační rovnice (5.33) dostáváme

$$s' = ch + (ct + d) \frac{-hc}{ct + d - 1} = \frac{-hc}{ct + d - 1}.$$

Paprsek vychází za optickým systémem z obrazového hlavního bodu H' a má stejný směr jako v předmětovém prostoru.

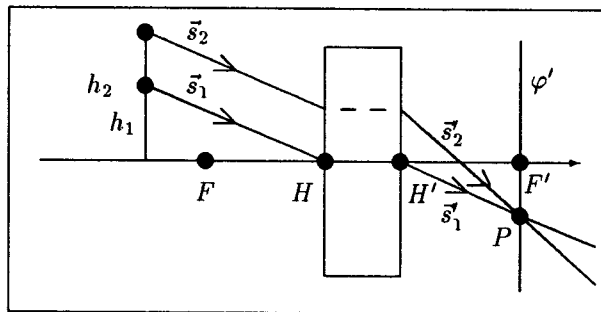


Obr. 5.21: Paprsek jdoucí předmětovým hlavním bodem vychází obrazovým hlavním bodem pod stejným směrem.

Všechny tyto tři paprsky se protínají v jednom bodě P' , jehož poloha plyne ze zobrazovací rovnice (5.32)

$$t = -\frac{at + b}{ct + d}.$$

Nyní ještě vypočteme, jak se budou chovat paprsky navzájem rovnoběžné po průchodu zobrazovacím systémem. Vyjděme se situace na obr.5.22. První paprsek má parametry



Obr. 5.22: Paprsek jdoucí předmětovým hlavním bodem H vychází obrazovým hlavním bodem H' pod stejným směrem a protíná ohniskovou rovinu v bodě P . Druhý paprsek původně rovnoběžný s prvním se také protíná s ohniskovou rovinou v bodě P .

h_1, s_1 a druhý h_2, s_2 , kde

$$s_1 = \frac{-ch}{ct + d - 1}.$$

Z transformačních rovnic plyne, že $s_1' \neq s_2'$ protože předpokládáme $h_1 \neq h_2$. Takové paprsky se tedy musejí protnout, a bude to v takové poloze t' , kde $h_1' - h_2' = 0$. Odečtením odpovídajících si dvou transformačních rovnic dostáváme

$$h_1' - h_2' = (a + ct')(h_1 - h_2)$$

a místě průsečíku je levá strana rovna nule.

$$0 = (a + ct')(h_1 - h_2).$$

Aby tato rovnice byla splněna musí platit $a + ct' = 0$, tedy $t' = -a/c$. Protínají se tedy v ohniskové rovině a to v bodě $h_F = -s_1 a/c$. Tedy protnou se tam, kde obrazovou ohniskovou rovinu protne paprsek vycházející z obrazového hlavního bodu.

5.8 Čočky

Základním stavebním prvkem zobrazovacích soustav jsou **čočky**. Nejčastěji jsou vyrobeny ze skla s různým indexem lomu, ale pro ultrafialové nebo infračervené světlo se vyrábějí i z jiných materiálů, jako např. z krystalu LiF, NaCl či křemíku.

Přenosová matice čočky \hat{A} je tedy součinem dvou refrakčních matic a jedné translační

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{r_{2z}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{r_{1z}} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Necháváme na čtenáři, aby nyní zkoumal kde leží hlavní body a ohniska pro konkrétní hodnoty poloměrů lámavých ploch. Z hlediska klasifikace čoček si všimneme jen ohniskových vzdáleností.

Ohnisková vzdálenost f je určena prvkem c přenosové matice a platí

$$\frac{1}{f} = -c = \frac{1-n}{r_{2z}} + \frac{n-1}{r_{1z}} + \frac{1-n}{r_{1z}} \frac{n-1}{r_{2z}} \frac{t_1}{n}, \quad (5.35)$$

Když dosadíme do této rovnice $r_{1z} = r_1$ a $r_{2z} = -r_2$ dostaneme výraz pro tzv. **tlustou spojku**.

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} - \frac{(n-1)^2}{r_1 r_2} \frac{t_1}{n}, \quad (5.36)$$

Jestliže $t_1 \ll r_1, r_2$, pak mluvíme o **tenké spojce**, pro níž platí

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2}. \quad (5.37)$$

Spojky jsou čočky s ohniskovou vzdáleností kladnou, **rozptylky** s ohniskovou vzdáleností zápornou. Ohnisková vzdálenost **tenké spojky** je vždy kladná, zatímco pro **tlustou spojku**, kdy t_1 je srovnatelné s poloměry křivosti, to platit nemusí. Jak uvidíme dále, významnou roli mají v optice ještě **ploskovypuklé tenké čočky**, tj. takové, kdy $r_1 = \infty$ a $r_{2z} < 0$.

Podobně rozptylky mohou být dvojduté ($r_{1z} < 0$ a $r_{2z} > 0$), ploskoduté ($r_{1z} = \infty$, $r_{2z} > 0$). Samozřejmě i jinými kombinacemi křivosti lámavých ploch a indexů lomu můžeme vytvářet spojky nebo rozptylky.

5.9 Aberace čoček

Pouze virtuální obraz rovinného zrcadla je prostý jakýchkoliv vad zobrazení. Ostatní zobrazovací systémy se potýkají s řadou vad, jež mají původ jednak v aproximaci, za níž

jsme podmínky zobrazení odvozovali (paraxiální prostor), jednak v závislosti indexu lomu na vlnové délce.

S paraxiálním prostorem souvisí vada **otvorová** a tzv. **koma**, s disperzí indexu lomu pak **chromatická vada**. Vady čoček nelze nikdy zcela odstranit. Vhodnou kombinací skel a čoček je jde jen potlačit, aby nepřesahovaly požadovanou kvalitu zobrazení. Poznamenejme, že kulová zrcadla nemají chromatickou vadu. To je jeden z podstatných důvodů, proč se užívají jako objektivy u velkých dalekohledů.

Výpočet kvalitních zobrazovacích systémů je velice složitá numerická záležitost. Vychází se přitom prakticky v Fermatova principu. Volnými parametry při tomto výpočtu jsou indexy lomu, poloměry křivosti lámavých ploch a vzdálenosti jejich vrcholů.

V následujících odstavcích pojednáme stručně o některých vadách čoček a způsobech jejich potlačení.

5.9.1 Chromatická vada

Ohnisková vzdálenost f dvojnásobně vypuklé čočky o indexu lomu n omezené dvěma kulovými plochami o poloměrech r_1, r_2 vzdálenými od sebe o t_1 je dána vztahem (5.36).

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} - \frac{(n-1)^2}{nr_2r_1}t_1. \quad (5.38)$$

Pro tenkou čočku pak platí

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = (n-1)\rho,$$

kde veličina ρ se nazývá **celková vypuklost čočky**. Podobný vztah dostaneme i tehdy, když dáme těsně k sobě dvě tenké čočky o ohniskových vzdálenostech f_1 a f_2 .

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Na obr.5.23 je graf závislosti indexu lomu na vlnové délce pro některé důležité optické látky. Tato závislost indexu lomu tedy způsobí, že na vlnové délce závisí i ohnisková vzdálenost.

Uvedeme dva způsoby, jak lze kombinací tenkých čoček tuto vadu potlačit.

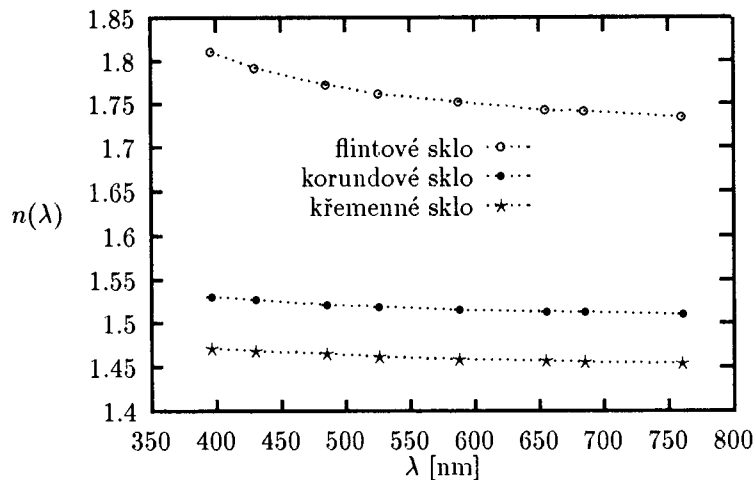
1. Spojka a rozptylka těsně na sobě.

2. Kombinace dvou ploskovypuklých čoček.

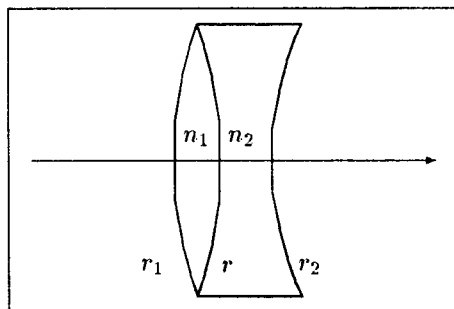
Těchto způsobů se využívá při konstrukci fotografických a mikroskopických objektivů a při konstrukci okulárů pro dalekohledy a mikroskopy.

Spojka a rozptylka těsně na sobě

Takový systém se je tvořen třemi lámavými plochami o poloměrech r_1, r, r_2 a indexy lomu první čočky n_1 a druhé n_2 . Přenosová matice je součinem jen čtyř refrakčních matic (každá



Obr. 5.23: Závislost indexu lomu na vlnové délce pro některé optické materiály. Body označují hodnoty indexů lomu pro vlnové délky tzv. **Fraunhoferových spektrálních čar**.



Obr. 5.24: Kompensace chromatické vady pomocí kombinace spojky a rozptylky.

dvojice tvoří jednu tenkou čočku). Prvek c přenosové matice pak je

$$-c = \frac{1}{f} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right) + (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}\right) = (n_1 - 1)\rho_1 + (n_2 - 1)\rho_2,$$

kde ρ_1 a ρ_2 jsou příslušné vypuklosti obou čoček. Necht' index lomu n odpovídá hodnotě pro vlnovou délku λ a n' hodnotě pro λ' . Požadujeme nyní, aby ohniskové vzdálenosti pro tyto dvě vlnové délky byly stejné. Zvolíme-li za volný parametr poloměr stykové plochy r , dostáváme pro něj podmínku

$$(n_1 - 1)\rho_1(r) + (n_2 - 1)\rho_2(r) = (n'_1 - 1)\rho_1(r) + (n'_2 - 1)\rho_2(r),$$

odkud po úpravě dostaneme pro poměr vypuklostí výraz

$$\frac{\rho_1(r)}{\rho_2(r)} = -\frac{n'_2 - n_2}{n'_1 - n_1}. \quad (5.39)$$

Odtud vidíme, že pro zadanou vlnovou disperzi lze z této rovnice vypočítat hledaný poloměr stykové plochy r a tak pro dvě vlnové délky kompenzovat chromatickou vadu. Takové

soustavy se nazývají **achromáty**. Všimněme si, že vypuklosti se musejí lišit znaménkem, tzn. že musí jít o kombinaci spojky a rozptylky.

Dvě ploskovypuklé čočky

Mějme dvě tenké ploskovypuklé čočky tentokrát ze stejného skla o ohniskových vzdálenostech $f_1 = r_1/(n-1)$, $f_2 = r_2/(n-2)$, které dáme do vzdálenosti t . Přenosová matice takové soustavy je součinem $\hat{R}_2\hat{T}\hat{R}_1$ a prvek c je dán vztahem

$$-c = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} - \frac{(n-1)^2}{r_1 r_2} t. \quad (5.40)$$

Takový systém dvou čoček nebude záviset na indexu lomu, pokud derivace $1/f$ podle n bude rovna nule. Tedy

$$\frac{\partial 1/f}{\partial n} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2t(n-1)}{r_1 r_2} = 0.$$

Tato podmínka bude splněna, když vzdálenost čoček bude splňovat vztah

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{n-1} + \frac{r_2}{n-1} \right)$$

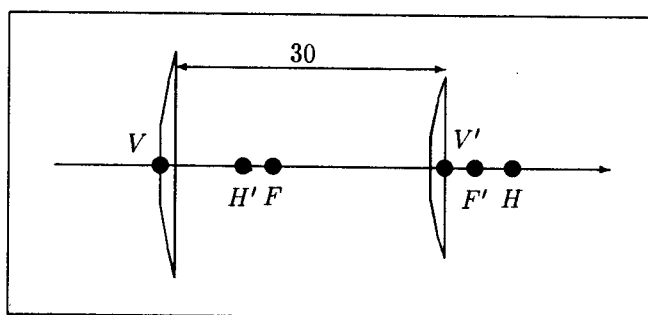
a tedy

$$t = \frac{f_1 + f_2}{2}. \quad (5.41)$$

výsledná ohnisková vzdálenost pak bude

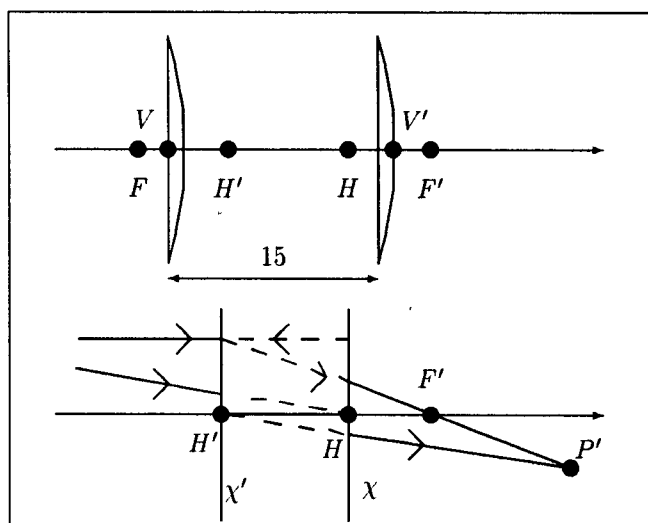
$$f = \frac{f_1 f_2}{2(f_1 + f_2)}.$$

Toto je velice významný výsledek, protože pouhým nastavením dvou čoček ze stejného skla, získáme dokonale achromatický zobrazovací systém. Zajímavé je, že na tuto vlast-



Obr. 5.25: Schéma Huygensova okuláru sestaveného ze dvou tenkých ploskovypuklých spojek $f_1 = 40\text{mm}$, $f_2 = 20\text{mm}$, $t = 30\text{mm}$. Chod paprsků tímto okulárem je podobný jako u Ramsdenova okuláru. lavní body mají překvapivou polohu.

nost se přišlo experimentálně dříve než teoreticky a je jí využito u tzv. **Huygensova okuláru**. Na obr.5.25 jsou zakresleny polohy hlavních rovin a ohnisek pro tyto parametry: $r_1 = 20\text{mm}$, $r_2 = 10\text{mm}$, $n = 1.5$, $t = 30\text{mm}$. Ohniskové vzdálenosti jsou $f_1 = 40\text{mm}$, $f_2 =$



Obr. 5.26: Schéma Ramsdenova okuláru sestaveného ze dvou stejných tenkých ploskovypuklých spolek vzdálených od sebe o $3f/4$. V dolní části obrázku je zakreslen chod paprsků touto soustavou. Parsek 2 jde hlavním bodem H a parsek 1 jde ohniskem F' . Překvapivý chod paprsků je dán zvláštní polohou hlavních bodů.

20mm a polohy hlavních rovin a ohnisek jsou $t'_{H'} = -20\text{mm}$, $t_H = -40\text{mm}$, $t'_{F'} = 6.7\text{mm}$, $t_F = -13.3\text{mm}$, $f = 26.7\text{mm}$.

Na obr.5.26 je soustava dvou stejných tenkých ploskovypuklých čoček o parametrech $r = 10$, $n = 1.5$, $t = 15\text{mm}$. Ohnisková délka těchto čoček je $f = 20\text{mm}$.

Je zřejmé, že tato soustava již není úplně achromatická, ale má jednu zajímavou a důležitou vlastnost. Hlavní roviny leží mezi čočkami, ale ohniskové roviny leží mimo. Do ohniskové roviny takového je pak možné vložit nitkový kříž a pozorovat jej pak současně s reálným obrazem předmětu, protože jak dále uvidíme, okulárem pozorujeme reálný obraz vytvořený objektivem stejně, jako když se díváme přes lupu. Polohy hlavních bodů a ohnisek jsou $t'_{H'} = -12\text{mm}$, $t_H = -12\text{mm}$, $t'_{F'} = 4\text{mm}$, $f_F = 4\text{mm}$, $f = 16\text{mm}$.

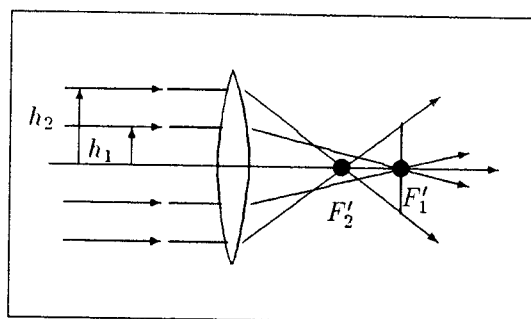
5.9.2 Otvorová vada

Při odvozování refrakčních a translačních matic jsme goniometrické funkce sinus a tangens nahrazovali přímo příslušnými úhly. Toto zjednodušení geometrie vedlo k velice příjemné **linearizaci** transformačních rovnic. Jestliže však použijeme k zobrazení paprsků, které svírají s optickou osou velký úhel θ , a nebo použijeme čočky, jejichž průměr obruby nesplňuje podmínku $D \ll r$, pak se zobrazení odchyluje od našich výpočtů tím více, čím hůře jsou tyto podmínky splněny.

Zatímco objektiv dalekohledu bude tyto podmínky splňovat celkem dobře, protože poměr

D/f bývá menší než $1/10$, tzn. že stačí použít tenké čočky s kompenzovanou chromatickou vadou, pak pro mikroskop nebo pro objektiv fotoaparátu je třeba otvorovou vadu potlačit za cenu vytvoření složité soustavy čoček.

Obecnou vlastnost otvorové vady nám pomůže objasnit situace na obr.5.27. Čím více jsou paprsky rovnoběžné s osu dál od osy, tím se protínají blíže čočce, což odpovídá kratší ohniskové vzdálenosti. To má za následek, že paraxiální paprsky zobrazí bod jako bod a vzdálenější paprsky zobrazí též bod jako kroužek, nebo jako bod, ale v jiné vzdálenosti od čočky. Paprsky svírající s optickou osou velký úhel se projevují tak, že vytváření ostrý



Obr. 5.27: Znázornění otvorové vady. Paprsky vzdálenější od osy se protínají blíže čočce. Ohnisková vzdálenost pro tyto paprsky je menší.

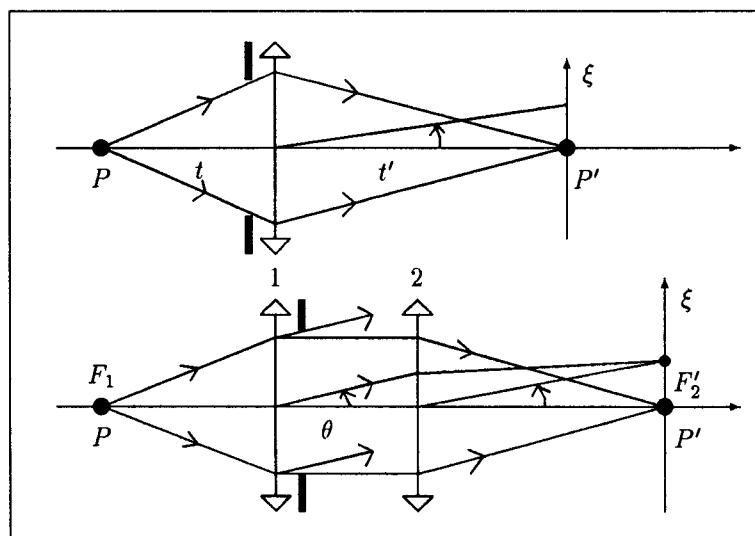
obraz na ploše, která se odlišuje od obrazové roviny. Její potlačení souvisí s tzv. **sinusovou** podmínkou, o níž však zde pojednávat nebudeme. Objektivy, které mají potlačeny obě tyto navzájem související otvorové vady se nazývají **aplanáty**.

5.10 Rozlišovací mez čoček

Podle geometrické optiky lze zobrazit bod jako bod pokud paprsky použité k zobrazení odpovídají co nejlépe paraxiálnímu přiblížení. Geometrická optika, jak jsme objasnili v úvodu této kapitoly, dává dobré výsledky jen tam, kde můžeme zanedbat efekty difrakce. A právě Fraunhoferova difrakce na obrubě čočky, nebo na **vstupní pupile** je efekt, který určuje rozlišovací mez i intenzitu obrazu.

Nejdříve ukažme, že se při zobrazování jedná skutečně o Fraunhoferovu difrakci, která odpovídá přiblížení rovinných vln a ne o Fresnelovu difrakci související s difrakcí kulových vln, když vlastně čočka musí divergentní kulovou vlnu vycházející z předmětového bodu změnit na vlnu konvergentní, sbíhající se do jeho obrazu.

Vyjděme z obr.5.28. Tenká čočka omezená pupilou zobrazuje bod P na bod P' . Podobně jako dvě tenké čočky o když dáme těsně k sobě můžeme nahradit jednou tenkou čočkou o



Obr. 5.28: Rozklad spojky na dvě čočky. Pro znázornění difrakčního jevu na pupile jsou ve spodní části obrázku obě hypotetické čočky zakresleny od sebe vzdálené, i když se mají podle naší analýzy dotýkat.

ohniskové vzdálenosti

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

tak jednu tenkou čočku můžeme rozložit na dvě takové, že $f_1 = t$ a $f_2 = t'$, jak plyne ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t'}.$$

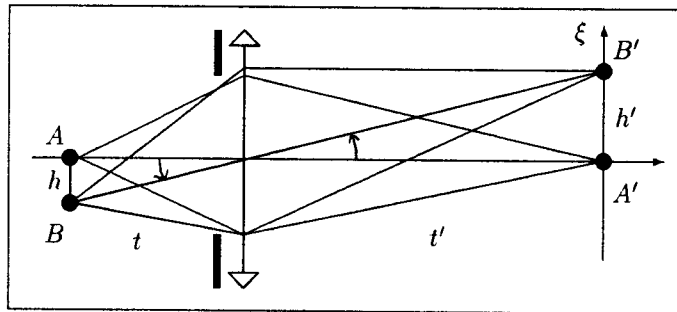
Protože předmět leží v ohnisku první čočky dopadá na pupilu rovinná vlna. Na pupile difraktuje a rovinná vlna difraktovaná pod úhlem θ se zobrazí do ohniskové roviny druhé čočky do bodu $P(\xi)$, kde

$$\xi = \theta f_2 = \theta t'$$

Rozložení intenzity v ohniskové rovině druhé čočky odpovídá tedy Fraunhoferově difrakci na pupile (na pupilu dopadá rovinná vlna a intenzita difraktované vlny je určena pouze difrakčním úhlem) a je totožné s rozložením intenzity v obrazové rovině při zobrazení jednoho bodu.

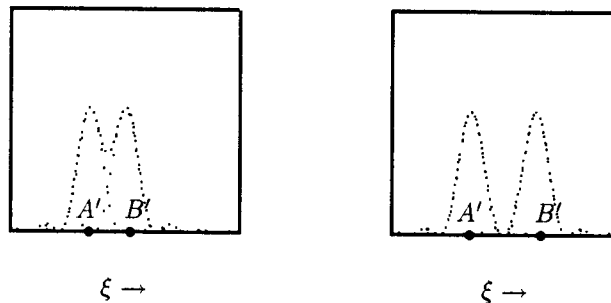
Tato analýza zobrazování bodu, je základem všech **optických difraktometrů**. Místo pupily se použije příslušný difrakční objekt, např. optická mřížka, a Fraunhoferův difrakční jev pozorujeme v rovině, kam zobrazíme zdroj světla. Bez této vlastnosti čoček by nebylo možné prakticky splnit podmínky pro vznik Fraunhoferovy difrakce na mřížkách o velikosti 1cm a více.

Při posuzování rozlišovací meze se budeme proto opírat o výsledky výpočtů Fraunhoferovy difrakce na otvorech. **Rozlišovací mezí čočky** budeme rozumět minimální vzdálenost bodů $AB = h$, které v obrazové rovině budeme považovat ještě za dva oddělené body $A'B' = h'$.



Obr. 5.29: Geometrická situace při zobrazení dvou blízkých bodů A a B pro výpočet rozlišovací meze čočky.

Pro šířku difrakčního maxima přibližně platí



Obr. 5.30: Rozložení intenzity na stínítku při zobrazení dvou blízkých bodů A a B . Šířka difrakčního maxima odpovídající průměru Airyho stopy rozhoduje o rozlišovací mezi čočky.

$$\Delta\xi \doteq \lambda \frac{t'}{D},$$

kde D je průměr pupily. K rozlišení tedy dojde, když $h' > \Delta\xi$. Čočka **vidí** předmět pod **zorným úhlem**

$$\frac{h}{t} = \frac{h'}{t'} > \frac{\Delta\xi}{t'} = \frac{\lambda}{D}.$$

Rozlišení dvou bodů tedy nastane, pokud čočka bude vidět oba body pod úhlem větším, než je **mezní zorný úhel** λ/D . detailním zkoumáním superpozice takových dvou difrakčních maxim z hlediska jejich rozlišení se u tohoto výrazu objevuje faktor 1.22 místo naší 1, který pro jednoduchost ani v dalším odstavcích nebudeme uvažovat.

Každý bod předmětu se tedy zobrazí do plošky o průměru $\Delta\xi$ a do vedlejších difrakčních kroužků, které však jen snižují kontrast obrazu. Této plošce se říká **Airyho stopa** a dopadne na ni 80 procent energie vlny, která prošla objektivem.

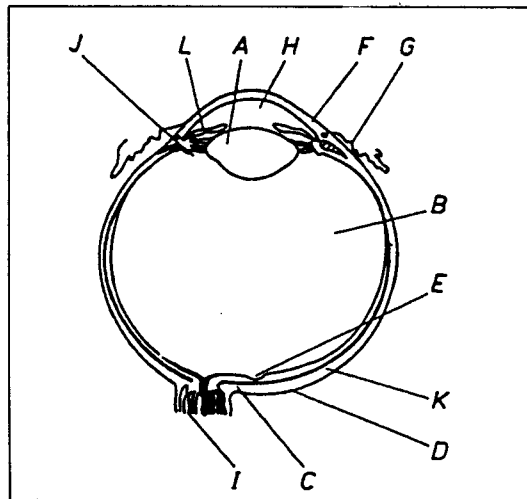
5.11 Oko a barevné vidění

Dříve než se začneme zabývat optickými přístroji, je třeba se seznámit s funkcí lidského oka, protože u mnohých z nich je právě oko jejich poslední částí.

Při analýze jevu, kterému říkáme **vidění**, je třeba rozlišovat mezi jevy optickými, fyziologickými a nervovými.

5.11.1 Optika lidského oka

Z hlediska optiky je průměrné oko dvojbypuklá spojka o střední ohniskové vzdálenosti $f = 23\text{mm}$. Svalovými orgány oka dokáže člověk tuto vzdálenost měnit, říkáme **akomodovat**, tak že se jeho optická mohutnost může měnit od 40 do 70 dioptrií. Tím je docíleno toho, ostrý obraz vzniká vždy na sítnici, kde se nacházejí buňky citlivé na světlo. Nedostatek schopnosti akomodovat se řeší brýlemi. Podle osvětlení se průměr oční pupily může měnit



Obr. 5.31: Řez lidským okem. A čočka, B sklivce, C sítnice, F rohovka, G spojivka, H přední komora, I oční nerv, L duhovka (pupila).

od 2mm do 6mm. Průměru 3mm a vlnové délce 600nm (červená) přísluší mezní zorný úhel $\gamma_0 = \lambda/D = 2 \cdot 10^{-4}$. Tomuto úhlu odpovídá minimální vzdálenost rozlišitelných bodů $\Delta\xi = 2 \cdot 10^{-4}f \doteq 5\mu\text{m}$. Tato velikost odpovídá rozměrově velikosti očních buněk. Tento soulad rozměrů svědčí o ekonomičnosti přírody.

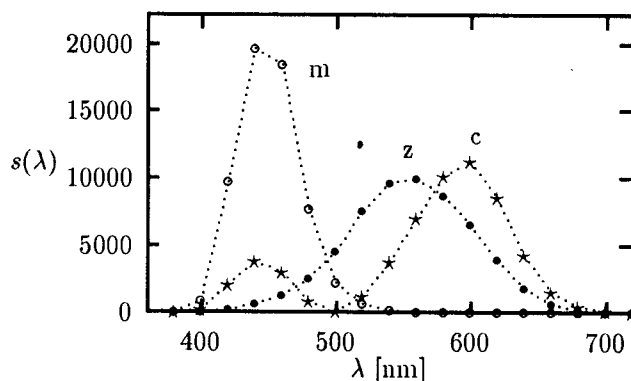
Ve vzdálenosti 1km, 10m a 25cm rozpoznáme dva body vzdálené 20cm, 2mm a 0.05mm. Chceme-li rozpoznat jemnější detaily na předmětech, musíme zvětšit zorný úhel pod nímž je pozorujeme. K tomu nám slouží lupa, mikroskop a dalekohled, které přikládáme těsně k oku. Většina lidí je schopna ještě dobře zaostřit předmět (akomodovat) ležící ve vzdálenosti 25cm. Tato vzdálenost se nazývá **konvenční zraková vzdálenost**.

5.11.2 Fyziologické a nervové vlastnosti oka

Detekce obrazu vytvořeného na sítnici se děje čtyřmi druhy buněk:

1. **Tyčinkami**, které nejsou citlivé na barvu, tzn. že v celém oboru viditelného spektra mají přibližně stejnou citlivost.
2. Čípky citlivé na **modrou** barvu.
3. Čípky citlivé na **zelenou** barvu.
4. Čípky citlivé na **červenou** barvu.

Střed obrazové roviny na sítnici se nazývá **žlutá skvrna** a v jeho okolí je největší hustota čípků. Ve větší vzdálenosti od žluté skvrny roste hustota tyčinek na úkor čípků. Každá



Obr. 5.32: Spektrální citlivost jednotlivých druhů čípků lidského oka a jim odpovídající propustnosti standardních filtrů pro aditivní sčítání barev.

z těchto buněk je spojena nervem až do mozku, kde vyhodnocují nervové signály vyvolané vratnými elektrochemickými procesy. Relaxační doba těchto procesů je asi 0.1 vteřiny. Místo, na sítnici kudy nervová vlákna vycházejí z oka ven, se nazývá **slepá skvrna**.

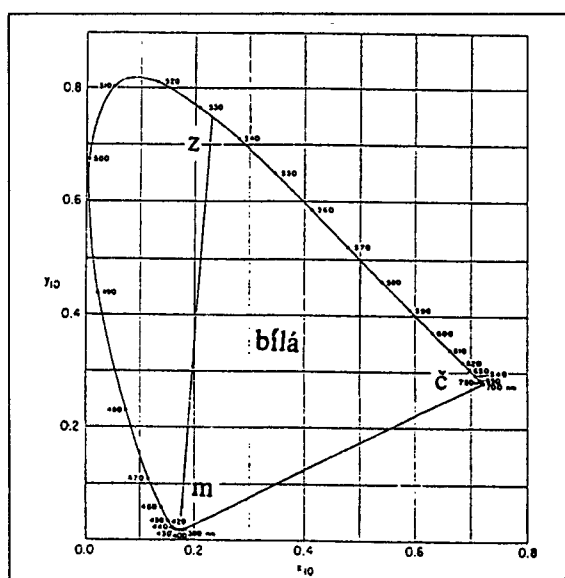
Přes to, že obraz na sítnici je vzhůru nohama, my vidíme předměty vzpřímeně. Je to dílo naší nervové soustavy, která nás už v našem kojeneckém věku naučila takto vidět, podobně jako nás naučila i jiné dovednosti vycházející ze smyslových podnětů.

Díky naší zkušenosti umíme automaticky zaostřovat, využívat žluté skvrny směřováním očí, skládat v mozku obrazy z každého oka v jeden, odhadovat vzdálenosti předmětů podle napjatosti očních svalů potřebné k akomodaci nebo jiných svalů ke směřování očí do jednoho bodu apod.

5.11.3 Vnímání barev

Vnímání barev je zcela subjektivní záležitost. Pouze na základě konvence mezi lidmi se alespoň přibližně jsme schopni domluvit, který předmět je modrý, který žlutý nebo oranžový. Je to tím, každá buňka citlivá na jednotlivé vlnové délky vyšle do mozku signál podle míry svého podráždění a teprve v mozku se této kombinaci tří signálů přiřadí pojem příslušné barvy. Tak si vysvětlujeme, že vnímáme více barev, než kolik se jich vyskytuje ve viditelném spektru.

Pro obchodní účely se zavádí objektivní barevné souřadnice X, Y odpovídající souřadnicím jednoho bodu v tzv. **barevném trojúhelníku**, který byl mezinárodními organizacemi kodifikován – viz 5.33. Konstrukci tohoto barevného trojúhelníku můžeme objasnit následovně.

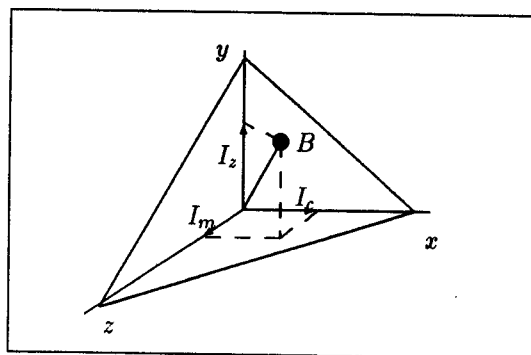


Obr. 5.33: Kodifikovaný barevný trojúhelník.

Vjem barvy vzniká kombinací úrovně signálů od tří typů buněk citlivých na modrou, zelenou a červenou spektrální barvu – viz spektrální citlivosti na obr. 5.32. V prvním přiblížení můžeme říci, že výsledný vjem barvy je určen poměrem úrovní podráždění jednotlivých čípků, které je úměrné intenzitě příslušné spektrální barvy. Na základě tohoto předpokladu můžeme proces vnímání barvy zobrazit matematicky jako sčítání tří vektorů

$$\vec{b} = \vec{I}_m + \vec{I}_z + \vec{I}_c$$

a geometricky znázornit jako bod B v kartézském systému, kde intenzity I_m, I_z, I_c považujeme za jeho souřadnice – viz obr.5.34. Na spojnici tohoto bodu B s počátkem je poměr zastoupení barev stálý a podél této spojnice se tedy mění jen celkový jas barvy. Odhlédneme-li od jasu, pak každému poměru tří uvažovaných signálů odpovídá jeden bod



Obr. 5.34: Konstrukce barevného trojúhelníka.

ve vyznačeném trojúhelníku a každému bodu tedy jedna barva. Tím se při popisu barev můžeme omezit jen na dvě barevné souřadnice v rovině tohoto trojúhelníka. Poloha tohoto trojúhelníka v souřadném systému X, Y je právě předmětem kodifikace.

Takto geometrizovaný proces vnímání barev je značně zjednodušený. Toto zjednodušení spočívá např. v tom, že spektrální citlivosti jednotlivých druhů čípků se částečně překrývají a někdy mají i dvě maxima. Spektrální barvy neleží tedy přesně na obvodu trojúhelníka, ale na křivce spojující modrý, zelený a červený bod a která z trojúhelníka vybočuje. Na spojnici modré a červené leží barvy purpurové a přibližně uprostřed trojúhelníka leží barva bílá.

Předmětem kodifikace je rovněž postup, jak pomocí tří barevných filtrů jejichž spektrální propustnosti se shodují se spektrální citlivostí průměrného oka, nastavit pomocí souřadnic X a Y na náležitý poměr intenzit, abychom dostali přesně definovanou barvu.

5.12 Fotografický přístroj

Z optických přístrojů je snad nejbliže oku **fotografický přístroj**. Objektivy jsou tvořeny složitými soustavami čoček, protože požadujeme velký zorný úhel, velkou světelnost a ostrost obrazu. Řekli bychom krátce, že se jedná o kvalitní achromáty a aplanáty.

Objektiv fotoaparátu bývá opatřen **clonou**, tj. proměnnou velikostí vstupní pupily, kterou lze ovlivnit jas obrazu a **hloubku ostrosti**. Clona se charakterizuje tzv. **clonovým číslem**, které je definováno vztahem $C = f/D$, kde D je průměr pupily a f ohnisková vzdálenost. Protože tok světelné energie je roven součinu intenzity a plochy, dostáváme pro tok energie Airyho stopou přibližný výraz daný součinem intenzity Fraunhoferovy difrakce na vstupní pupile ($\approx D^4$ v centru Airyho stopy) a kvadrátu jejího průměru ($\approx \lambda f/D$)

$$I_A \approx D^4 \frac{(\lambda f)^2}{D^2} \approx \frac{f^2}{D^2} = C^2,$$

který ukazuje, jak souvisí tok energie s clonovým číslem. Tento vztah objasňuje také obvyklou řadu clonových čísel zvolenou tak, že při přechodu od jednoho čísla k sousednímu se jas obrazu změní dvakrát.

Předpokládejme, že fotografický film má takové zrno, že rozliší N čar na 1mm. To znamená, že každý bod předmětu musíme zobrazit do plošky o průměru $d = j/N$, kde j je příslušná délková jednotka, v níž se udává rozlišovací schopnost filmu.

Protože u fotoaparátu vzniká obraz přibližně v ohnisku, musí tedy pro velikost Airyho stopy platit

$$\Delta\xi = \frac{\lambda f}{D} = \lambda C < \frac{j}{N}$$

Odtud dostáváme, že největší clonové číslo může být

$$C = \frac{j}{\lambda N}.$$

Kdybychom ještě více zaclonili objektiv (zmenšili pupilu) zhoršíme tím rozlišovací schopnost. Pro běžné fotografické filmy je $N = 100/mm$. Maximální clonové číslo nám pak vychází $C \approx 20$.

Poněkud podrobněji se zastavíme u **hloubky ostrosti**.

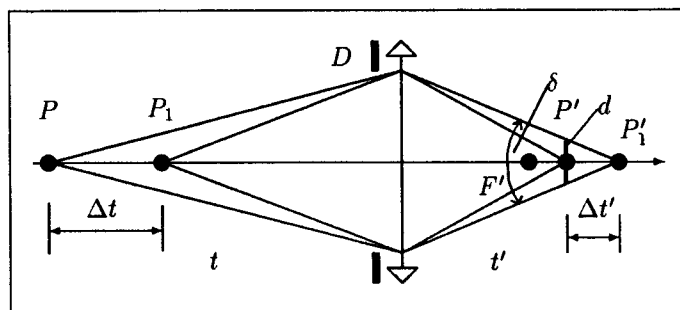
Rozlišovací schopnost filmu určuje také hloubku ostrosti. Tou rozumíme vzdálenost mezi dvěma body prostorového předmětu ve směru optické osy, které se nám na filmu jeví ještě ostře zobrazené. Poloha bodů obrazu a předmětu je svázána zobrazovací rovnicí

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = \frac{1}{f}.$$

Posuneme-li předmět o Δt posune se obraz o $\Delta t'$. Diferencováním zobrazovací rovnice dostaneme

$$\Delta t = \frac{t^2}{t'^2} \Delta t'$$

Z obr.5.35 plyne pro úhel δ výraz



Obr. 5.35: Geometrická situace při vyšetřování hloubky ostrosti fotografického přístroje.

$$\delta = \frac{d}{\Delta t'} \approx \frac{D}{f}.$$

Odtud

$$\Delta t' \approx d \frac{f}{D} = \frac{j}{N} C .$$

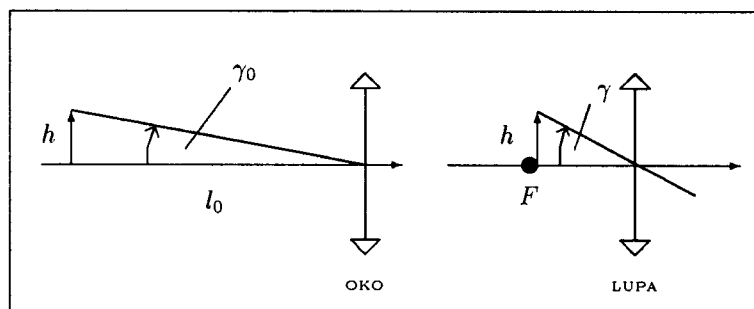
Pro hloubku ostrosti pak dostáváme konečný výraz

$$\Delta t = \frac{t^2}{t'^2} \frac{j}{N} C \approx \frac{t^2}{f^2} \frac{j}{N} C .$$

Všechny předměty ležící v intervalu $t \pm \Delta t$ se daným fotoaparátém při daném clonovém čísle zobrazí ploškami menšími než je rozlišovací schopnost filmu.

5.13 Lupa

Lupou nazýváme nejjednodušší optický přístroj, který používáme pro subjektivní pozorování detailů na předmětu. Může jí být každá spojka, která má ohniskovou vzdálenost menší než je konvenční zraková délka l_0 . Ukážeme proč. Jak je zřejmé z obr.5.36 oko vidí



Obr. 5.36: Pozorování předmětu okem a lupou. Předmět leží jen o málo blíže čočce, než je ohnisko lupy.

předmět h ze vzdálenosti l_0 pod zorným úhlem $\gamma_0 = h/l_0$. Chceme-li na něm rozlišit jemnější detaily, musíme zvětšit zorný úhel. Spojka bude vidět tentýž předmět pod největším zorným úhlem tehdy, bude-li předmět jen o málo blíže k čočce, než je ohnisková vzdálenost. Paprsky vystupují z čočky jako z virtuálního obrazu, který se vytvořil ve velké vzdálenosti od čočky. Přesnou polohu předmětu nelze určit, protože oko automaticky zaostřuje pozorovaný obraz.

V tomto případě bude zorný úhel $\gamma = h/f$ a virtuální obraz bude vzpřímený. Přiložíme-li nyní oko těsně k lupě, budou do oka vstupovat paprsky pod stejným úhlem, jako vystupují z lupy, tj. pod úhlem γ . Lupou jsme tedy dosáhli úhlového zvětšení

$$\Gamma = \gamma/\gamma_0 = l_0/f .$$

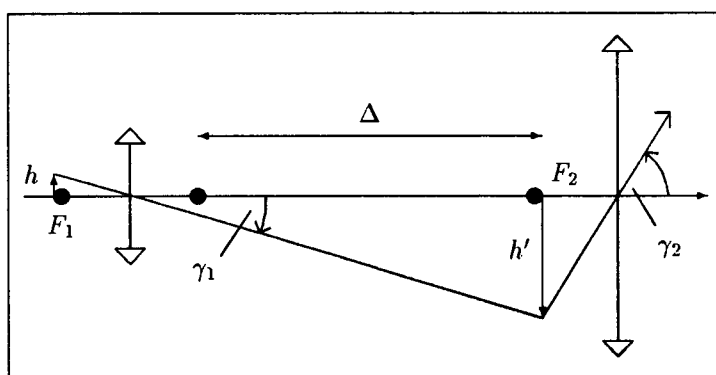
Bude-li vzájemná poloha předmětu, lupy a oka jiná než jsme popsali, bude i zvětšení jiné, ale vždy menší než uvedené. Dáme-li předmět za ohnisko, budeme vidět obraz převrácený. Při pozorování čočkou se oko automaticky akomoduje na takovou vzdálenost, při níž je schopno na předmětu nejlépe rozeznávat detaily, tj. asi na vzdálenost l_0 . Proto, když pohybuje předmětem, vidíme obraz stále zaostřený.

5.14 Mikroskop

Mikroskop je druhý přístroj, jehož úkolem je zvětšit zorný úhel při pozorování předmětu. Je zřejmé, že chceme-li dosáhnout ještě většího zvětšení než lupou, musíme použít čočky s ještě kratší ohniskovou vzdáleností. Reálný meziobraz vytvořený objektivem se u mikroskopu pozoruje v principu lupou, která je však nahrazena okulárem s kompenzovanou chromatickou vadou, např. Huygensovým okulárem.

Mikroskopické objektivy mají ohniskové vzdálenosti řádu jednotek milimetrů a jsou to složité soustavy čoček, aby měly vlastnosti achromátů a aplanátů.

Optické schéma mikroskopu je na obr.5.37. Předmět leží ve vzdálenosti o málo větší než



Obr. 5.37: Optické schéma mikroskopu.

je ohnisková vzdálenost objektivu a tím vznikne ve vzdálenosti $f_1 + \Delta \approx \Delta$ reálný obraz, který se nachází zase o malinko blíže okuláru, než je jeho poloha předmětového ohniska, aby byla vytvořena stejná situace jako při pozorování lupou. Veličině Δ se říká **optický interval** a je dán konstrukcí mikroskopu.

Při výpočtu zvětšení mikroskopu β vyjdeme ze situace na obr.5.37. Pro zorný úhel γ_1 platí

$$\gamma_1 = \frac{h}{t} \approx \frac{h}{f_1} = \frac{h'}{f_1 + \Delta} \approx \frac{h'}{\Delta}.$$

Pro zorný úhel okuláru γ_2 platí

$$\gamma_2 = \frac{h'}{t} \approx \frac{h'}{f_2} = \frac{h\Delta}{f_1 f_2},$$

kde za h' bylo dosazeno z předchozí rovnice. Pro zvětšení mikroskopu pak dostáváme výraz

$$\Gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\Delta}{f_1} \frac{l_0}{f_2}.$$

Zvětšení mikroskopu je dáno součinem dvou faktorů: 1. zvětšením objektivu Δ/f_1 , které bývá napsáno na objektivěch, 2. zvětšením okuláru, které bývá zase napsáno na nich.

Pořídít **záznam mikroskopického obrazu** na fotografický film je velice jednoduché, protože objektiv vytváří reálný obraz předmětu. Stačí tedy odstranit okulár z mikroskopu, objektiv z fotoaparátu a sestavit oba přístroje tak, aby objektiv mikroskopu vytvářel reálný obraz přímo na fotografický film.

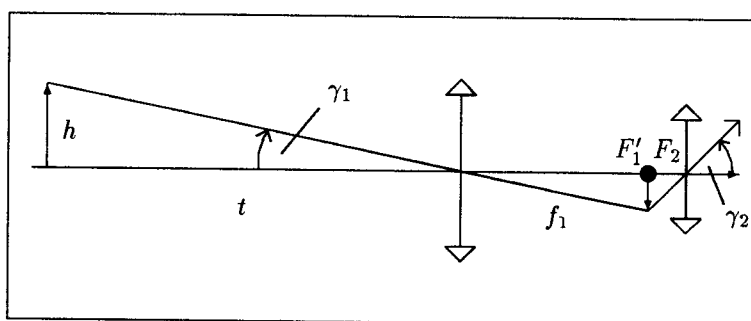
Podle geometrické optiky může být zvětšení mikroskopu neomezené. My však už víme, že geometrická optika je pouze dobrou aproximací skutečného chování světla, která nebere v úvahu difrakční efekty. **Difrakce na vstupní pupile** objektivu tedy principiálně znehodnocuje obraz. Minimální zorný úhel objektivu je $\gamma_m = \lambda/D$. Tomu odpovídá **minimální vzdálenost dvou rozlišitelných bodů** na předmětu

$$h_m = f_1 \gamma_m = f_1 \lambda / D = \lambda C$$

. Protože $D < f_1$, můžeme prakticky optickým mikroskopem rozlišit dva body od sebe vzdálené asi o $1 \mu\text{m}$. Vyplníme-li imerzní kapalinou prostor mezi předmětem a objektivem, pak úměrně jejímu indexu lomu zkrátíme vlnovou délku světla v předmětovém prostoru a rozlišení zlepšíme. Pro tuto operaci lze použít jen speciálních objektivů.

5.15 Dalekohled

Další optický přístroj, který oku zvětší zorný úhel vzdáleného předmětu je dalekohled. Jeho princip spočívá v tom, že objektiv vytvoří reálný obraz předmětu, který pak pozorujeme okulárem stejně, jako předmět lupou. Jak plyne z obr.5.38, oko by pozorovalo předmět po



Obr. 5.38: Optické schéma dalekohledu.

zorným úhlem

$$\gamma_0 = \frac{h}{t + f_1 + f_2} \approx \frac{h}{t}$$

Pomocí dalekohledu jej uvidí pod zorným úhlem

$$\gamma_2 = \frac{h'}{f_2} = \frac{\gamma_1 f_1}{f_2} = \frac{h f_1}{t f_2}$$

Pro **zvětšení dalekohledu** pak dostáváme výraz

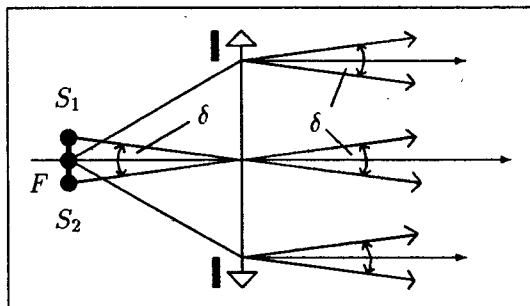
$$\Gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{f_1}{f_2}$$

Zvětšení je dáno tedy poměrem ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru.

V takovém dalekohledu vidíme tedy obraz převrácený, protože se díváme lupou převrácený obraz vytvořený objektivem. Jestliže spojný okulár nahradíme rozptylkou, pak reálný obraz objektivu může posloužit jako virtuální předmět pro rozptylnou lupu a tím docílíme toho, že obraz budeme vidět vzpřímený a navíc zkrátíme délku celého dalekohledu. Takový dalekohled se nazývá **Galileův** a na jeho principu jsou obvykle konstruována divadelní kukátka.

5.16 Kolimátor

Pro řadu optických experimentů je třeba vytvořit rovnoběžný svazek, který dobře aproximuje rovinnou vlnu. Podle geometrické optiky je to snadný úkol, protože stačí dát do ohniska spojky s korigovanou chromatickou vadou bodový zdroj světla. Problém nastává



Obr. 5.39: Optické schéma kolimátoru.

s realizací, protože bodové zdroje neexistují. Jak plyne z obr.5.39 ze zdroje s krajními body S_1 a S_2 o velikosti s a pomocí spojky o ohniskové vzdálenosti f lze získat svazek paprsků o **divergenci**

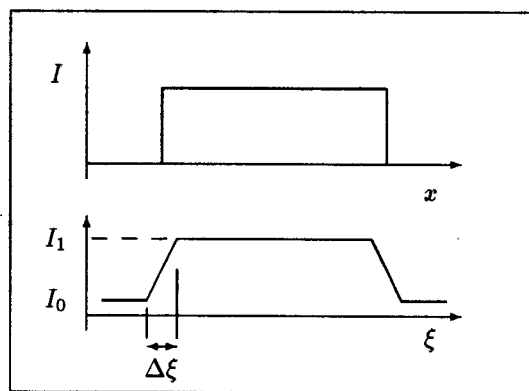
$$\delta = \frac{s}{f}.$$

Takový svazek paprsků se pak chová jako **vlna** o **koherenční šířce** $\beta = \lambda\delta = \lambda s/f$. Toto je důležité si uvědomit, protože jak víme, tato veličina významně ovlivňuje interferenční jevy.

5.17 Kontrast zobrazení

Při posuzování kvality zobrazení optickými přístroji je používá přenosové funkce optické soustavy, nebo aproximativně pomocí veličiny zvané **kontrast**. Její definici názorně objasníme pomocí obr.5.40. Kontrast Γ lze definovat jako maximální hodnotu podílu

$$\frac{I(\xi) - I(\xi')}{I(\xi) + I(\xi')}$$



Obr. 5.40: K definici kontrastu zobrazení. V horní části je znázorněno rozložení intenzity na předmětu a v dolní rozložení intenzity v odpovídajícím obrazu.

určeného ze všech možných dvojic bodů obrazu $P(\xi), P(\xi')$.

Z příkladu na obr.5.40 je kontrast zobrazení hrany roven

$$\Gamma = \frac{I_1 - I_0}{I_1 + I_0}.$$

Strmost obrazu hrany $(I_1 - I_0)\Delta\xi$ je rovna velikosti Airyho stopy. Každá vada objektivu nebo rozostření vede k poklesu kontrastu i strmosti.

Řada biologických nebo metalografických preparátů se však vyznačuje sama o sobě malým kontrastem a přitom obsahuje řadu důležitých strukturních artefaktů, které bychom rádi zviditelnili. To znamená, že máme **vyvolat kontrast obrazu uměle**, vhodným zásahem do zobrazení.

Všechny tyto umělé zásahy se opírají o tzv. **koherentní osvětlení** předmětu, tj. jeho osvětlení rovinnou vlnou, i když prakticky se musíme spokojit s vlnou částečně prostorově koherentní, protože vlnu s nulovou divergencí neumíme vyrobit.

Mezi nejužívanější metody umělého vyvolání kontrastu patří:

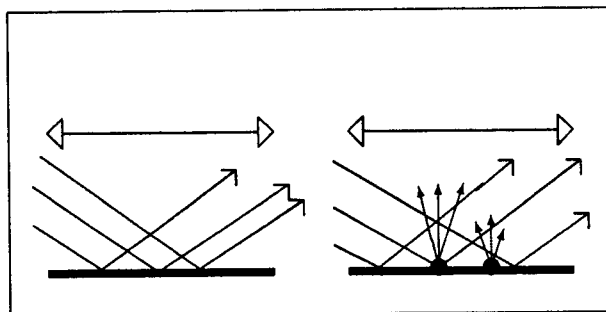
- Metoda temného pole
- Metoda fázového kontrastu
- Metoda prostorové filtrace
- Metoda interferenčního kontrastu.

V následujících odstavcích o těchto metodách pojednáme podrobněji, protože porozumět vzniku kontrastu v mikroskopu má zásadní význam pro správnou interpretaci pořízených snímků.

5.17.1 Metoda temného pole

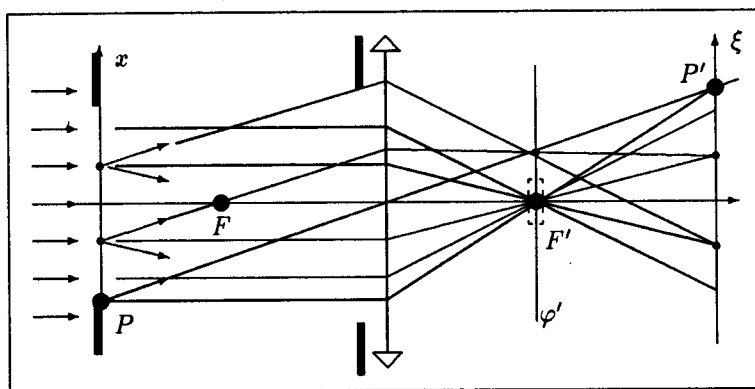
Tato metoda je založena na tom, že k vytvoření obrazu se využije jen paprsků, které předmět rozptýlil při osvětlení rovnoběžným svazkem.

Na obr.5.41 je schematicky naznačena aplikace této metody při pozorování na odraz jemných reliéfů nebo drobných částecek na povrchu jinak rovinného rozhraní.



Obr. 5.41: Aplikace metody temného pole při pozorování předmětu na odraz. Vyznačená čočka odpovídá objektivu mikroskopu, rovnoběžný svazek světla dopadá na preparát zleva a buď se na něm jen zrcadlově odráží, nebo i rozptyluje na nerovném povrchu.

Když je povrch rovinný, pak směrem do objektivu mikroskopu se neodrazí žádný paprsek a při pohledu do mikroskopu budeme vidět jen tmavé zorné pole. Jestliže je však na něm reliéf, projdou objektivem některé odražené paprsky nebo část paprsků rozptýlených částecou i menší než je vlnová délka světla. Tyto objekty se nám pak v mikroskopu budou jevit jako světlá místa na tmavém pozadí.



Obr. 5.42: Optické schéma metody temného pole na průchod. Preperát leží v rovině osy x , částečně rozptyluje rovnoběžný svazek paprsků, který na něj dopadá a zobrazuje se objektivem do roviny osy ξ . Terčík vložený do ohniska je naznačen čárkovaně a pohltí paprsky jdoucí ohniskem.

Na obr.5.42 je optické schéma metody temného pole na průchod. Rovnoběžným svazkem osvětlíme nekонтastní předmět, např. sklo. Do objektivu budou vstupovat jen rovnoběžné paprsky, které se protnou všechny v obrazovém ohnisku a pak pokračují do obrazové roviny, kde vytvářejí obraz. Když vložíme do ohniska malý terčík, tak žádný z rovnoběžných paprsků neprojde na stínítko a na stínítku bude tma.

Jestliže však předmět vlivem jemného reliéfu nebo malým částčkám na povrchu způsobí rozptyl rovnoběžného svazku, pak tyto rozptýlené paprsky terčík nepohlí, protože procházejí mimo obrazové ohnisko. Tyto rozptýlené paprsky vytvoří světlý obraz struktury povrchu na tmavém pozadí.

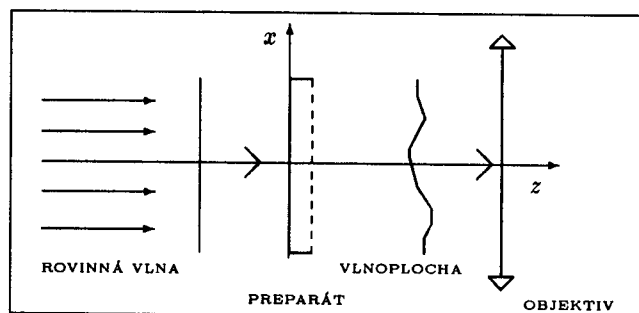
Bez terčíku budeme obraz struktury pozorovat také, ale bude se nám jevit tmavě na světlém pozadí. Tmavě proto, že malá část rozptýlených paprsků objektivem vůbec neprojde. Kontrast tohoto obrazu však bude menší než s terčíkem.

K aplikaci metody temného pole musí však být mikroskop speciálně přizpůsoben zejména tím, že se pomocným objektivem často vytváří ještě meziobraz a tím, že je třeba koherentně (rovnoběžným svazkem) osvětlit předmět.

5.17.2 Metoda fázového kontrastu

Touto metodou se dají zviditelnit velice malé změny optické dráhy rovnoběžného svazku paprsků procházejících předmětem způsobené nehomogenitou indexu lomu nebo i tloušťkou preparátu, který je zcela nekонтastní. Takový předmět se nazývá **fázový**.

Sledujme matematicky průchod rovinné vlny fázovým předmětem, jak je znázorněn na obr.5.43. Necht' fázový předmět je destička o tloušťce d a pro její index lomu platí $n(x) =$



Obr. 5.43: Rovinná vlna prochází preparátem ve tvaru destičky o tloušťce d s nehomogenním rozložením indexu lomu podél osy x . Průchodem se vlnoplocha zdeformovala.

$n_0 + \varepsilon(x)$, kde n_0 je střední hodnota indexu lomu a ε jsou jeho fluktuační. Před dopadem na destičku máme vlnu

$$\psi = E e^{i(\omega t - kz)}$$

Po průchodu budeme mít vlnu

$$\psi = E e^{i[\omega t - kz - kn_0 d - kd\varepsilon(x)]}$$

Za předpokladu, že $kd\varepsilon(x) \ll 1$ můžeme předchozí rovnici dále zjednodušit na tvar

$$\psi = E e^{i[\omega t - kz - kn_0 d]} e^{ikd\varepsilon(x)} = \psi_0 [1 + ikd\varepsilon(x)] = \psi_0 [1 + i\Phi(x)]$$

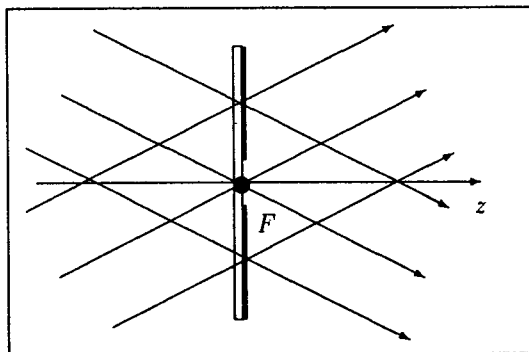
Předpokladem o malosti fázových změn jsme docílili toho, že po průchodu rovinné vlny fázovým předmětem můžeme výstupní vlnu uapsat jako **superpozici** zase rovinné vlny a druhé nehomogenní vlny, která má sice stejný fázový člen, ale jejíž amplituda teď nese informaci o nehomogenitách v předmětu.

Tyto dvě vlny projdou zobrazovací soustavou a v každém bodě obrazové roviny nastane opět jejich superpozice. Intenzita v obrazové rovině pak je

$$I(\xi) = \psi'_0 \psi_0'^* [1 + i\Phi(x)][1 - i\Phi(x)] = I_0 [1 + \Phi^2(\xi)] \approx I_0$$

Žádný významný **kontrast v obrazové rovině nevznikl**. Člen Φ^2 je velice malý oproti 1 a proto jsme jej oprávněně zanedbali.

První vlna ψ_0 však prochází ohniskem, kdežto druhá, nehomogenní vlna, prochází mimo ohnisko. Vložíme-li do ohniskové roviny čtvrt vlnou destičku, která vlny amplitudově nijak neovlivní, ale **posune fázi** nehomogenní vlny o $\pi/2$, (tzu. že nehomogenní vlnu musíme vynásobit faktorem $e^{i\pi/2} = i$), bude výsledek superpozice v obrazové rovině zcela odlišný – viz obr.5.44. Intenzita v obrazové rovině pak bude dána vztahem



Obr. 5.44: Čtvrtvlná destička vložená do ohniskové roviny objektivu, posune fázově pouze paprsky procházející obrazovým ohniskem (původně rovnoběžné) oproti paprskům jdoucím mimo ohnisko.

$$I(\xi) = \psi'_0 \psi_0'^* [1 + e^{i\pi/2} \Phi(x)][1 - ie^{-i\pi/2} \Phi(x)]$$

Po rozuásobení dostaneme

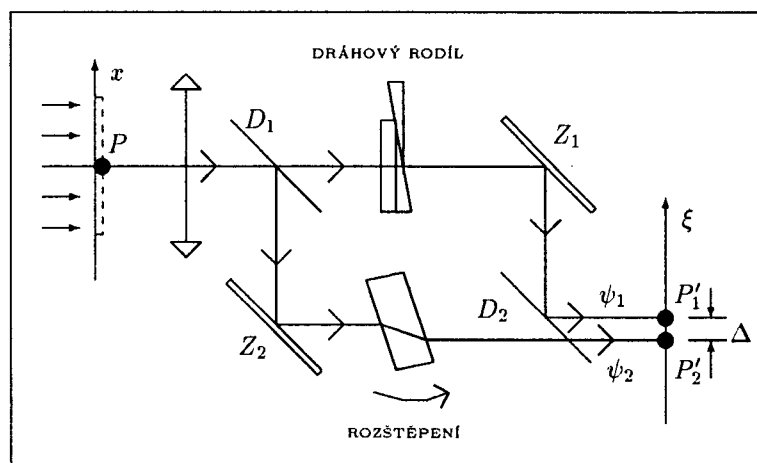
$$I(\xi) = I_0 [1 - 2\Phi(\xi) + \Phi^2(\xi)] \approx I_0 [1 - 2\Phi(\xi)]$$

Vidíme nyní, že intenzita na stínítku je již modulována funkcí popisující nehomogenity indexu lomu.

Je dobré si na závěr této analýzy si uvědomit, že zviditelnění fázového předmětu jsme dosáhli **interferencí nosné homogenní vlny a signální vlny nesoucí informaci**. Pro aplikaci této metody jsou mikroskopy speciálně upraveny, protože nastavení čtvrtvlnné destičky do ohniskové roviny musí být velice přesné a neobejde se bez meziobrazů a kvalitního osvětlení předmětu.

5.17.3 Metoda interferenčního kontrastu

Využívá se preparátů, které nemají absorpční kontrast, ale obsahují nehomogenity indexu lomu nebo nerovnosti povrchu. Tyto charakteristiky preparátu, které chceme zviditelnit, ovlivní pouze fázi rovinné vlny, kterou preparát osvětlíme. Po průchodu takovým preparátem



Obr. 5.45: Optické schéma mikroskopu s dvoupaprskovým interferometrem. Fázový rozdíl interferujících vln vzniká na planoparalelní destičce, která je sestavena ze dvou klínů a rozštěpení obrazu se docílí naklápěním skleněné destičky.

bude vlna v předmětové rovině popsána vztahem

$$\psi(x) = Ee^{-ik\Phi(x)},$$

kde časový faktor $e^{i\omega t}$ byl zahrnut do amplitudy E .

Za objektiv mikroskopu je však vložen **dvoupaprskový interferometr** (o jeho principu bude podrobněji pojednáno v následující kapitole). Paprsek vycházející z bodu P se na první polopropustné desce D_1 rozdělí amplitudově ve dva: první projde destičkou proměnné tloušťky, postupuje na zrcadlo Z_1 , odrazí se a dopadne na druhou polopropustnou desku D_2 a vytvoří obraz v obrazové rovině a druhý se odráží na zrcadle Z_2 , projde nakloněnou destičkou, projde polopropustnou deskou D_2 a vytvoří také obraz v obrazové rovině.

Přenosová funkce ideálního zobrazení je delta funkce a proto v obrazové rovině dostaneme vlnu

$$\psi_1(\xi) = A \int \psi(x) \delta(\xi - \gamma x) dx = AE e^{-ik\Phi(\xi/\gamma)}.$$

Intenzita na stínítku v každém bodě ξ bude tedy konstantní $I_0 = A^2 EE^*$. Totéž konstantní osvětlení stínítka bychom dostali, pro případ, kdy na stínítko dopadá samotný paprsek 2 a jemu odpovídající vlna ψ_2 .

Vložením nakloněné planoparalelní destičky do cesty jinak zcela souměrného interferometru docílíme toho, že vlna ψ_2 bude **posunuta ve směru osy ξ** oproti vlně ψ_1 .

$$\psi_2(\xi) = A \int \psi(x) \delta(\xi + \Delta - \gamma x) dx = AE e^{-ik\Phi((\xi+\Delta)/\gamma)},$$

kde Δ je rozštěpení obrazu pozorované okulárem (vzdálenost bodů $P'_1 P'_2$). I v tomto případě však bude intenzita na stínítku od jedné vlny ve všech bodech konstantní.

Jestliže však budou na stínítko dopadat obě vlny současně dojde mezi nimi k **interferenci**. Výsledná vlna v bodě ξ bude

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

a intenzita bude tedy dána vztahem

$$I(\xi) = I_0 [1 + 1 + 2 \cos(k\Phi((\xi + \Delta)/\gamma) - k\Phi(\xi/\gamma))].$$

Pro malý posuv obrazů Δ proti sobě **zjednodušíme** předchozí výraz tím, že funkci $\Phi(\xi + \Delta)$ rozvineme podle Taylorovy řady a omezíme se pouze na první dva členy

$$\Phi((\xi + \Delta)/\gamma) = \Phi(\xi/\gamma) + \frac{d\Phi}{dx} \frac{\Delta}{\gamma} + \dots$$

Dosažením tohoto rozvoje do předchozí rovnice dostáváme pro intenzitu výraz

$$I(\xi) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(k \frac{d\Phi}{dx} \frac{\Delta}{\gamma} \right) \right]. \quad (5.42)$$

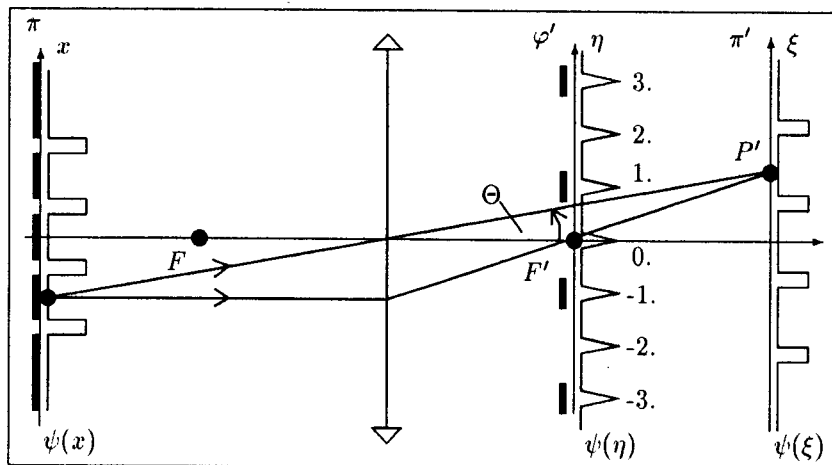
Pro $\Delta = 0$ bude intenzita na stínítku konstantní. Jakmile však začneme zvětšovat Δ , tak první kontrast se objeví v místech, kde je největší hodnota derivace fázové funkce.

Při **interpretaci interferenčního kontrastu** musíme zkoumat obraz pro různé hodnoty Δ a mít na paměti to, kosinus je periodická funkce. Interferometry vkládané do mikroskopů bývají vybaveny ještě řadou ovládacích prvků jimiž je možné měnit rozdíl optických drah obou paprsků i vyklánět paprsky z optické osy i možností pozorovat zobrazení v monochromatickém nebo bílém světle.

5.17.4 Metoda prostorové filtrace

Metoda prostorové filtrace dovoluje specifickým způsobem zasahovat do přenosové funkce optického systému tím, že do ohniskové roviny objektivu se vkládá destička, která může

ovlivňovat jak fázi tak amplitudu světla procházející skrz ni. Lze jí využít k ovlivňování kontrastu jak pro fázové preparáty, tak pro preparáty s amplitudovým kontrastem. Na jejím principu se provádějí i počítačové rekonstrukce různých vad zobrazení. Teoretický základ bývá v různých encyklopediích označován jako **Abbeova teorie zobrazování**.



Obr. 5.46: Optické schéma metody prostorové filtrace. Nepropustnou destičkou v ohniskové rovině je naznačeno vystínění lichých difrakčních maxim. Difrakční maxima jsou zakreslena jen schématicky.

Experimentální optické schéma je na obr.5.46. Její princip objasníme nejdříve obecně a pak pro jednoduchost na zobrazení optické mřížky s velice malými otvory a propustností $T(x)$. Na takové amplitudové mřížce ležící v předmětové rovině π nastává Fraunhoferova difrakce rovinné vlny. Difrakční obraz pozorujeme v obrazové ohniskové rovině φ' , jak plyne z vlastností čoček, které způsobují, že rovnoběžné paprsky z předmětového prostoru se protínají v ohniskové rovině. V obrazové rovině π' pozorujeme obraz mřížky příslušně zvětšený.

V bodě η ohniskové roviny je výsledná vlna podle difrakčního integrálu — (viz odstavec o Fraunhoferově difrakci) dána vztahem

$$\psi_f(\eta) = A_1 \int T(x) e^{ikx \sin \theta} dx = A_1 \int T(x) e^{ikx\eta/f} dx, \quad (5.43)$$

kde sinus difrakčního úhlu jsme nahradili podle paraxiálního přiblížení jen poměrem η/f .

Podle Abbeovy teorie je výsledná vlna v bodě ξ obrazové roviny dána Fraunhoferovou difrakcí vlny v ohniskové rovině. Je tedy dána integrálem

$$\psi'(\xi) = A' \int \psi_f(\eta) e^{ik\eta\xi/(f'-f)} d\eta.$$

Po dosazení z rovnice (5.43) dostaneme

$$\psi'(\xi) = AA' \int \left[\int T(x) e^{ikx\eta/f} dx \right] e^{ik\eta\xi/(f'-f)} d\eta. \quad (5.44)$$

Po úpravě máme

$$\psi'(\xi) = AA' \int \int T(x) e^{ik\eta[x/f + \xi/(t'-f)]} dx d\eta. \quad (5.45)$$

Integrací podle η dostaneme

$$\psi'(\xi) = AA' 2\pi \int T(x) \delta(x/f + \xi/(t'-f)) dx. \quad (5.46)$$

Po provedení integrace podle x pak pro výslednou vlnu dostáváme

$$\psi'(\xi) = AA' 2\pi T(-f\xi/(t'-f)). \quad (5.47)$$

Vidíme tedy, že rozložení amplitudy v obrazové rovině po dvojnásobné Fraunhoferově difrakci je úměrné funkci udávající rozložení amplitudy na předmětu. Faktor u proměnné ξ

$$-f/(t'-f) = \gamma$$

je zvětšení obrazu.

Tímto výpočtem je tedy obecně prokázáno, že **obraz vzniká** dvojnásobnou Fraunhoferovou difrakcí nebo dvojnásobnou Fourierovou transformací rozložení amplitudy na předmětu. Zvětšení obrazu, které tímto výpočtem vyšlo, je shodné se zvětšením plynoucím z geometrické optiky.

Nyní budeme tento obecný výpočet aplikovat na konkrétní zobrazení naší optické mřížky. Označme d příslušnou mřížkovou konstantu. Veličinu $\Omega = 1/a$ můžeme označit za **prostorovou frekvenci optické mřížky**. Z kapitoly o Fraunhoferově difrakci na mřížce víme, že difrakční maxima j -tého řádu nastávají při difrakčním úhlu θ_j , přičemž platí

$$d \sin \theta_j = j\lambda.$$

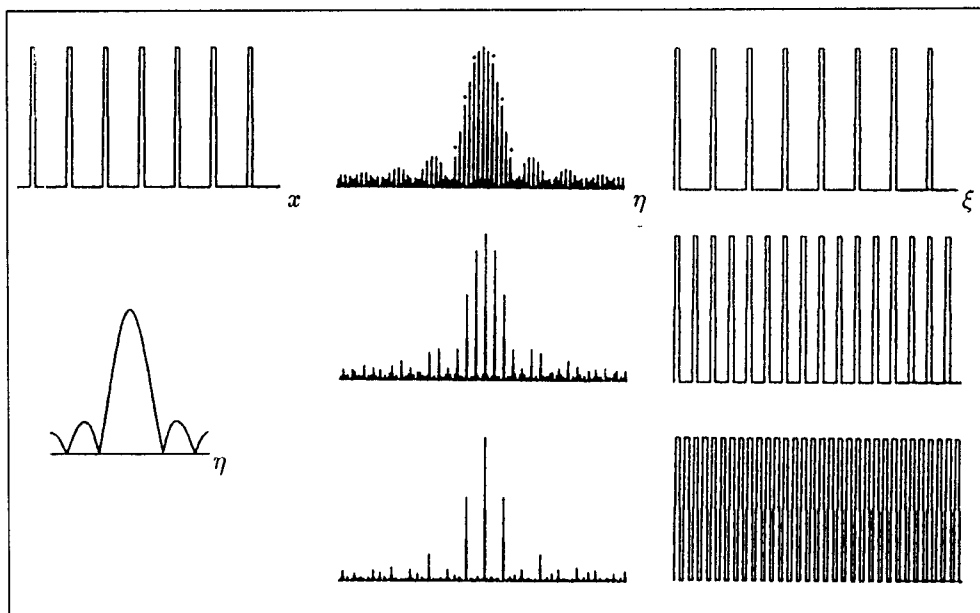
Odtud v aproximaci paraxiálního přiblížení dostáváme, že nastávají v bodech

$$\eta_j = \lambda \frac{j}{d} = \lambda j \Omega.$$

Čím větší je prostorová frekvence Ω , tzn. čím blíže jsou difrakční otvory, tím ve větší vzdálenosti od optické osy leží příslušné difrakční maximum. K přenosu jemností z předmětu na obraz, tj. k přenosu vysokých frekvencí předmětu, je třeba propustit v ohniskové rovině co největší oblast okolí optické osy.

Co se stane s obrazem mřížky, když ohniskovou rovinou **propustíme jen některá difrakční maxima** je názorně vidět na obr. 5.47. Když projdou všechna maxima, je obraz stejný jako předmět. Při propuštění jen sudých difrakčních maxim (v 1. řádku jsou označena křížkem) vykazuje obraz dvojnásobnou hustotu difrakčních otvorů, při propuštění jen každého čtvrtého maxima obraz mřížky obraz mřížky vykáže další zdvojnásobení difrakčních otvorů. Kdybychom nechali procházet jen nulté difrakční maximum tak dostaneme přibližně rovnoměrně osvětlené obrazové stínítko a po obrazu mřížky nebude ani stopy.

Toto ovládání obrazu prostřednictvím vystínění některých difrakčních maxim v ohniskové rovině odpovídá **filtraci prostorových frekvencí** předmětu pomocí optického zobrazení.



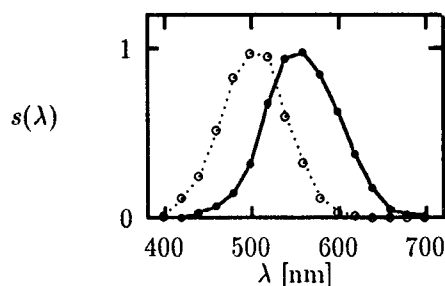
Obr. 5.47: V levém sloupci a 1. řádku je rozložení amplitudy těsně za optickou mřížkou, v prostředním sloupci je rozložení amplitudy v ohniskové rovině a v pravém v obrazové rovině. V prvním sloupci uprostřed je detail jednoho difrakčního maxima v ohniskové rovině (v prostředním sloupci se jeví velice ostře).

Tak např. **strmost zobrazení intenzitních hran** na předmětu bude klesat, když do ohniskové roviny budeme vkládat kruhové clouky o stále menším a menším průměru. Pokud bychom do ohniska vkládali stále užší a užší štěrbinu pak poklesne strmost zobrazení pouze ve směru kolmém na štěrbinu.

5.18 Fotometrie

Tato oblast optiky úzce souvisí jednak s vnímáním světla lidským okem, jednak s vlastnostmi zdrojů světla, jejichž spektrum EM vln je mnohem širší, než je oblast, na kterou je citlivé naše oko. Naše oko je uzpůsobeno ke vnímání slunečního světla, a proto při osvětlování místností umělým osvětlením se snažíme toto napodobit, jak co do spektrálního složení, tak co do vhodné intenzity. K řešení těchto úloh slouží fotometrie.

Ústřední postavení v této oblasti má proto **spektrální citlivost lidského oka** $s(\lambda)$, jako experimentální fakt, který je výsledkem rozsáhlého lékařského výzkumu. Graficky je tato citlivost znázorněna na obr.5.48. Plná křivka odpovídá citlivosti při denním osvětlení a čárkovaná křivka při osvětlení asi 500x menším. Vidíme, že maximum spektrální citlivosti závisí na intenzitě osvětlení. Za soumraku, kdy intenzita osvětlení krajiny klesá, jeví se modrá barva jasnější, než červená. Na tento jev poprvé upozornil v minulém století J. E. Purkyně a je po něm i pojmenován.



Obr. 5.48: Spektrální citlivost lidského oka normovaná v maximum na 1. Plná čára odpovídá citlivosti při denním osvětlení, tečkovaná při osvětlení asi 500x menším.

Experimentální křivku citlivosti oka lze dobře aproximovat funkcí

$$s(\lambda) = e^{-[(\lambda_0 - \lambda)/\Delta\lambda]^2}, \quad (5.48)$$

kde $\lambda_0 = 555 \text{ nm}$ a $\Delta\lambda = 60 \text{ nm}$.

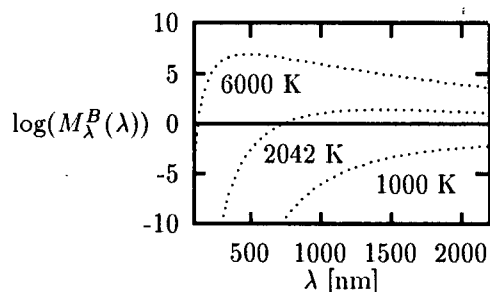
Světlo elektrických žárovek můžeme dobře fyzikálně popsat jako **záření černého tělesa**. Spektrální hustotu intenzity vyzařování připadající na jednotku plochy zdroje a jednotku vlnového intervalu $\Delta\lambda$ tohoto zdroje popisuje **Planckův zákon**

$$M_\lambda^B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/kT\lambda} - 1)}, \quad (5.49)$$

kde vystupují kromě absolutní teploty T jen univerzální fyzikální konstanty. Když za ně dosadíme číselné hodnoty, dostaneme

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{3.7415 \cdot 10^{-16}}{\lambda^5 (e^{0.014388/T\lambda} - 1)} \quad [\text{Wm}^{-3}, \text{m}, \text{K}]. \quad (5.50)$$

Na obr.5.49 je vynesena logaritmus funkce $M_\lambda^B(\lambda) \cdot 10^{16}$ pro viditelnou a blízkou infračervenou



Obr. 5.49: Graf vyzařování černého tělesa ve viditelné a blízké infračervené oblasti pro tři různé teploty přibližně odpovídající slunečnímu světlu ($T = 6000 \text{ K}$), teplotě tání platiny ($T = 2042 \text{ K}$) a do červené barvy rozežhřátým kamnům ($T = 1000 \text{ K}$).

oblast EM záření. Vidíme, že čím je těleso chladnější, tím vyzařovaný výkon ve viditelné oblasti silně klesá a maximum vyzařování se posunuje k větším vlnovým délkám.

Integrací Planckova zákona přes všechny vlnové délky obdržíme tzv. **Stefan – Boltzmannův vyzařovací zákon**

$$M^B(T) = \int_0^\infty M_\lambda^B(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4, \quad (5.51)$$

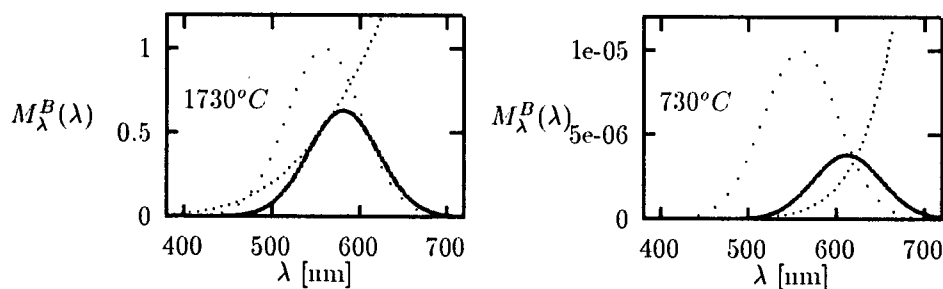
kde $\sigma = (2\pi^5 k^4)/(15h^3 c^2) = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ [Wm}^{-2}\text{K}^{-4}\text{]}$. Tento i Planckův zákon je velice významným výsledkem kvantové fyziky. Vyjadřuje, jak závisí výkon vyzářené EM energie z jednotkové plochy zdroje na teplotě, jinými slovy řečeno udává tok tepelné energie plochou zdroje, který černé těleso přemění v EM záření.

Pro názornou představu vypočteme podle rovnice 5.51 výkon, který vyzáří černé těleso o ploše 1 mm^2 při teplotách 3000 K, 2000 K a 1000 K. Dostaneme 4.4, 0.8 a 0.5 Wmm^{-2} . Tyto hodnoty však zdaleka neodpovídají toku vyzářené **světelné** energie, kterou chápeme jako tu část EM záření, na kterou je citlivé naše oko. Ta je přirozeně mnohonásobně menší, protože lidské oko je citlivé jen na malou oblast EM záření.

Světelný, nebo též **fotometrický** výkon záření černého tělesa $M_s^B(T)$ vypočtenie podle vztahu

$$M_s^B(T) = \int_0^\infty s(\lambda) M_\lambda^B(\lambda) d\lambda, \quad (5.52)$$

kde $s(\lambda)$ je citlivost lidského oka.



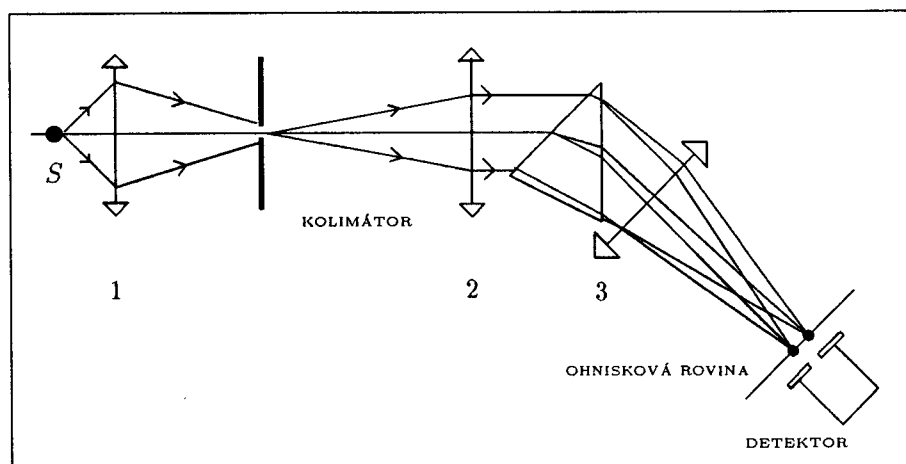
Obr. 5.50: Na každém obrázku je tečkovaně znázorněna spektrální citlivost oka $s(\lambda)$ a spektrální intenzita vyzařování černého tělesa $M_\lambda^B(\lambda) \cdot 10^{16}$ a plně jejich součin.

Plná křivka na obr.5.50 vymezuje část spektra EM záření černého tělesa, na něž reaguje lidské oko. Vidíme, že s klesající teplotou takového zdroje se posouvá maximum EM záření do červené oblasti a vyzářený výkon silně klesá s teplotou. Do červené barvy rozpálená kamna za denního světla nevidíme, ale jejich temně tmavou červenou barvu pozorujeme potmě, když už se naše oči dostatečně akomodovaly. Po 30 min. pobytu ve tmě se zvýší citlivost našich očí až o 7 řádů.

Reálné tepelné zdroje, jako jsou vlákna žárovek apod., mají vyzářený výkon vždy menší o faktor $\varepsilon < 1$, který závisí na materiálu vlákna a úpravě povrchu.

K osvětlování však používáme řadu světelných zdrojů založených na jiných principech generace světla, než jsou tepelné zdroje. Jsou to zejména zářivky a nejrůznější výbojky, jejichž společným jmenovatelem je to, že mají vyšší účinnost přeměny elektrické energie ve světelnou, ovšem často za cenu velice odlišného spektrálního složení než má sluneční světlo.

Experimentální stanovení spektrální hustoty intenzity $M_\lambda(\lambda)$ pro tyto zdroje je velice složitý a technicky náročný problém. Jedná se totiž o absolutní měření toku světelné energie, který přísluší malému spektrálnímu oboru $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Principiální schéma takového



Obr. 5.51: Schéma spektrometru.

zařízení je na obr.5.51. Zdroj světla se zobrazí na úzkou štěrbinu kolimátoru, z něhož dopadají rovnoběžné paprsky na hranol (nebo difrakční mřížku), který způsobí, že odchylka od přímého směru závisí na vlnové délce. Za hranolem následuje čočka, v jejíž ohniskové rovině se vytvoří každou vlnovou délkou obraz vstupní štěrbiny. Polohou štěrbiny před detektorem (obvykle mikrok calorimetr) a její šířkou se pak vymezí měřený spektrální obor λ a $\Delta\lambda$.

Aby bylo možné hospodárně a přitom objektivně posuzovat světelný, tj. fotometrický, výkon zdrojů světla určených pro osvětlování místností a pro podobné účely, používá se v praxi podstatně jednodušších postupů založených na fotometrických veličinách, než je výše uvedený. V soustavě jednotek SI se tyto veličiny odvozují od **svítivosti bodového zdroje** J_n , jejíž jednotkou je **candela**.

Svítivost bodových zdrojů světla J_s se porovnává s normálem svítivosti J_n vizuálně pomocí tzv. **fotometrů**. Zpravidla spočívají na porovnávání osvětlení dvou ploch. **Fotometrické osvětlení** L_s plochy od bodového zdroje o svítivosti J_s je dáno vztahem

$$L_s = \frac{J_s \cos \Theta}{r^2},$$

kde r je vzdálenost bodového zdroje od osvětlované plochy a Θ je úhel mezi směrem dopadu světla na plochu a její normálou. Osvětlení jedné plochy ve fotometru od normálového

zdroje o svítivosti J_n bude stejné s osvětlením druhé plochy od zdroje o neznámé svítivosti J_s , když bude platit

$$L_s = \frac{J_n}{r^2} = \frac{J_s}{R^2},$$

kde r a R jsou vzdálenosti ploch od příslušných bodových zdrojů. V principu se osvětluje průsvitný papír s mastnou skvrnou vloženým mezi oba zdroje. Posunujeme papírem do takové polohy, až nerozpoznáme skvrnu od okolí. Pak je osvětlení papíru od obou zdrojů stejné. Místo papíru se však v komerčních fotometrech používá Lummerova kostka.

Pro tyto praktické účely, byly zavedeny fotometrické jednotky (soustava SI):

1 candela [cd] — pro svítivost bodového zdroje J_n . Je to 1/60 svítivosti černého tělesa o ploše 1cm^2 při teplotě tání platiny. Pomocí Planckova zákona bychom mohli napsat, že

$$1 \text{ cd} = \frac{1}{60} \frac{\Delta S}{2\pi} \int_0^\infty s(\lambda) M_s^B(\lambda, 2042\text{K}) d\lambda,$$

kde $\Delta S = 1\text{cm}^2$. Aby bylo možné považovat tento normál svítivosti za bodový, doporučuje se porovnávat osvětlení až ve vzdálenosti 20x větší, než je lineární rozměr zdroje.

1 lumen [lm] — pro světelný tok $\Delta\Phi_s = J_s \Delta\omega$, [1lm=cd sr].

1 lm je světelný tok, který vysílá bodový zdroj o svítivosti 1 cd do prostorového úhlu 1 steradián.

1 lux [lx] — pro osvětlení $L_s = \Delta\Phi_s/\Delta S$, [lx = lm/m²].

1 lx je kolmé osvětlení plochy 1m^2 , když na ni dopadá světelný tok 1 lm. Osvětlení se měří komerčně vyráběnými přístroji, tzv. **luxmetry**, které jsou cejchovány přímo v luxech.

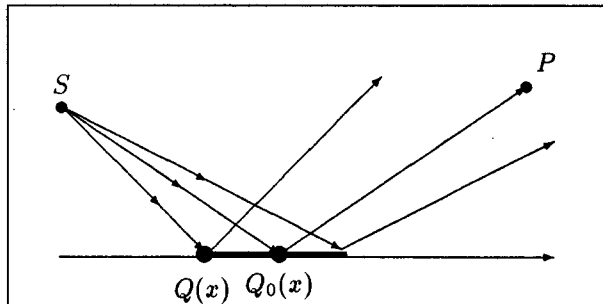
Problematika hodnocení a popisu světelných zdrojů, ať již primárních nebo sekundárních, jako jsou např. silně rozptylující skla osvětlovaná žárovkou, je značně složitá a neobejde se bez experimentálně stanovených veličin jako jsou **spektrální a směrová odrazivost, propustnost, absorpce či emisivita vzhledem k černému tělesu**. Detailnější pojednání o těchto praktických otázkách fotometrie přesahuje úvod do optiky ve studiu fyziky.

Kapitola 6

Interference světla

6.1 Interference a geometrická optika

Název tohoto odstavce už napovídá, že se sice budeme zabývat interferencí světla, ale pouze v rámci geometrické optiky. Interferenčními jevy budeme rozumět jevy, způsobené **superpozicí dvou nebo více světelných svazků**. Několika poznámkami se pokusíme objasnit, do kterých aspektů našich úvah se promítne to, že se pohybujeme v aproximaci geometrické optiky, a nikoliv vlnové optiky.



Obr. 6.1: Odraz světla na části rovinného rozhraní dvou prostředí podle aproximace geometrické optiky.

Při sledování šíření světla nebudeme používat H-F principu, ale pouze principů geometrické optiky. Co to znamená, objasníme stručně na příkladu šíření světla ze zdroje S do bodu P odrazem na rozhraní dvou prostředí, jak je znázorněno na obr.6.1.

Podle vlnové optiky, tj. podle H-F principu bychom výslednou vlnu v bodě P počítali tak, že bychom vzali v úvahu vlnový příspěvek do tohoto bodu od každé sekundární vlny šířící se z každého bodu Q na povrchu rozhraní. Amplitudu sekundární vlny bychom vynásobili koeficientem odrazivosti rozhraní $r(x)$, který jak víme, závisí na úhlu dopadu a tedy na x . Byl by to tedy výpočet velice složitý.

$$\psi(P) = \int \frac{r(x)}{SQ \cdot QP} e^{i[\omega t - k(SQ + QP)]} dx .$$

Podle aproximace geometrické optiky plyne, že do bodu P se ze zdroje S dostane jen jeden paprsek, který vyhovuje Fermatovu principu, tj. Snellovu zákonu odrazu na rozhraní. Vlnový stav v bodě P určí odrazivost rozhraní v bodě Q_0 a fázový člen určí celková optická dráha paprsku z bodu S přes bod Q_0 do bodu P .

$$\psi(P) = r(Q_0) E e^{i[\omega t - k(SQ_0 + Q_0P)]} .$$

Výpočty podle pravidel geometrické optiky budou tím lépe odpovídat experimentům, čím širší svazky světla budeme užívat.

Při výkladu těchto pasáží v různých knihách dochází k částečnému promíchání pojmů vlnové a geometrické optiky. Mezi nimi lze vyzorovat při šíření světla v homogenním izotropním prostředí následující korespondenci:

- Šíření rovinné vlny odpovídá šíření paprsku světla.
- Vlnový stav (fáze) v bodě P je podle geometrické optiky stejný, jako když se stejnou optickou cestou šíří rovinná vlna.
- Amplituda vlnového stavu v bodě P je podle pravidel geometrické optiky stejná, jakou by v tomto bodě měla rovinná vlna.

Tato korespondence významu pojmů je tak jednoznačná, že i v následujících odstavcích budeme používat ty, jimiž se nám bude situace lépe popisovat.

6.2 Rozdělení interferenčních jevů

Množina interferenčních jevů je velice početná. Je to tím, že jde o oblast, která má velice mnoho významných technických aplikací. Např. tam kde nestačí svými možnostmi běžná technická měřidla vzdáleností a tloušťek, tam nastupují interferometry a interferenční jevy, které to navíc dokáží bez mechanického dotyku s měřeným objektem.

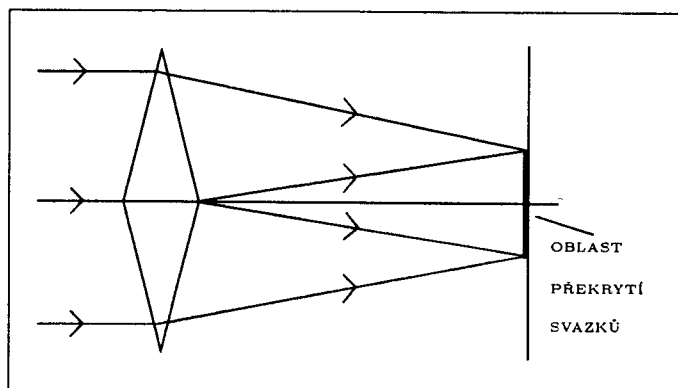
Na celou množinu interferenčních jevů můžeme aplikovat několik kritérií a podle nich je rozřídít.

Podle počtu interferujících světelných paprsků:

- **Dvoupaprsková interference** – např. interference na slabě odrážejících tenkých vrstvách, Michelsonův a Jaminův interferometr, Fresnelova zrcadla a biprizma, aj..
- **Mnohapaprsková interference** – např. interference na silně odrážejících tenkých vrstvách, interferenční filtry, Fabryův -Perotův interferometr, optický rezonátor laserů, aj.

Podle vzniku interferujících vln (svazků):

- **Dělení amplitudy** – odrazem a lomem z jednoho primárního svazku světla na rozhraní vzniknou dva svazky, jejichž optické dráhy pomocí různých optických zařízení změním tak, aby se zase prostorově překrývaly. Např. interference na tenkých vrstvách, Michelsonův a Jaminův interferometr.
- **Dělení vlnoplochy** – průchodem jedné vlny např. přes Fresnelovo biprizma vzniknou dvě vlny, jejichž dráhy se v prostoru alespoň částečně překrývají a tam pak dochází k interferenci - viz obr.refo143.



Obr. 6.2: Průchod rovnoběžného svazku světla přes Fresnelovo biprizma. Interference nastane pouze v místech, kde se oba svazky prostorově překrývají.

Podle způsobu pozorování interferenčního jevu:

- **Pomocí čoček** – interferenční jev pozorujeme pomocí spojky v ohniskové nebo obrazové rovině. Čočka nám v konečné fázi zajistí překrytí interferujících svazků.
- **Na stínítku** – k překrytí interferujících svazků dojde na stínítku bez použití čoček nebo lidského oka.

Interferenční jevy se vyznačují typickým střídáním míst s maximální a minimální intenzitou tvořící pruhované osvětlení stínítka.

Podle fyzikálního významu geometrického místa bodů stejné intenzity

- **Proužky stejné tloušťky** – klínové vrstvy, Newtonova skla.
- **Proužky stejného sklonu** – na tenkých vrstvách při použití divergentního dopadajícího svazku.

Naším úkolem nebude pojednat o každém interferenčním jevu či interferometru, ale na několika typických příkladech ukázat, jak problémy interference analyzovat a případně poukázat na jejich významnou aplikaci.

6.3 Interference a koherence světla

Z výkladů difrakčních jevů víme, že časově stálý interferenční jev nastane pouze superpozicí koherentních vln, tj. svazků koherentních paprsků. Přitom rovinná vlna odpovídá svazku rovnoběžných paprsků a kulová vlna svazku divergentních paprsků.

Pro potřeby analýzy interferenčních jevů zopakujme závěry o koherenčních vlastnostech světla, k nimž jsme dospěli v souvislosti s difrakčními jevy.

Prostorová koherence

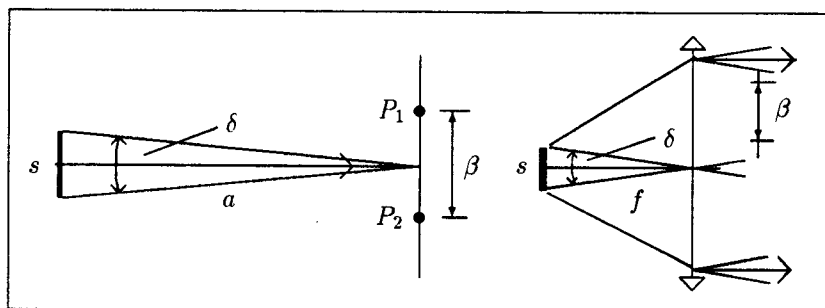
Souvisí s tím, že zdroje světla mají konečnou velikost a charakterizujeme ji **koherenční šířkou** β . Ta odpovídá vzdálenosti dvou bodů P_1 a P_2 na vlnoploše, která je určena velikostí zdroje světla a jeho vzdáleností od místa, kde dochází k interferenci. – viz obr.6.3. Při šíření světla přímo ze zdroje platí

$$\beta = \lambda \frac{a}{s} .$$

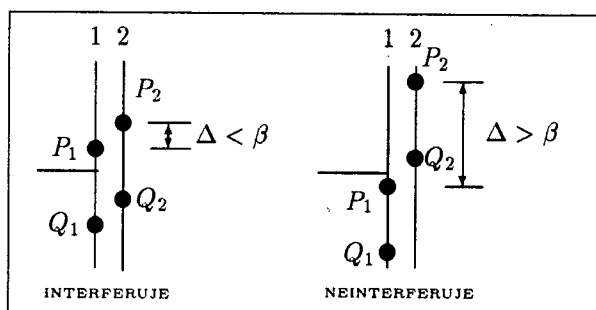
Při vytvoření rovnoběžného svazku čočkou platí

$$\beta = \lambda \frac{f}{s} = \lambda \delta ,$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky a δ je divergence vytvořeného svazku. Při průchodu vlny zobrazovací soustavou se koherenční šířka chová stejně, zvětšuje se a zmenšuje, jako by šlo o zobrazovaný předmět. Interferenční jev vznikne jen tehdy, když příčné posunutí vlnoploch Δ bude menší než koherenční šířka β — viz obr.6.4. S rostoucím Δ klesá viditelnost interferenčního jevu.



Obr. 6.3: Určení koherenční šířky při šíření světla přímo ze zdroje a přes čočku.



Obr. 6.4: K objasnění významu koherenční šířky při interferenci dvou vln vzniklých z jedné primární vlny dělením čela vlny. Vlnoplochy interferujících vln jsou navzájem posunuty o Δ .

Koherenční šířka odpovídá vždy jen tomu směru napříč svazkem, ve kterém měříme velikost plošného zdroje s .

Tak např. aby došlo k interferenci svazků podle obr.6.1, musí koherenční šířka být větší než je šířka primárního svazku dopadajícího na Fresnelovo biprízma.

Časová koherence

Souvisí s nemonochromaticností zdroje a charakterizujeme ji **koherenční délkou**.

$$l_2 - l_1 < \delta = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

Dráhový rozdíl **optických drah** interferujících svazků nesmí být větší než koherenční délka δ . Optická dráha je přitom součin geometrické dráhy a příslušného indexu lomu.

Při odhadech koherenční délky musíme mít na paměti **vliv čoček a zobrazování na koherenční délku**. Tak např. rovnoběžný svazek paprsků procházející čočkou se protíná v jednom bodě ohniskové roviny. Této vlastnosti spojky často využijeme. Geometrická dráha každého paprsku je různá, ale optická dráha všech paprsků je stejná. Podobné tvrzení platí i pro paprsky šířící se z předmětu do obrazu.

Při vizuálním pozorování interference bílého světla pozorujeme často barevné interferenční proužky. Díky barevnému vidění nám někdy selhávají odliady časové koherence, zdá se nám, že je větší. Odliady platí jen pro detektory světla se stejnou spektrální citlivostí v celém použitém oboru vlnových délek.

Tyto koherenční vlastnosti světelných vln nám významně pomohou při analýze interferenčních jevů tím, že nám umožní opticky složitou situaci podstatně zjednodušit. Toto zjednodušení bude spočívat v tom, že budeme užívat rovinných nebo kulových vlnoploch (rovnoběžných nebo divergentních paprsků) monochromatického světla a zvláště budeme diskutovat splnění podmínek časové a prostorové koherence.

Kvalitu interferenčního jevu posuzujeme jako u difrakce pomocí veličiny **viditelnost**, která byla definována již dříve. Viditelnosti se užívá u hvězdářského interferometru k měření průměru hvězd a u Michelsonova interferometru k přesnému měření profilu spektrálních čar - **Fourierova spektroskopie**.

6.4 Tvar interferenčních proužků

Tvar interferenčních proužků je dán tvarem interferujících vlnoploch. Tvar vlnoplochy je dán zdrojem a mění se optickou soustavou na rovinnou nebo kulovou o jiném poloměru křivosti. Odrazem nebo průchodem rovinné vlny na křivém povrchu se do ní otiskne jistým způsobem reliéf povrchu nebo při přechodu i nehomogenity indexu lomu. Tohoto jsme již využili při analýze vzniku kontrastu u mikroskopických obrazů.

U interferometrů se však setkáme pouze s několika jednoduchými případy:

1. Interference rovinných vln

2. Interference kulových vln

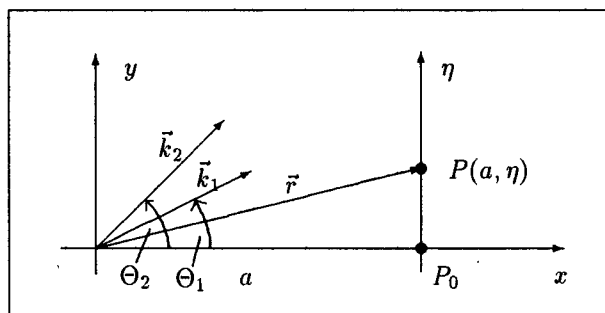
- (a) stínítko leží kolmo na spojnici bodových zdrojů
- (b) stínítko leží rovnoběžně se spojnicí bodových zdrojů.

6.4.1 Interference rovinných vln

Předpokládejme, že se v prostoru šíří dvě rovinné monochromatické vlny o vlnových vektorech $\vec{k}_1 = k(\cos \Theta_1, \sin \Theta_1)$ a $\vec{k}_2 = k(\cos \Theta_2, \sin \Theta_2)$. Souřadnou soustavu pro popis superpozice zvolme tak, že osa y i osa η leží v rovině určené těmito vektory - viz obr. 6.5. Necht' jednotlivé vlny jsou v bodě $P(\vec{r})$ dány rovnicemi

$$\psi = A_1 e^{i[(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) + \phi_1]}$$

$$\psi = A_2 e^{i[(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) + \phi_2]},$$



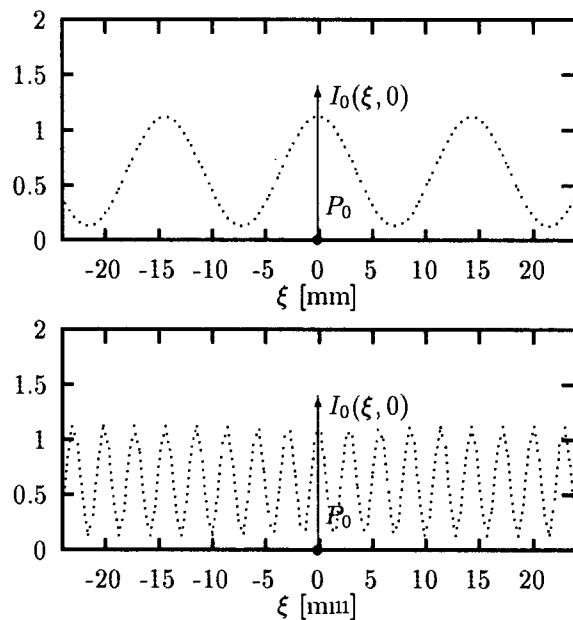
Obr. 6.5: Volba souřadné soustavy pro popis interference dvou rovinných vln.

kde ϕ_1 a ϕ_2 jsou fáze vln pro $x = 0$ a $t = 0$. Jejich superpozicí vznikne na stínítku interferenční jev, jehož intenzita je dána rovnicí

$$I(\eta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k[\eta(\sin \Theta_1 - \sin \Theta_2) + a(\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2) + (\phi_1 - \phi_2)/k],$$

kde za vektor \vec{r} byly dosazeny jeho souřadnice (a, η) . Rozložení intenzity na stínítku odpovídá symetrii problému. Je zřejmé, že rovina xy je rovinou symetrie a proto na stínítku bychom pozorovali interferenční proužky kolmé na osu η .

Rozložení intenzity na ose η pro dvě dvojice interferujících vln jsou na obr.6.6. Aby

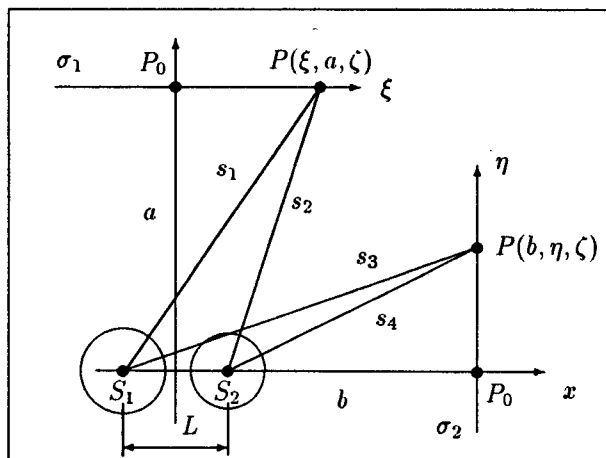


Obr. 6.6: Rozložení intenzity na ose η při interferenci dvou rovinných vln. Dolní graf: $A_1 = 1, A_2 = .5, \Theta_1 = 1^\circ, \Theta_2 = (1 + .02)^\circ$, Horní graf: $\Theta_1 = 1^\circ, \Theta_2 = (1 + 0.002)^\circ$.

interferenční proužky na stínítku nebo v pozorovací rovině interferometru měly vzdálenosti řádu 1mm, pak mezi vlnovými vektory musí být úhel řádově $1e-4$ rad.

6.4.2 Interference kulových vln

Předpokládejme, že na stínítku dochází k interferenci dvou kulových monochromatických vln. První je generována bodem S_1 a druhá bodem S_2 – viz obr.6.7. Interferenci pozorujeme buď na stínítku σ_1 , nebo na stínítku σ_2 . Pro jednotlivé dráhy paprsků do pozorovacích bodů



Obr. 6.7: Volba souřadné soustavy a dvou stínítek pro popis interference dvou kulových vln. Osa ζ je kolmá na rovinu obrázku.

platí:

$$s_1 = \sqrt{a^2 + (L/2 + \xi)^2 + \zeta^2}$$

$$s_2 = \sqrt{a^2 + (L/2 - \xi)^2 + \zeta^2}$$

$$s_3 = \sqrt{(b + L/2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$s_4 = \sqrt{(b - L/2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Intenzita na stínítku σ_1 se souřadnou soustavou ξ, ζ je pak dána vztahem

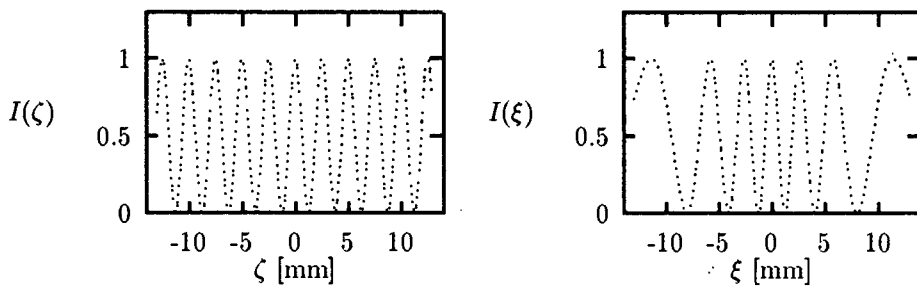
$$I(\xi, \zeta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k(s_1 - s_2) + \phi].$$

Geometrické místo bodů stejné intenzity v okolí bodu P_0 odpovídá soustavě proužků rovnoběžných s osou ζ . Rozložení intenzity podél osy je na obr.6.8. První graf jen vypočten pro reálnou optickou situaci, rozložení interferenčních proužků je pravidelné a je shodné se situací, kdy interferují rovinné vlny. Tento výsledek je ve shodě s očekáváním, protože ve velké vzdálenosti je možné aproximovat kulové vlnoplochy rovinami.

Druhý graf na obr.6.8 je vypočten pro vzdálenost stínítka jen 10mm od uvažovaných bodových zdrojů. Vidíme, že vzdálenost mezi interferenčními proužky již není ekvidistantní.

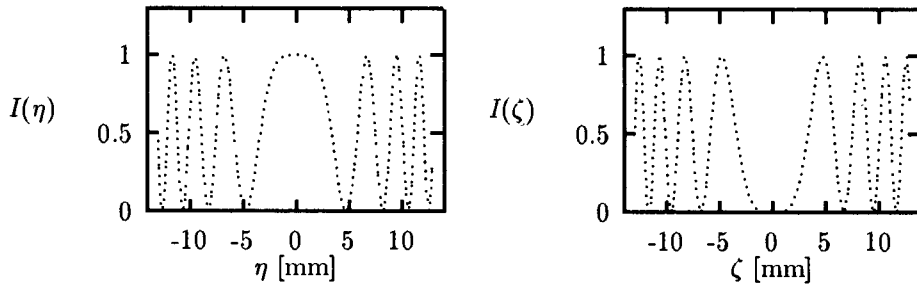
Intenzita na stínítku σ_2 se souřadnou soustavou η, ζ je pak

$$I(\eta, \zeta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k(s_3 - s_4) + \phi].$$



Obr. 6.8: Rozložení intenzity na stínítku σ_1 , které je rovnoběžné se spojnicí bodových zdrojů kulových vln o $\lambda = 0.5\mu\text{m}$. Levý graf odpovídá hodnotám $a = 1\text{m}$, $L = 0.2\text{mm}$ a pravý hodnotám $a = 10\text{mm}$ a $L = 0.002\text{mm}$.

Geometrické místo bodů stejné intenzity v okolí bodu P_0 odpovídá soustavě soustředných kružnic. Rozložení intenzity podél osy η je na obr.6.9. Z tohoto obr. je zřejmé, že inter-



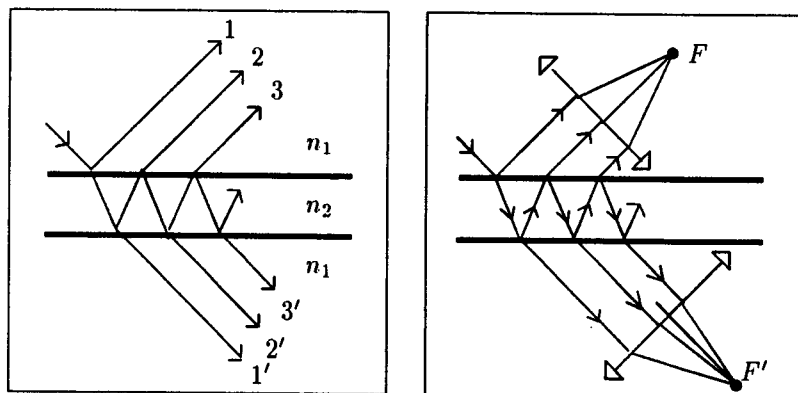
Obr. 6.9: Rozložení intenzity na stínítku σ_2 , které je kolmé se spojnicí bodových zdrojů kulových vln o $\lambda = 0.5\mu\text{m}$. Výpočet prvního grafu byl proveden pro $b = 300\text{mm}$, $L = 1\text{mm}$ a ruého pro $L = 1\text{mm} + \lambda/4$.

ferenční kroužky mají různou šířku a že intenzita v bodě P_0 je velice citlivá na vzdálenost L . Na této vlastnosti jsou založeny interferometry užívané k přesnému měření délkových veličin s přesností desetin vlnové délky i lepší.

6.5 Interference na planparalelní vrstvě

Dopadá-li svazek paprsků (rovinná vlna) na planparalelní vrstvu, odráží se na horním rozhraní a současně se lomí, pak se odráží a lomí na spodním rozhraní a zase se odráží a lomí na horním rozhraní, atd. – viz obr.6.10. Odražené i lomené paprsky jsou navzájem rovnoběžné a nemůže tedy nastat jejich superpozice v jednom bodě. Aby se tak stalo, musíme použít spojky a tím je soustředit do ohniska, kde tedy již nastane jejich superpozice a kde již můžeme pozorovat interferenční jev.

Jestliže je odrazivost obou rozhraní $R \ll 1$, pak třetí a další paprsky mají již zanedbatelně

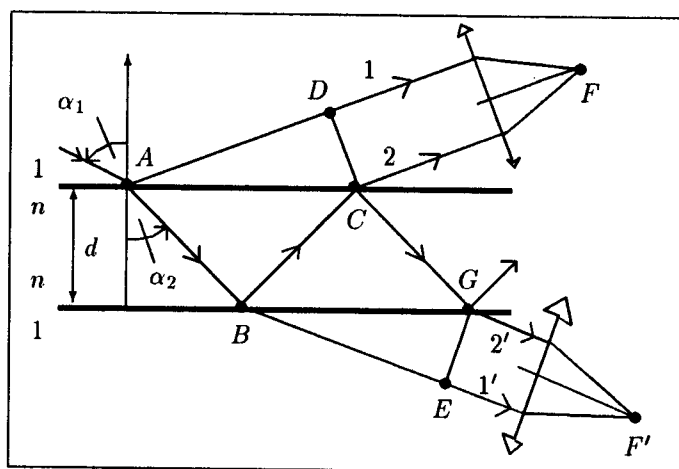


Obr. 6.10: Mnohonásobný odraz a lom paprsku na planparalelní vrstvě.

malou amplitudu a mluvíme o **dvoupaprskové interferenci**. Při odrazivosti $R = 0.1$ a větší, nelze již třetí a další paprsky zanedbat a je třeba počítat s **mnohapaprskovou interferencí**. Toto kritérium není samozřejmě obecné, ale závisí na požadované přesnosti výpočtu.

6.5.1 Dvoupaprsková interference

Předpokládejme, že na planparalelní desku tloušťky d o indexu lomu n dopadá ve vakuu rovinná monochromatická vlna – viz obr.6.11.



Obr. 6.11: Optické schéma interference rovinné vlny na planparalelní vrstvě v situaci na odraz i na průchod.

Předpokládejme, že v bodě dopadu A je tato vlna popsána rovnicí

$$\psi(A) = Ue^{-ikx},$$

to znamená, že faktor $e^{i\omega t}$ jsme zahrnuli do amplitudy U . Vzhledem k tomu, že fyzikální význam má jen reálná část tohoto zápisu vlny a to je sudá funkce, budeme pro jednoduchost v exponentu používat znaménko plus a ne minus, jak by vycházelo z dosavadního zavedení. V ohnisku F je tato vlna po odraze na horním rozhraní dána výrazem

$$\psi_1(F) = r_1 U e^{ik(x+AD+s)} = |r_1| e^{i\delta_1} U e^{ik(x+AD+s)},$$

kde s je optická dráha tohoto paprsku z bodu D do bodu F , r_1 je koeficient odrazivosti horního rozhraní ($1 \rightarrow n$) a δ_1 je fázový posuv způsobený odrazem.

Protože koeficienty odrazu a fázový posuv závisí na **polarizaci dopadající vlny**, je třeba v tomto smyslu doplnit náš předpoklad o dopadající vlně. V případě, že má s nebo p -polarizaci, je třeba za Fresnelovy koeficienty dosadit příslušné hodnoty. Při dopadu nepolarizované vlny, je třeba provést celý výpočet pro každou polarizaci a pak výsledné intenzity v bodě F sečíst a dělit 2.

Vlnový stav paprsku odrážejícího se na spodní rozhraní je v bodě F dán výrazem

$$\psi_2(F) = t_1 r_2 t_2 U e^{ik(x+nAB+nBC+s)} = |t_1 r_2 t_2| e^{i\delta_2} U e^{ik(x+nAB+nBC+s)},$$

kde t_1 odpovídá koeficientu propustnosti rozhraní ($1 \rightarrow n$) a t_2 a r_2 koeficientu odrazivosti rozhraní ($n \rightarrow 1$). Intenzita v bodě F je pak dána výrazem

$$I_r(F) = (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)^*.$$

Po provedení této operace dostaneme

$$I_r(F) = U^2[|r_1|^2 + |r_2 t_1 t_2|^2 + 2|r_1||r_2 t_1 t_2| \cos(\delta_2 - \delta_1 + k(nAB + nBC - AD))].$$

Z geometrické situace chodu paprsků vrstvou plyne

$$nAB + nBC - AD = 2nd \cos \alpha_2.$$

Analogicky pro lomené paprsky dostáváme v bodě F'

$$\psi'_1(F') = |t_1 t_2| e^{i\delta'_2} U e^{ik(nAB+BE+s)},$$

$$\psi'_2(F') = |t_1 t_2 r_2 r_2| e^{i\delta'_2} U e^{ik(nAB+nBC+nCG+s)}.$$

Intenzita dána vztahem

$$I_t(F') = U^2 |t_1 t_2|^2 [1 + |r_2|^4 + 2|r_2|^2 \cos(\delta'_2 - \delta'_1 + 2kdn \cos \alpha_2)].$$

Tyto obecné vzorce se často uvádějí ve zjednodušeném tvaru, který odpovídá situaci, kdy vlna dopadá kolmo, nebo téměř kolmo na rozhraní. Za této situace nemusíme věnovat pozornost polarizaci dopadající vlny a z vlastnosti Fresnelových koeficientů v tomto případě

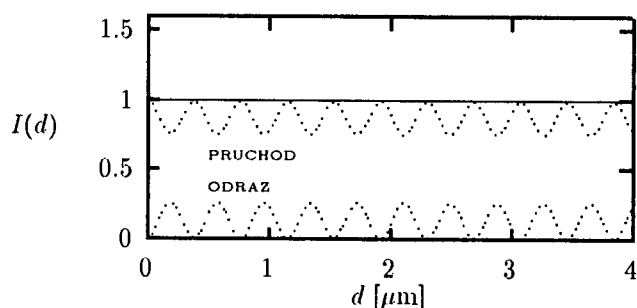
plyne $r_1 = -r_2$, a dále $t_1 = t_2$ a můžeme provést další zjednodušení. Výraz pro intenzitu odraženého svazku v bodě F pak můžeme upravit na tvar

$$I_r(F) = U^2 R [1 + (1 - R)^2 + 2(1 - R) \cos(\pi + 2kdn \cos \alpha_2)],$$

kde jsme využili vztahu $R + T = 1$, který vyjadřuje zákon zachování toku energie rozhraním (platí pouze pro neabsorbující prostředí). Podobně pro intenzitu interference v prošlém svazku dostaneme

$$I_t(F') = U^2 T [1 + R^2 + 2R \cos 2kdn \cos \alpha_2].$$

V interferenci na odraz mají oba interferující paprsky přibližně stejnou amplitudu, protože propustnost je blízká 1. Naproti tomu lomené interferující paprsky mají amplitudy velice rozdílné. Jeden je blízký 1 a druhý má amplitudu po dvou odrazech. Viditelnost interferenčního jevu na průchod je tedy velice nízká.



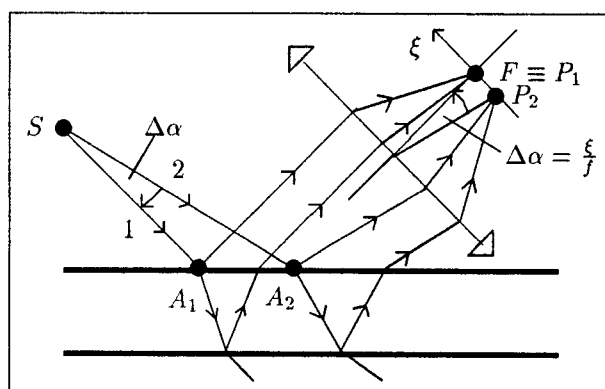
Obr. 6.12: Graf závislosti intenzity na tloušťce vrstvy d pro konstantní úhel dopadu při interferenci paprsků na odraz v ohnisku F a na průchod v ohnisku F' . Při dopadu ideální rovinné vlny bude osvětleno vždy jen ohnisko.

Graf závislosti intenzity na odraz a na průchod při proměnné tloušťce vrstvy je na obr.6.12. V případě, že vrstva by měla v různých místech různou tloušťku, pak by maximum intenzity sledovalo na povrchu místa stejné hodnoty d a mluvíme o **interferenčních prouzcích stejné tloušťky**.

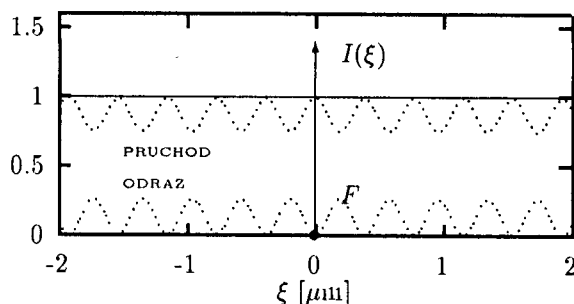
V případě, že bychom vrstvu osvětlovali divergentní vlnou, odpovídal by každému paprsku jiný úhel α_2 a odpovídající si paprsky by se protínaly a tedy interferovaly v ohniskové rovině čočky. Toto střídání maxim a minim intenzity by tedy odpovídalo **interferenčním prouzkům stejného sklonu**.

Dodejme několik poznámek, které souvisejí s pozorováním interferenčního jevu na plan-paralelních vrstvách:

- Aby náš výpočet intenzity odpovídal skutečnosti, musí být dráhový rozdíl interferujících paprsků menší, než koherenční délka. Ta je pro bílé světlo je asi $1.8\mu\text{m}$ ($\lambda = 600\text{nm}$, $\Delta\lambda = 200\text{nm}$). Proto interferenci pozorujeme jen na **tenkých vrstvách**, jejichž



Obr. 6.13: Optické schéma vzniku interferenčního jevu v ohniskové rovině při osvětlení tenké vrstvy divergentní vlnou. Paprsky, které při dopadu svírají úhel $\Delta\alpha$ se protínají v ohniskové rovině čočky v bodech $P(\xi_1)$ a $P(\xi_2)$ a platí $\xi_2 - \xi_1 = f\Delta\alpha$



Obr. 6.14: Graf závislosti intenzity v ohniskové rovině při dopadu divergentní vlny pro konstantní tloušťku d při interferenci paprsků na odraz v okolí ohniska F a na průchod v okolí ohnisku F' .

tloušťka je menší nebo srovnatelná s vlnovou délkou, uapř. na mýdlových bublinách, na olejové skvrně na vodě a nikoliv uapř. na skležené okenní tabuli.

- Tenké vrstvy se jeví v bílém světle **barevné**. Maximum interference závisí na vlnové délce, jak plyne z našeho výpočtu a protože naše oko umí barvy rozeznávat, vidíme interferenční proužky barevné. Dáme-li před oko uapř. červený filtr, zůžeme spektrální obor světla dopadajícího do oka a tím prodloužíme jeho koherenční délku.
- **Prostorová koherence** při pozorování interferenčního jevu pomocí čoček neovlivní viditelnost, protože interferující vlny vznikají **dělením amplitudy** z jedné dopadající vlny.

6.5.2 Mnohapaprsková interference

V předchozím odstavci jsme se zabývali dvoupaprskovou interferencí, která je dobrým přiblížením reality tehdy, když $r \ll 1$. Jestliže tato podmínka není splněna a nebo požadujeme přesnější výpočet, pak nemůžeme zanedbat třetí a další paprsky, jak plyne z obr.6.10. Paprsky se ve vrstvě neustále odrážejí, tím sice jejich amplituda klesá, ale v ohniskové rovině čoček dochází k superpozici mnoha koherentních paprsků, přičemž dráhový rozdíl sousedních paprsků je konstantní a je roven $\Delta s = 2nd \cos \alpha_2$.

Výpočet opět zjednodušíme tím, že jej budeme provádět za těchto předpokladů: Na plan-paralelní vrstvu o indexu lomu n dopadá z vakua rovinná monochromatická vlna s typem polarizace s nebo p . Fresnelovy koeficienty se vztahují k příslušné polarizaci a předpokládáme, že úhly dopadu se jen málo liší od nuly.

Zabývejme se nejdříve interferencí paprsků prošlých. Vlnový stav prošlých paprsků v bodě F' bude

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= Ut_1t_2e^{iks_t} \\ \psi'_2 &= Ut_1t_2r_2^2e^{ik(s_t+\Delta s)} = \psi'_1r_2^2e^{ik\Delta s} \\ \psi'_3 &= Ut_1t_2r_2^4e^{ik(s_t+2\Delta s)} = \psi'_1r_2^4e^{i2k\Delta s} \\ &\dots \\ \psi'_j &= Ut_1t_2r_2^{2(j-1)}e^{ik(s_t+(j-1)\Delta s)} = \psi'_1r_2^{2(j-1)}e^{i(j-1)k\Delta s}\end{aligned}$$

Výsledná vlna je pak

$$\psi_t = \psi_1 \sum_{j=1}^{\infty} r_2^{2(j-1)} e^{i(j-1)k\Delta s}.$$

Jedná se tedy o součet geometrické řady s kvocientem $q = r_2^2 e^{ik\Delta s}$, který má absolutní hodnotu menší než 1 a proto řada konverguje. Dostáváme tedy pro výslednou vlnu výraz

$$\psi_t = \psi_1 \frac{1}{1 - r_2^2 e^{ik\Delta s}}$$

a pro intenzitu výraz

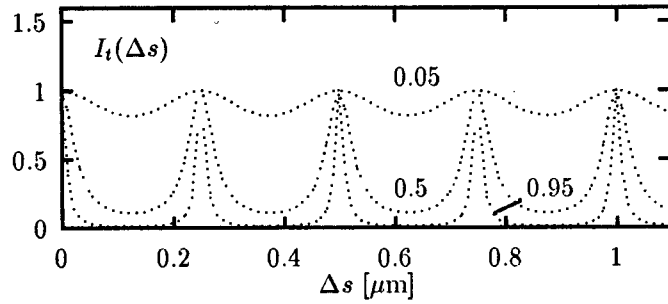
$$I_t = \psi_t \psi_t^* = \frac{(Ut_1t_2)^2}{1 + r_2^4 - 2r_2^2 \cos k\Delta s}.$$

Označíme-li odrazivost na vnitřních stěnách vrstvy $R = r_2^2$ a dále $t_1t_2 = T$, $U^2 = I_0$, pak pro intenzitu v prošlém svazku dostáváme výraz

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos k\Delta s} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos k\Delta s)} \quad (6.1)$$

Bývá zvykem ještě označit zlomek s odrazivostí $F = 4R/(1 - R)^2$ a výraz

$$\Phi = k\Delta s/2 = nkd \cos \alpha_2.$$



Obr. 6.15: Graf závislosti intenzity I_t na dráhovém rozdílu Δs pro různé hodnoty odrazivosti $R = 0.05, 0.5, 0.95$, $\lambda = 500nm$.

Tím dostaneme konečný výraz pro intenzitu prošlého svazku v ohnisku F' při mnohapaprskové interferenci

$$I_t(F') = I_0 \frac{1}{1 + 4R/(1 - R)^2 \sin^2 k\Delta s/2} = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \Phi}. \quad (6.2)$$

Postup výpočtu mnohapaprskové interference odražených vln je analogický, avšak algebraicky trochu složitější.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= U r_1 e^{iks_r} = r_1 \psi_0 \\ \psi_2 &= U t_1 t_2 r_2 e^{ik(s_r + \Delta s)} = t_1 t_2 r_2 \psi_0 e^{ik\Delta s} \\ \psi_3 &= U t_1 t_2 r_2^3 e^{ik(s_r + 2\Delta s)} = t_1 t_2 r_2^3 \psi_0 e^{ik2\Delta s} \\ &\dots \\ \psi_j &= U t_1 t_2 r_2^{2(j-2)+1} e^{ik(s_r + (j-1)\Delta s)} = t_1 t_2 r_2^{2(j-2)+1} \psi_0 e^{ik(j-1)\Delta s}. \end{aligned}$$

Výsledná vlna je pak dána vztahem

$$\begin{aligned} \psi_r &= \psi_0 [r_1 + t_1 t_2 r_2 \sum_{j=1}^{\infty} r_2^{2(j-1)} e^{ik\Delta s}]. \\ \psi_r &= \psi_0 r_2 [-1 + t_1 t_2 \frac{e^{ik\Delta s}}{1 - r_2^2 e^{ik\Delta s}}] \end{aligned}$$

a výsledná intenzita vztahem

$$I_r = \psi\psi^* = I_0 R \frac{1 + 1 - \cos k\Delta s}{1 + R^2 - 2R \cos k\Delta s}, \quad (6.3)$$

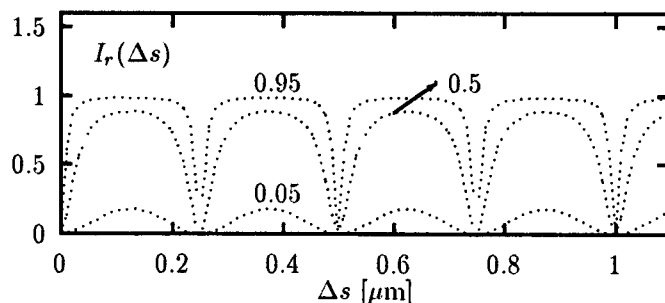
nebo vztahem

$$I_r = I_0 \frac{4R \sin^2 k\Delta s/2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 k\Delta s/2} = I_0 \frac{F \sin^2 \Phi}{1 + F \sin^2 \Phi}, \quad (6.4)$$

kde bylo užito stejného označení, jako ve vzorci na průchod.

Protože předpokládáme neabsorbující prostředí planiparalelní vrstvy, žádná energie se tedy neztrácí. Platí

$$I_r + I_t = I_0,$$



Obr. 6.16: Graf závislosti intenzity I_r na dráhovém rozdílu Δs pro odrazivosti $R = 0.05, 0.5, 0.95, \lambda = 500nm$.

jak se můžeme přesvědčit dosazením do tohoto vztahu.

Pro malé hodnoty R , tj. $R \ll 1$ a tedy $F \approx 4R$, přejdou výrazy (6.2) a (6.4) ve výrazy pro dvoupaprskovou interferenci, jak je také zřejmé z grafů na obr.6.15 a 6.16 a příslušných křivek pro $R = 0.05$.

Výraz pro intenzitu I_t je **výchozí výraz** pro objasnění funkce interferenčních filtrů, Fabryova - Perotova interferometru a laserových optických rezonátorů. Tyto tři aplikace jsou zajímavým dokladem toho, jak se významných vlastností nabývá mnohapaprsková interference na planoparalelní desce, když se mění pouze její tloušťka. Pro interferenční filtry je $d \approx 1\mu m$, pro F-P interferometr je $d \approx 1cm$ a pro laserový rezonátor je $d \approx 1m$. Vysoká odrazivost rozhraní se ve všech případech dosahuje opět systémy tenkých absorbujících i neabsorbujících vrstev.

Graf závislosti I_t na vlnové délce pro uvedené dvě aplikace je na obr. 6.17. Je odtud vidět, že čím větší je d , tím ostřejší interferenční maxima vznikají. Provedme **matematickou analýzu** výrazu pro intenzitu $I_t(\Phi)/I_0$ - (6.2). Maximální hodnota je rovna 1 a nastane pro $\Phi = M\pi$, kde M je celé číslo. Označme ε takový přírůstek Φ , pro nějž klesne hodnota I_t/I_0 z maxima na polovinu. Z rovnice (6.2) plyne

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\Phi + \varepsilon)}.$$

Odtud dostaneme,

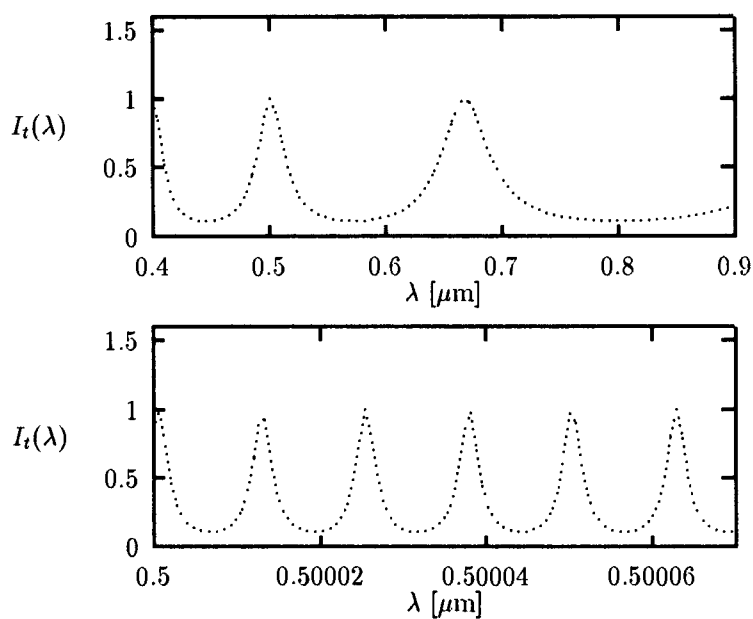
$$\sin \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{F}}$$

a pro vysokou odrazivost, kdy je $F \gg 1$, můžeme s dostatečnou přesností psát

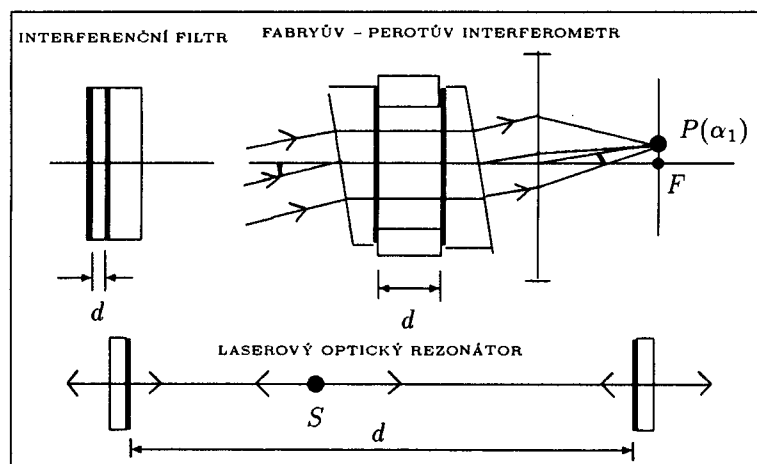
$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{F}}. \quad (6.5)$$

(Tento předpoklad nám významně zjednoduší následující matematickou analýzu výrazu (6.2)). Nyní můžeme hledat výraz, jak závisí **šířka interferenčního maxima** na λ . Necht' pro $\lambda = \lambda_M$ je $\Phi = M\pi$. Výraz pro ε dostaneme diferencováním výrazu pro Φ .

$$\varepsilon = \Delta\Phi = \frac{2\pi nd \cos \alpha_2}{\lambda^2} \Delta\lambda.$$



Obr. 6.17: Na horním grafu jen závislost I_t/I_0 na λ pro $d = 1\mu\text{m}$ a na spodním pro $d = 1\text{cm}$ při odrazivosti $R = 0.5$.



Obr. 6.18: Optické schéma interferenčního filtru, Fabryova-Perotova interferometru a laserového optického rezonátoru.

Odtud dostáváme šířku $\Delta\lambda$ interferenčního maxima při proměnné vlnové délce

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\sqrt{F}2\pi nd \cos \alpha_2}. \quad (6.6)$$

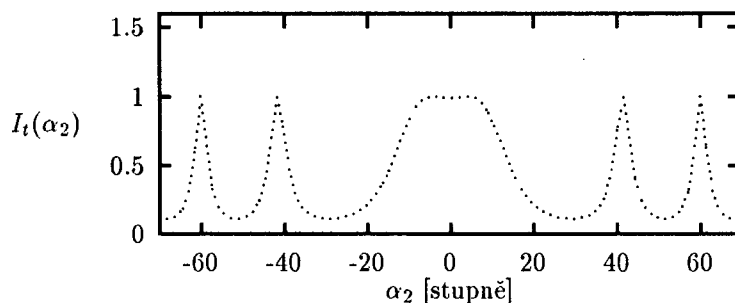
Analogickým postupem můžeme najít **úhlovou šířku interferenčního maxima** $\Delta\alpha_2$. Numerický výpočet závislosti $I_t(\alpha_2)$ je na obr.6.19.

$$\varepsilon = \Delta\Phi = \frac{2\pi nd \sin \alpha_2}{\lambda} \Delta\alpha_2.$$

Odtud

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{F^2 2\pi n d \sin \alpha_2}}. \quad (6.7)$$

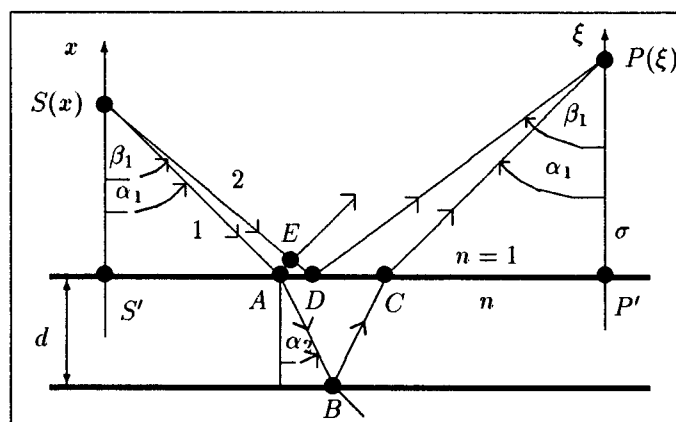
Výsledků této matematické analýzy využijeme později v souvislosti s diskuzí vlastností optického rezonátoru laseru.



Obr. 6.19: Závislost I_t/I_0 na α_2 pro $\lambda = 500\text{nm}$, $R = 0.5$ a $d = 1\mu\text{m}$. Pro úhel $\alpha_2 = 0$ je $\Phi = M\pi$. Proto je v $\alpha_2 = 0$ maximum.

6.6 Dvoupaprsková interference na stínítku

Pozorování dvoupaprskové interference na planparalelní vrstvě se nejčastěji provádí pomocí čoček, tak jak o tomto jevu bylo dosud pojednáno. Je však vhodné poznamenat, že existují situace, kdy k interferenčnímu jevu může dojít na stínítku i bez použití čoček. Optické schéma tohoto uspořádání je na obr.6.20.



Obr. 6.20: Optické schéma chodu paprsků při interference světla na planparalelní vrstvě bez použití čoček s přímým pozorováním interferenčního jevu na stínítku σ .

Paprsek 1 vycházející ze zdroje $S(x)$ dopadá do bodu A , kde se lomí, odráží v bodě B

a přes bod C dopadá na stínítko σ do bodu $P(\xi)$. Paprsek odražený v bodě A dopadá na stínítko mimo bod P . Mezi body A a C existuje však vždy takový bod D , že paprsek 2 odražený v tomto bodě se protne na stínítku s paprskem 1 v bodě P a tam spolu interferují.

Vlnový stav paprsku 1 v bodě P je

$$\psi_1 = Ut_1 r_2 t_1 e^{ik(SA+nAB+nBC+CP)}.$$

Vlnový stav paprsku 2 v bodě P je

$$\psi_2 = Ur_1 e^{ik(SD+DP)}.$$

Označíme-li vzdálenost $SS' = x$ a $PP' = \xi$, pak pro optickou dráhu paprsku 1 platí

$$s_1 = \frac{x}{\cos \alpha_1} + \frac{2nd}{\cos \alpha_2} + \frac{\xi}{\cos \alpha_1}$$

a pro optickou dráhu paprsku 2 platí

$$s_2 = \frac{x}{\cos \beta_1} + \frac{\xi}{\cos \beta_1}.$$

Jak je zřejmé z obr.6.20, je poloha bodu D určena úhlem β_1 . Ten se určí z podmínky, že mají-li se paprsky 1 a 2 protnout v bodě P , pak průměty jejich geometrických (nikoliv optických) drah do rozhraní musí být stejné. Tedy

$$x \tan \beta_1 + \xi \tan \beta_1 = x \tan \alpha_1 + 2d \tan \alpha_2 + \xi \tan \alpha_1.$$

Nyní je to už jen otázka algebraických úprav, abychom vypočetli dráhový rozdíl obou interferujících paprsků. Označíme-li $\Delta = \beta_1 - \alpha_1 \ll 1$, pak pro rozdíl $s_1 - s_2$ dostaneme

$$s_1 - s_2 = 2nd \cos \alpha_2 \left[1 - \frac{\sin 2\alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \Delta \right].$$

Intenzita interferujících paprsků na stínítku v P pro malé úhly α_1 , dovolí dále zjednodušit vyjádření Fresnelových koeficientů. Dostaneme pak

$$I = U^2 R \left[1 + T^2 + 2T \cos k \left[2nd \cos \alpha_2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \Delta \right) \right] \right].$$

Aby mohlo k této interferenci dojít, musí paprsky 1 a 2 být **prostorově koherentní**, protože interferující paprsky nevznikají dělením amplitudy, ale dělením čela vlny. To znamená, že vzdálenost AE musí být menší než je koherenční šířka. Vzdálenost $AD = b$ je však závislá na tom, kde leží bod D . Maximální hodnotu bude mít, když D splyne s C . Pak

$$b = 2d \tan \alpha_2 \sin \alpha_1.$$

Vidíme, že podmínka prostorové koherence bude tím lépe splněna, čím menší budou úhly α_1 . Naproti tomu podmínka časové koherence bude tím lépe splněna pokud α_1 se bude blížit $\pi/2$. Je tedy třeba najít **kompromis** mezi oběma požadavky a teprve pak bude experiment úspěšný (např. tzv. Pohlův pokus s interferencí na slídě).

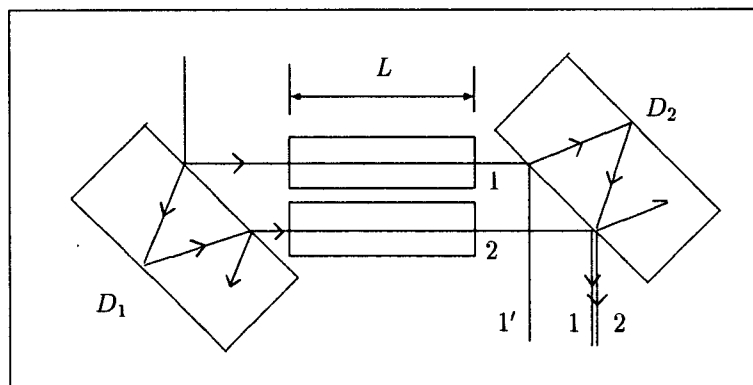
Na podobné úvahy o koherenci nesmíme zapomenout ani při analýze interference dvou svazků po odraze na Fresnelových zrcátkách nebo Lloydově zrcátku, při interferenci svazků po průchodu Fresnelovým dvojhranolem nebo Billetovou dvojčočkou.

6.7 Interferometry

O dvou interferometrech jsme se již zmínili a to v souvislosti s měřením stupně prostorové pomoci astronomického a časové koherence pomocí Michelsonova interferometru a z nich odvozené měření průměru hvězd a profilů spektrálních čar.

Michelsonův interferometr a jemu podobné interferometry sehrály dříve významnou roli při definici délkových jednotek a dnes mají význam zejména pro bezkontaktní měření délek ve strojírenství. Jako zdroje užívá laseru, aby se odstranily potíže s časovou a prostorovou koherencí.

Za zmínku stojí ještě **Jaminův interferometr**, jehož optické schéma je na obr.6.21. Paprsky 1 a 2 vznikly dělením vlnoplochy a odrazem na přední a zadní stěně skleněné desky D_1 se prostorově dostatečně separovaly, takže každý z nich může procházet samostatnou trubicí, kde je možné měnit tlak i tím i index lomu plynu, kterým jsou naplněny.



Obr. 6.21: Optické schéma Jaminova interferometru.

Interferují paprsky 1 a 2, protože jejich dráhový rozdíl je dán pouze rozdílem indexů lomu v jednotlivých trubicích. Mezi paprsky 1' a 1 a podobně mezi 1 a 2' je dráhový rozdíl $2nd \cos \alpha_2$, kde d je tloušťka desek D_1 a D_2 , n je jejich index lomu a α_2 odpovídající úhel lomu. Poznamenejme, že interferující paprsky mají stejnou amplitudu a tím je zajištěna dobrá viditelnost

Jaminův interferometr naznačuje obecný způsob, jak zviditelňovat pomocí interference i velice jemné nehomogenity v indexu lomu plynů vyvolané např. gradientem teploty, chemickým složením i jinými příčinami.

6.8 Optické principy laserů

Lasery jsou zdroje koherentních světelných vln, které se navíc vyznačují tím, že do malého prostorového úhlu je soustředěn poměrně značný tok světelné energie. Slovo **LASER** je původně zkratka anglického názvu *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, což česky znamená *zesílení světla stimulovanou emisí záření*. První laser pracující ve viditelném oboru byl sestaven roku 1960.

Každý laser se skládá v podstatě ze dvou částí (mimo příslušných elektrických zdrojů):

Optický rezonátor, což je v podstatě Fabryův - Perotův interferometr s rovinnými nebo kulovými odrazovými plochami s odrazivostí $R = 95$ procent i více.

Opticky aktivní prostředí vložené do prostoru rezonátoru. Toto prostředí se vyznačuje tím, že se zde nacházejí atomy v excitovaných metastabilních stavech, tj. připravených vyzářit světlo. Toto prostředí může být plynné (např. He-Ne, CO₂-N₂), kapalně (rhodamin rozpuštěný v glykolu), nebo pevná látka (např. Al₂O₃+Cr³⁺ - rubín, neodýmové sklo, polovodičové lasery).

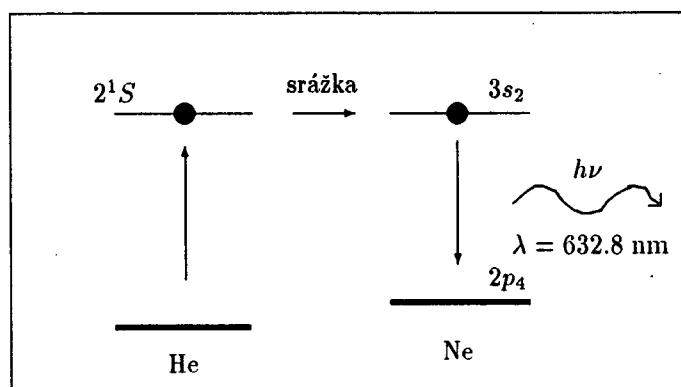
Aniž bychom podrobněji rozebírali činnost jednotlivých typů laserů, objasníme pouze obecné principy odpovídající za zesílení světla a za koherenční vlastnosti laserového světla u plynového laseru.

6.8.1 Aktivní prostředí

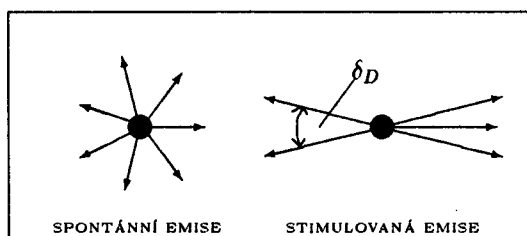
Z kvantové fyziky vyplývá, že světlo je emitováno při jejich přechodu z excitovaného stavu do základního. Doba života excitovaných stavů, které je možné vyvolat absorpcí světla, je řádu $\tau = 1$ ns a určuje tzv. přirozenou šířku spektrální čáry $\Delta\nu = 1/\tau$. Existují tzv. **metastabilní excitované stavy**, které nelze vyvolat absorpcí světla, ale tzv. **nezářivými přechody**, tj. srážkami atomů, nebo interakcí s kmity krystalové mřížky apod. Tyto stavy mají dobu života až řádově 1 ms, tj. milionkrát delší než běžné excitované stavy.

Tak např. u He-Ne laseru je aktivní prostředí tvořeno výbojovou trubicí se směsí plynů He a Ne o parciálním tlaku He asi 100 Pa a Ne asi 10 Pa. Heliové ionty excitované a urychlované elektrickým výbojem se srážají s atomy Ne a excitují je do metastabilních stavů. Jejich přechod do základního stavu se děje buď **spontánní emisí**, kdy se foton vyzáří do zcela náhodného směru ve zcela náhodný okamžik se zcela náhodnou polarizací, nebo **stimulovanou emisí**, která nastane, když se atom nachází ve vnějším E-M poli stejné frekvence. Pak je vyzáření fotonu tímto polem nejen synchronizováno, ale je jím určen i směr a polarizace. Proces excitace a stimulované emise probíhá ve výbojové trubicí kontinuálně.

U **rubínových** laserů se do metastabilních stavů dostávají příměsové atomy Cr, a to jejich



Obr. 6.22: Energiové schéma atomových procesů v He-Ne laseru.



Obr. 6.23: Znázornění vyzáření fotonu do prostoru při spontánní a stimulované emisi.

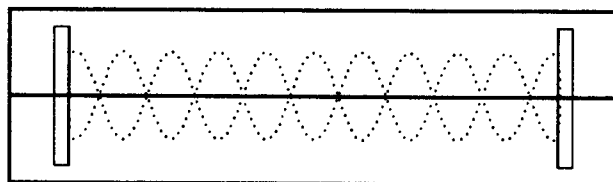
interakcí s krystalovou mřížkou, v níž nastává absorpce světla. Rubínový krystal se tedy ozařuje světlem z výbojové trubice a tím se stále více a více atomů nachází v metastabilních polohách. Pak se na okamžik otevře rezonátor a dojde k lavinovitě stimulované emisi - světelnému pulzu.

Druh laseru	Vlnová délka [nm]
Argon	488.0
Argon	514.5
Heilum - neon	632.8
Rubín	694.3
Gallium - arzenid	860
Neodymové sklo	1 060
CO ₂ laser	10 591

Odhadněme světelný výkon pulzního laseru: Jestliže krystal rubínu má objem $V = 10\text{cm}^3$ a koncentrace excitovaných iontů Cr je $N = 10^{19}\text{cm}^{-3}$ a jeden foton nese energii $E_f = h\nu = 3.10^{-19}\text{J}$. V celém krystalu je pak uložena energie $E = VNE_f = 30\text{J}$. Jestliže dojde k vyzáření za $1\mu\text{s}$, pak po tuto dobu měl světelný paprsek výkon 30 MW!

6.8.2 Optický rezonátor

Jak jsme uvedli, typickým rezonátorem pro laser je Fabryův - Perotův interferometr, s nímž jsme se seznámili v předchozích odstavcích. O rezonátoru se v této souvislosti mluví proto, že maximum intenzity I_t - viz rovnice (6.2), nastane pro takovou vlnovou délku světla, když $\Phi = M\pi$ a tedy optická dráha $nd = M\lambda_M/2$, kde d je vzdálenost zrcadel a n je index lomu prostředí mezi nimi. V tomto případě se totiž vytvořilo mezi zrcadly interferometru stojaté vlnění, podobné například mechanické stojaté vlně lze vybudit na struně. Vlnová délka λ_M odpovídá **M-tému podélnému módu**.

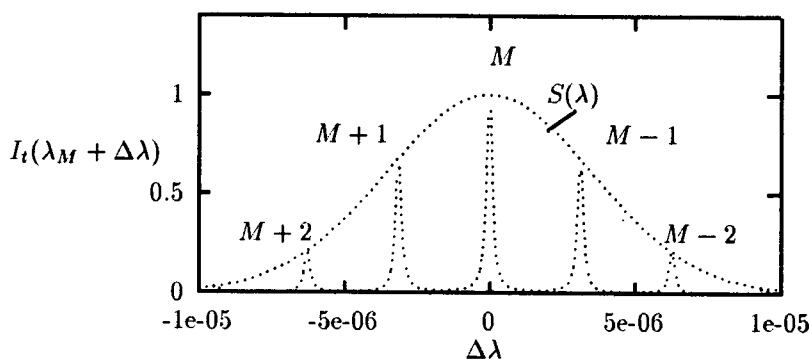


Obr. 6.24: Schématické znázornění stojatého vlnění u Fabryova - Perotova interferometru. Vzhledem k tomu, že zrcadla rezonátoru jsou tvořena soustavou tenkých vrstev, nelze předem říci, jak se při odraze mění fáze, zda je tedy na povrchu zrcadla kmitna nebo uzel elektrické složky EM vlny.

Předpokládejme, že rezonátor je nastaven na λ_M a současně tato vlnová délka odpovídá přibližně maximum spektrální čáry, jejíž profil můžeme aproximovat např. Gaussovou křivkou

$$S(\lambda) = S_0 e^{-(\lambda - \lambda_M)^2 / \Lambda^2},$$

kde Λ je přirozená šířka spektrální čáry odpovídající danému přechodu elektronu mezi energetickými hladinami.



Obr. 6.25: Schématické znázornění profilu spektrální čáry a příslušných podélných módů, které z něho propustí optický rezonátor.

Vlnění odpovídající této spektrální čáře vzniká uvnitř rezonátoru, ale ten z něho propustí prakticky jen odpovídající podélné módy, které se vejdou do profilu spektrální čáry. To znamená v našem případě módy $\lambda_{M\pm 1}$ a snad ještě $\lambda_{M\pm 2}$. Vzdálenost mezi jednotlivými módy je

$$\lambda_{M-1} - \lambda_M = 2nd \left(\frac{1}{M-1} - \frac{1}{M} \right) \approx \frac{2nd}{M^2} = \frac{\lambda_M}{M}, \quad (6.8)$$

kde za optickou dráhu $2nd$ jsme dosadili $M\lambda_M$. Pro He-Ne lasery je $M \approx 10^6$.

Výraz (6.6) nám pomůže odhadnout spektrální šířku M -tého podélného módu a jemu příslušnou koherenční délku.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_M}{2\pi M\sqrt{F}}. \quad (6.9)$$

Vidíme, že spektrální šířka bude tím užší, čím větší bude odrazivost zrcadel rezonátoru a čím bude rezonátor delší. Podélnému módu pak přísluší **koherenční délka**

$$\delta = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 2\pi nd\sqrt{F}. \quad (6.10)$$

Koherenční délka světla vycházejícího z laseru je tedy mnohonásobně větší, než je délka rezonátoru. Tyto velice příznivé koherenční vlastnosti zhoršují efekty spojené s Dopplerovým jevem, protože atomy se ve výbojové trubici chaoticky pohybují.

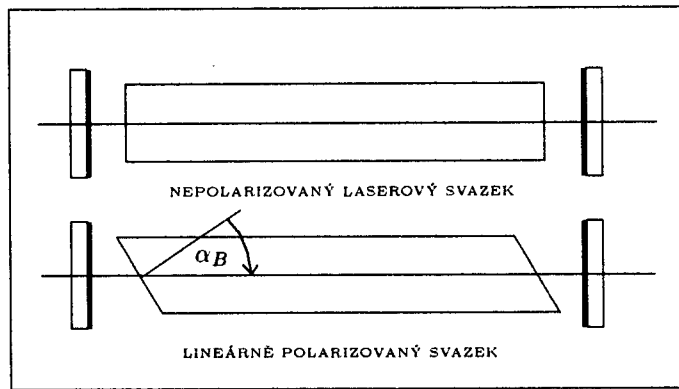
Prostorová koherence je zajištěna vlastním mechanismem stimulované emise. Jednotlivé excitované atomy nezáří s nahodilou fází, ale s fází, která odpovídá příslušnému vlnovému stavu v tom bodě rezonátoru, kde se atom nachází.

Geometrická aproximace vlnění, kterou jsme použili při analýze Fabryova - Perotova interferometru, naznačuje, že světlo z laseru může být téměř ideálně rovnoběžné. Vlnová optika však principiálně nedovoluje takové svazky vytvářet. Z analýzy rozlišovací schopnosti čoček již víme, prostorové omezení svazku na šířku D , způsobí difrakci a tím se jeho **divergence** zvětší na hodnotu $\delta_D = \lambda/D$, kterou, jak víme, nemůžeme experimentálně již nijak snížit. Jestliže svazek světla z laseru má průměr $D = 5\text{mm}$, pak jeho divergence nemůže být menší než $\delta_D = 10^{-4}$.

Tento odhad divergence nám umožní odhadnout **zesílení** světla A_z , které vysílá laser do prostorového úhlu δ_D^2 oproti stavu, kdy do tohoto úhlu by zářila samotná výbojová trubice. Bez rezonátoru by došlo k vyzáření fotonu do prostorového úhlu 4π , s rezonátorem do úhlu δ_D^2 . Zesílení je tedy

$$A_z = \frac{4\pi}{(\delta_D)^2} \approx 10^9. \quad (6.11)$$

U laserů, které mají okénka výbojové trubice skloněny k ose pod Brewsterovým úhlem, jsou navíc zdrojem lineárně polarizovaného světla. Zesílení takových laserů je pak ještě o jeden až dva řády větší, protože stimulovaná emise se přizpůsobí i polarizačnímu stavu stojatého vlnění v rezonátoru.

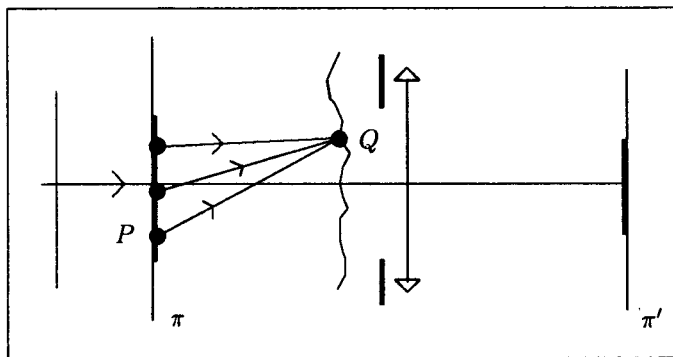


Obr. 6.26: Schéma zakončení výbojových trubíc u plynových laserů jako zdrojů nepolarizovaného a polarizovaného světla.

6.9 Základy holografie

Detektory světla reagují na intenzitu světla, která je úměrná kvadrátu amplitudy vlny v daném bodě. Na fázi vlny nijak nereagují. Část informace v ní obsažená je měřením nenávratně ztracena.

Naše dosavadní úvahy o zobrazování předmětů jsme vedli analytickou metodou. Předmět jsme rozložili na svítící body a čočkou zobrazovali každý bod předmětu.



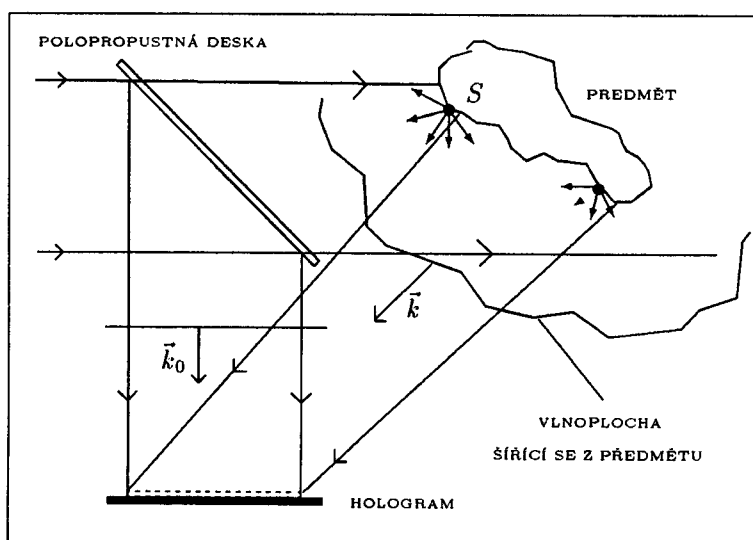
Obr. 6.27: Vlna generovaná osvětleným předmětem nese úplnou informaci o předmětu a část této vlny, která projde čočkou, vytvoří obraz předmětu.

Do vlnového stavu v bodě Q na vlnoploše přispívají podle H-F principu všechny body P předmětu. V každém bodě vlny je tedy zakódována v podstatě informace o celém předmětu. Že tato informace je obsažena ve fázi, a ne v amplitudě, vyplývá z této jednoduché experimentální úvahy:

Jestliže při zobrazování předmětu vložíme před čočku (např. před oko) fotografickou

desku, zaznamenáme na ni v každém bodě jen kvadrát amplitudy vlnění a nikoliv jeho fázi. Deska ukáže jistě téměř homogenní zčernání. Jestliže však stejnou část vlny, jaká byla zachycenou fotografickou deskou, necháme projít čočkou, můžeme získat obraz předmětu. Informace o předmětu je tedy ukryta v té části vlnění, kterou fotografická deska nezaznamenala, tj. ve fázi.

Jestliže se podaří zaznamenat amplitudu i fázi vlny šířící se z předmětu a nějakým způsobem ji kdykoliv později obnovit, získáváme novou kvalitu záznamu informace o předmětu, než poskytuje např. fotografie. Tento proces je znám pod názvem **holografie** a plně se rozvinul po objevu laserů. Nositel záznamu je **hologram**, což je velice jemnozrná fotografická deska, a proces obnovy zaznamenané vlny se nazývá **rekonstrukce předmětové vlny**.



Obr. 6.28: Schéma záznamu hologramu na speciální fotografickou desku. Každý bod předmětu S je osvětlen prostorově koherentní vlnou a superpozicí všech sekundárních vln šířících se ze všech bodů předmětu vzniká předmětová vlna.

Schéma záznamu předmětové vlny na hologram je na obr.6.28. Rovnoběžný svazek světla z laseru dopadá na polopropustnou desku, kde jednak prochází a osvětluje zobrazovaný předmět, jednak se odráží a dopadá na fotografickou desku. Na ni tedy dopadá jednak rovinná vlna ψ_0 odražená od polopropustné desky

$$\psi_0 = A_0 e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} + \varphi_0)} = A_0 e^{i\varphi_0},$$

jednak předmětová vlna ψ odražená od předmětu, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$\psi(x, y, z) = A(x, y, z) e^{i(\vec{k} \vec{r} + \varphi(x, y, z))} = A e^{i\varphi}.$$

Tato vlna se šíří k fotografické desce převážně směrem \vec{k} a funkce $\varphi(x, y, z)$ má pak význam fázových odchylek od rovinné vlny šířící se tímto směrem.

V každém bodě fotografické desky nastává superpozice obou vln a zčernání desky je tedy úměrné intenzitě výsledné vlny.

$$I(x, y, z) = (\psi_0 + \psi)(\psi_0 + \psi)^*.$$

Po dosazení dostaneme

$$I_h(x, y, z) = A_0 A_0^* + A A^* + A_0 A e^{i(\phi_0 - \phi)} + A_0 A^* e^{i(-\phi_0 + \phi)} \quad (6.12)$$

nebo po další úpravě

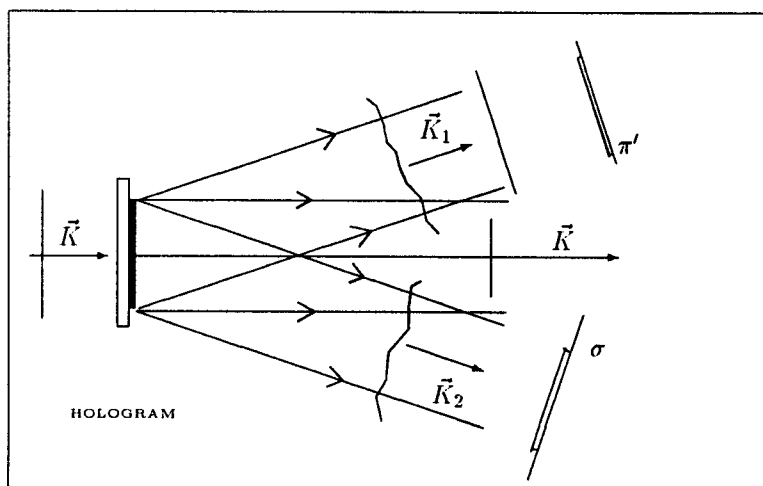
$$I_h(x, y, z) = |A_0|^2 + |A|^2 + 2|A||A_0| \cos(\phi - \phi_0). \quad (6.13)$$

Z této rovnice vidíme, že informace ukrytá ve fázi předmětové vlny podstatně ovlivní interferenční jev. V tomto interferenčním jevu, tj. ve zčernání fotografické desky, je tedy zaznamenána jak amplituda, tak fáze předmětové vlny.

Nutnost požití laseru k záznamu hologramu vyplývá z požadavku, aby obě překrývající se vlny v rovině hologramu, byly prostorově a časově koherentní, aby tam mohl vzniknout časově stálý interferenční jev.

Nyní se zabývejme způsobem **rekonstrukce předmětové vlny**.

Optické schéma rekonstrukce předmětové vlny je naznačeno na obr.6.29. Rovinnou vlnu



Obr. 6.29: Optické schéma rekonstrukce předmětové vlny. Vzniknou tři svazky paprsků.

u_i o vlnovém vektoru \vec{K} necháme procházet hologramem.

$$u_i = U e^{i\vec{K}\vec{r}}.$$

Uvažme, že zčernání D fotografické desky je v prvním přiblížení úměrné intenzitě a její propustnost pak $(1 - D)$. Funkci propustnosti hologramu proto můžeme napsat ve tvaru

$$T(x, y, z) = T_0 + C I_h(x, y, z), \quad (6.14)$$

kde C má význam konstanty úměrnosti, která závisí na způsobu vyvolávání hologramu, podobně jako konstanta T_0 . Po průchodu hologramem dostaneme tedy vlnu

$$u(x, y, z) = UT_0 e^{i\vec{K}\vec{r}} + UC I_h(x, y, z) e^{i\vec{K}\vec{r}}.$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice za I_h výraz (6.12) můžeme vlnu u zapsat jako superpozici tří vln

$$u(x, y, z) = u_0 + u_1 + u_2, \quad (6.15)$$

kde jednotlivé vlny jsou dány těmito výrazy

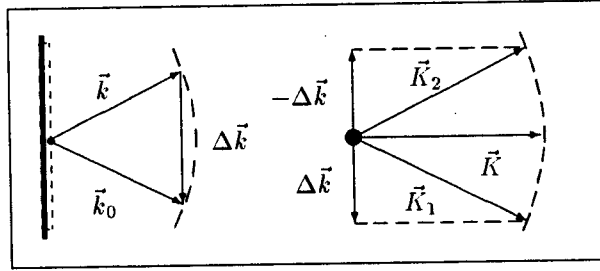
$$u_0 = U(T_0 + A_0 A_0^* + A A^*) e^{i\vec{K}\vec{r}}. \quad (6.16)$$

$$u_1 = C U A_0 A^* e^{i(\phi_0 - \phi + \vec{K}\vec{r})}. \quad (6.17)$$

$$u_2 = C U A_0^* A e^{i(-\phi_0 + \phi + \vec{K}\vec{r})}. \quad (6.18)$$

Věnujme nyní pozornost fyzikálnímu významu těchto tří vln.

Vlna u_0 se šíří směrem \vec{K} , tj. směrem laserové vlny použité k rekonstrukci.



Obr. 6.30: Znázornění směrů vlnových vektorů při záznamu hologramu (vlevo) a při jeho rekonstrukci (vpravo). Platí $|\vec{K}| = |\vec{K}_1| = |\vec{K}_2|$ a $\Delta\vec{k} = \vec{k}_0 - \vec{k}$.

Abychom si ujasnili směr šíření vlny u_1 , analyzujeme podrobněji její fázovou funkci.

$$\phi_0 - \phi + \vec{K}\vec{r} = (\vec{k}_0 - \vec{k} + \vec{K})\vec{r} + \phi_0 - \phi(x, y, z).$$

Označíme-li výsledný vlnový vektor $\vec{K}_1 = \vec{k}_0 - \vec{k} + \vec{K}$, jehož směr je zřejmý z obr.6.30, pak vlnu u_1 můžeme napsat ve tvaru

$$u_1(x, y, z) = C U A_0 A^*(x, y, z) e^{i[\vec{K}_1\vec{r} + \phi_0 - \phi(x, y, z)]}. \quad (6.19)$$

Podobným postupem dostaneme pro vlnu u_2 výraz

$$u_2 = C U A_0^* A(x, y, z) e^{i[\vec{K}_2\vec{r} - \phi_0 + \phi(x, y, z)]}. \quad (6.20)$$

Vlna u_2 je odkloněna na opačnou stranu od laserové vlny než vlna u_1 . Všimněme si, že amplituda této vlny se liší od předmětové vlny jen konstantou úměrnosti a fázová funkce

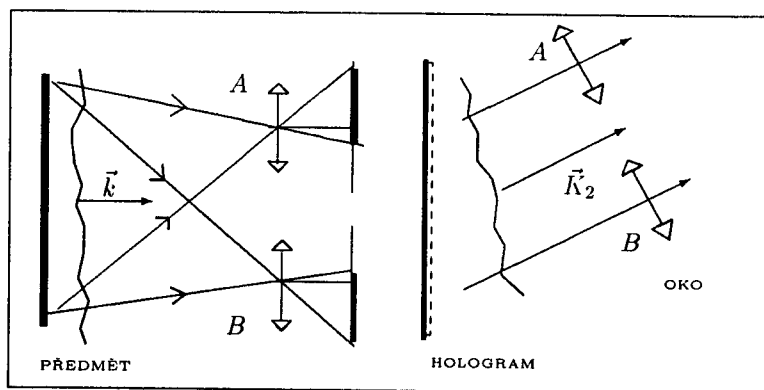
je až na konstantu stejná jako u vlny předmětové. Tato vlna šířící se směrem \vec{K}_2 tedy velice dobře odpovídá předmětové vlně a popsanou rekonstrukcí ji můžeme kdykoliv znovu vytvořit a dále s ní pracovat tak jako s původní předmětovou vlnou.

Jistě jsme si už všimli, že i vlna u_1 obsahuje úplnou informaci o předmětové vlně, ale jedná se o vlnu k ní komplexně sdruženou.

Rozdíl mezi vlnami u_2 a u_1 vyplyne z této úvahy. Předpokládejme, že předmětová vlna je kulová vlna šířící se z jednoho bodu předmětu. Vlna u_2 bude tedy také divergentní kulová vlna, zatím co vlna u_1 bude konvergentní kulovou vlnou, jakoby předmětová vlna prošla spojnou čočkou.

To znamená, že dáme-li stínítko do stejné vzdálenosti od hologramu jako byl předmět, zachytíme na něm ve směru \vec{K}_1 obraz předmětu. Chceme-li získat obraz předmětu pomocí spojné čočky, pak použijeme vlnu ve směru \vec{K}_2 . Když si necháme tuto vlnu dopadat přímo do oka, pak předmět vidíme přibližně ve stejné vzdálenosti od hologramu, jako se nacházel při expozici.

Vlna u_2 nám umožní prohlížet si předmět z různých stran podobně, jako si jej můžeme prohlížet přímo v realitě. Z bodu A nebo B vidíme předmět stejně jak v realitě, tak v rekon-



Obr. 6.31: Znázornění různých poloh oka při prohlížení předmětu v realitě a v rekonstruované vlně u_2 .

struované vlně. Při prohlížení hologramu pod mikroskopem najdeme na mnoha místech zcela zřetelné interferenční proužky, které podobají přibližně interferenčnímu jevu dvou rovinných vln.

Rekonstrukce předmětové vlny odpovídá Fraunhoferově difrakci na stínítku, jehož propustnost odpovídá hologramu. O správnosti tohoto tvrzení se můžeme přesvědčit výpočtem rozložení intenzity, když je difrakční stínítko tvořeno stínítkem s propustností $T(x) = T_0 + C \cos ax$. Hologram tedy vznikl interferencí dvou rovinných vln. Na stínítku se objeví svítící bod pro difrakční úhel $\Theta = 0$ a dva svítící body pro difrakční úhel $\Theta = \pm a/k$, které

bychom pozorovali na velice vzdáleném stínítku místo záznamu hologramu.

Od dob objevu laseru se holografické techniky značně rozvinuly a zdokonalily. Technicky nejvýznamnější aplikace našla **holografická interference**, pomocí níž je možné sledovat deformaci povrchů různých nepravidelných těles (např. stojanu soustruhu vlivem zahřátí ložisek apod.).

Obsah

1	Matematický popis světelných vln	1
1.1	Vlnová rovnice	1
1.1.1	Harmonické vlny	3
1.2	Reprezentace vlnění komplexními čísly	4
1.2.1	Vektorové vlny	5
1.2.2	Skalární vlny	7
1.2.3	Rovinná vlna	9
1.2.4	Kulová vlna	10
1.3	Vlnová klubka	11
2	Základní modely světla	15
2.1	Detekce světla	15
2.2	Intenzita světla a elektromagnetické vlnění	16
2.3	Intenzita světla a kvantová fyzika	19
2.4	Bodový zdroj světla	19
2.5	Dva bodové zdroje světla	20
2.6	Plošný zdroj světla	22
2.7	Nemonochromatický zdroj světla	23

3	Difrakce světla	25
3.1	Huygensův - Fresnelův princip	25
3.2	Difrakce světla a rozdělení difrakčních jevů	29
3.3	Babinetův princip	32
3.4	Fraunhoferova difrakce	32
3.4.1	Difrakce na obdélníkovém otvoru	33
3.4.2	Youngův pokus	33
3.4.3	Difrakce na optické lineární mřížce	36
3.4.4	Difrakce na plošné mřížce	40
3.4.5	Difrakce na kruhovém otvoru	43
3.5	Fresnelova difrakce na otvorech	44
3.5.1	Fresnelova difrakce na terčičku	47
3.6	Prostorová koherence	48
3.7	Časová koherence	52
3.8	Koherence světla	54
4	Světlo a optické prostředí	57
4.1	Odraz a lom světla	58
4.2	Fresnelovy koeficienty odrazu a lomu	62
4.2.1	Fresnelovy koeficienty pro s-polarizaci	64
4.2.2	Fresnelovy koeficienty pro p-polarizaci	66
4.3	Totální odraz světla	69
4.4	Odraz a lom lineárně polarizovaného světla	71
4.5	Odraz a lom nepolarizovaného světla	72
4.6	Světlo v absorbujícím prostředí	73

4.7	Mikroskopická teorie indexu lomu	76
4.8	Grupová a fázová rychlost světla	79
4.9	Rozptyl světla	80
4.10	Dvojlomné látky	84
4.10.1	Odraz a lom na rozhraní dvojlomné látky	85
4.10.2	Polarizace dvojlomem	86
4.10.3	Polostínový analyzátor	87
4.10.4	Fázový kompenzátor	89
4.10.5	Polarizační interference	90
4.10.6	Fotoelasticimetrie	93
4.11	Látky opticky aktivní	94
5	Geometrická optika a zobrazování	95
5.1	Geometrická aproximace vlnění	95
5.2	Stínový obraz	97
5.3	Camera obscura	99
5.4	Definice optického zobrazení	100
5.4.1	Reálný a virtuální obraz	101
5.5	Fermatův princip a rovinné zrcadlo	102
5.6	Kolineace	105
5.7	Kulové lámavé plochy	107
5.7.1	Refrakční matice	108
5.7.2	Translační matice	109
5.7.3	Přenosová matice	110
5.7.4	Zobrazovací rovnice	111

5.7.5	Ohniska a hlavní body	112
5.7.6	Průchod některých paprsků zobrazovacím systémem	114
5.8	Čočky	117
5.9	Aberace čoček	117
5.9.1	Chromatická vada	118
5.9.2	Otvorová vada	121
5.10	Rozlišovací mez čoček	122
5.11	Oko a barevné vidění	125
5.11.1	Optika lidského oka	125
5.11.2	Fyziologické a nervové vlastnosti oka	126
5.11.3	Vnímání barev	127
5.12	Fotografický přístroj	128
5.13	Lupa	130
5.14	Mikroskop	131
5.15	Dalekohled	132
5.16	Kolimátor	133
5.17	Kontrast zobrazení	133
5.17.1	Metoda temného pole	135
5.17.2	Metoda fázového kontrastu	136
5.17.3	Metoda interferenčního kontrastu	138
5.17.4	Metoda prostorové filtrace	139
5.18	Fotometrie	142
6	Interference světla	147
6.1	Interference a geometrická optika	147

6.2	Rozdělení interferenčních jevů	148
6.3	Interference a koherence světla	150
6.4	Tvar interferenčních proužků	152
6.4.1	Interference rovinných vln	152
6.4.2	Interference kulových vln	154
6.5	Interference na planparalelní vrstvě	155
6.5.1	Dvoupaprsková interference	156
6.5.2	Mnohapaprsková interference	160
6.6	Dvoupaprsková interference na stínítku	164
6.7	Interferometry	166
6.8	Optické principy laserů	167
6.8.1	Aktivní prostředí	167
6.8.2	Optický rezonátor	169
6.9	Základy holografie	171

æ

Použitá literatura

1. BORN M., WOLF E.: Principles of Optics. Nakl. Pergamon Press, London 1959, ruský překlad, nakl. Nauka, Moskva 1973.
2. FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B., SANDS M.: Feynmanove prednášky z fyziky 2. díl. Nakl. Alfa, Bratislava 1982.
3. ONEIL E. L.: Introduction to Statistical Optics. Nakl. Addison - Wesley Comp. London 1963, ruský překlad, nakl. Mir, Moskva 1966.
4. NACHTIKAL F.: Technická fyzika. Nakl. SPN, Praha 1952.
5. DRISCOLL W. G., VAUGHAN W.: Handbook of Optics. Nakl. McGraw-Hill Book Company, 1978.

Fourierova transformace: Jestliže existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^2 dy,$$

pak funkci $G(x)$ definovanou vztahem

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy} dy$$

nazýváme Fourierovým obrazem funkce $g(y)$. Inverzní Fourierova transformace je definována vztahem

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)e^{-ixy} dx.$$

Některé příklady Fourierových obrazů:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} e^{ixy} dy = 2\pi\delta(t+x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)e^{ixy} dy = 2\frac{\sin ax}{x},$$

kde $h(y) = 1$ pro $x \in [-a, a]$ a $h(y) = 0$ mimo tento interval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{ixy} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-y_0)e^{ixy} dy = G(x)e^{ixy_0}$$

Diracova funkce - delta funkce: Je definována vztahy $\delta(t) = 0$ pro $t \neq 0$ a $\delta(t) = +\infty$ pro $t = 0$ a integrálem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $x = x_0$. Pak platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

Některé reprezentace delta funkce:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{x}$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} e^{-ax^2}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega$$

$$\delta(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} p\left(\frac{x}{h}\right),$$

kde funkce $p(x)$ je definována vztahem $p(x) = 1$, h pro x z intervalu $(0, h)$ a $p(x) = 0$ mimo tento interval.

Název:	ÚVOD DO OPTIKY
Autor:	Doc. RNDr. Josef Kuběna, CSc.
Vydala:	Masarykova univerzita v Brně, sekce fyziky
Počet stran:	182
AA - VA:	17,2 - 17,4
Náklad:	300 výtisků
Tisk:	Grafex, Těchov 152, 678 01 Blansko
Vydání:	první 1994
Poř. číslo:	2165/Př 1/94

ISBN 80 - 210 - 0835 - 0