FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

MATEMATIKA 1B

Hlavní autor:
Prof. RNDr. Josef Diblík, DrSc

Autoři textu:
Doc. RNDr. Jaromír BAŠTINEC, CSc.
Helena DURNOVÁ, Ph.D.
Mgr. Martin ŘEZÁČ

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Kapitola 1

Úvod

Tento učební text byl připraven pro potřeby posluchačů FEKT VUT. Je sestaven v souladu s aktuálními osnovami. Snahou autorů bylo podat problematiku srozumitelně a pokud možno elementárním způsobem. Někdy jsme dali přednost lepší srozumitelnosti podávané látky, než absolutní matematické přesnosti. Věříme, že to nebude na závadu ve správném chápání látky.

Prosíme studenty a další čtenáře, aby zjištěné nedostatky v textu zaslali hlavnímu autoru na e-mailovou adresu (`diblik@feec.vutbr.cz`). Materiál průběžně upravujeme a Vaše připomínky v případě jejich věcné správnosti zahrneme do učebního textu.

1.1 Vstupní test

Příklad 1.1 *Upravte* $\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b^3}}}\cdot\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{18}-\left(\frac{\sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}\right)^{18}}{a-b}$.

Příklad 1.2 *Řešte nerovnici* $\sqrt{x^2+x-12} < x+4$

Příklad 1.3 *Řešte nerovnici* $|\,x\,| - |\,x-1\,| \leq |\,x+1\,| + |\,x-2\,|$

Příklad 1.4 *Pro jakou hodnotu parametru má rovnice* $x^2+3\sqrt{n}x+n+1=0$ *právě jeden kořen?*

Příklad 1.5 *Je-li* $\sin x = \frac{3}{5}$ $, x \in \langle 0,\, \frac{\pi}{2}\rangle$, *pak* $\cos x = ?$

Příklad 1.6 *V* $\mathbb{R}$ *Řešte rovnici* $2^{x-1} \leq log_2\sqrt[5]{2^2} + log_3\left(3^{10^{-1}}\right)^6$.

Příklad 1.7 *V* $\mathbb{R}$ *Řešte rovnici* $\frac{log(x^2-9)}{log(x+1)} = 2$

Příklad 1.8 *Upravte* $\frac{1+i}{i}$ *na tvar* $a+bi, a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.9 *Jakou částku vyděláte po 10 letech na úrocích, je-li Váš počáteční vklad 10 Kč a roční úroková sazba* 100%*?*

Příklad 1.10 *Určete součet čísel* $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

Příklad 1.11 *Určete v jaké vzájemné poloze jsou přímky dané rovnicemi* $2x - 3y + 13$ *a* $3x + 2y - 12 = 0$.

Výsledky lze nalézt v kapilole 15.1.

1.2 Označení

V tomto textu budeme často užívat řadu symbolů a značení. Všechny jsou uváděny v textu průběžně. Zde uvádíme tabulku, obsahující některé z nich.

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n-tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupci)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
$\mathcal{O}$	nulová matice
$det\, A = \lvert A \rvert$	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$adj\, A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$hod\,(A)$	hodnost matice A
$(\mathbb{R}^n, +, .)$	vektorový prostor všech uspořádaných n-tic
$\dim P$	dimenze prostoru P.
$a \cdot a$	skalární součin vektorů a, b
$\lVert x \rVert$	norma vektoru x
$\square$	konec důkazu
$\langle A \rangle$	lineární obal množiny A
$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$	matice přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{A}'$
$a \perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f\lvert_V = g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A \times B$	kartézský součim množin A, B
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$[a, b, c]$	smíšený součin vektorů a, b, c

Kapitola 2

Základní pojmy matematické logiky. Množiny. Funkce

2.1 Cíl kapitoly

Matematika slouží k popisu různých přírodních jevů a technických problémů. V této kapitole si zopakujeme, nebo se seznámíme, s množinami a jejich vlastnostmi a se základy matematické logiky, které budeme dále používat.

Matematika je budována postupně od nejjednodušších pojmů a struktur ke složitějším. Proto je zde připomenuto členění na axiomy, definice, věty a jsou připomenuty druhy důkazů. Budou uvedeny základní číselné množiny a jejich označení.

Vedle racionálních čísel budeme často pracovat i s komplexními čísly. Uvedeme si algebraický, trigonometrický i exponenciální tvar komplexního čísla a jak se převádí komplexní číslo z jednoho tvaru do druhého. Dále si ukážeme jak se komplexní čísla sčítají, násobí, umocňují a odmocňují.

Jedením ze základních matematických pojmů je pojem funkce. Uvedeme si jej a jaké základní vlastnosti má. Zavedeme si pojem inverzní funkce a připomeneme si elementární funkce.

Speciálním případem funkce jsou mnohočleny. Protože se vyskytují v mnoha aplikacích, budeme se jim speciálně věnovat a ukážeme si některé jejich typické vlastnosti, jako je třeba rozklad polynomu na součin kořenových činitelů, Hornerovo schéma pro výpočet hodnoty polynomu, atd. Na závěr se budeme věnovat rozkladu racionální lomenné funkce na parciální zlomky.

2.2 Základní matematické pojmy

2.2.1 Množina

V matematice nazýváme jakýkoliv soubor či systém objektů množinou. Můžeme například mluvit o množině všech stromů na pasece, o množině hus pasoucích se na louce či o množině všech celých čísel.

Značí-li A množinu všech předmětů a x je jeden z těchto předmětů, říkáme, že x je prvkem množiny A (x patří do A) a píšeme $x \in A$.

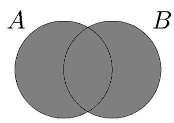
Není-li y prvkem A, píšeme $y \notin A$ nebo $y \bar{\in} A$.

Jestliže pro libovolné x má vztah $x \in A$ vždy za následek vztah $x \in B$, potom říkáme, že množina A je obsažena v B a nazýváme ji podmnožinou množiny B. V tom případě píšeme $A \subset B$. Relace $A = B$ je speciálním případem relace $A \subset B$. Platí-li $A \subset B$ a také $B \subset A$, pak píšeme $A = B$.

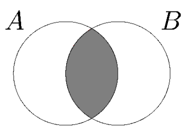
Je nutné zavést také pojem prázdné množiny neobsahující žádné prvky, tzv. *prázdnou množinu*, kterou značíme $\emptyset$.

Definujeme:

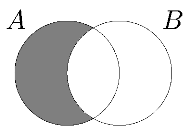
- sjednocení množin A a B jako množinu C obsahující prvky množin A i B. Sjednocení množin značíme $A \cup B (A + B)$ (viz obr.2.2.1);
- průnik množin A a B jako množinu C obsahující ty prvky, které patří do množiny A i B; značíme $A \cap B (AB)$ (viz obr.2.2.2);
- rozdíl množin A a B jako množinu C obsahující ty prvky množiny A, které nejsou obsaženy v množině B; značíme $A \setminus B (A - B)$ (viz obr.2.2.3);



Obrázek 2.2.1: $A \bigcup B$



Obrázek 2.2.2: $A \bigcap B$



Obrázek 2.2.3: $A \setminus B$

2.3 Elementy matematické logiky

2.3.1 Kvantifikátory

Za základní kvantifikátory považujeme následující dva:

- Existenční kvantifikátor: $\exists$ (existuje); např. $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = 5$ čteme „Existuje takové reálné číslo x, pro něž platí rovnost $x+2 = 5$“. (Čtenář jistě vidí, že se jedná o výrok pravdivý, neboť rovnost splňuje reálné číslo 3.)
- Obecný kvantifikátor: $\forall$ (pro všechny, pro každé); např. $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 < x$ čteme „Pro všechna reálná čísla x platí nerovnost $x - 1 < x$“. (Opět se jedná o výrok pravdivý, neboť odečteme-li od libovolného reálného čísla číslo 1, dostaneme číslo menší než zadané.)

2.3.2 Tvrzení, věty, logické symboly

Jako *tvrzení* lze označit např. výrok *Kniha je bílá. Matematická věta*, resp. *matematické tvrzení* je pravdivý matematický výrok, který má význam v matematické teorii. Matematickou větu nazýváme také *pravidlo* (obsahuje-li návod k výpočtu) nebo *lemma* (jedná-li se o pomocnou větu). Je-li tvrzení pravdivé, říkáme, že výrok platí, např. $2 + 3 = 5$. O nepravdivém tvrzení (nepravdivé formuli, kontradikci) mluvíme tehdy, když výrok neplatí, např. $x^2 < -100$.

Rozlišujeme následující typy výroků:

- Negace: $\neg\ x > 0$ je ekvivalentní s výrokem $x \leq 0$
- Konjunkce: $\wedge$ (a, a zároveň); např. $(x > 5) \wedge (x \leq 6)$ je ekvivalentní s výrokem $5 < x \leq 6$
- Disjunkce: $\vee$ (platí jedno nebo druhé nebo obojí); např.
$$(x > 5) \vee (x \leq 6) \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$$
- Implikace: $\Longrightarrow$ (jestliže … pak); např $x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$
- Ekvivalence: $\Longleftrightarrow$ (tehdy a jen tehy); např. $x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$

V následující tabulce označují symboly 1 (0) po řadě skutečnost, že složený výrok v záhlaví je (není) pravdivý.

Z tabulky je patrné, že konjunkce dvou výroků $(A \wedge B)$ je pravdivá pouze tehdy, když jsou oba výroky A, B pravdivé.

Disjunkce dvou výroků $(A \vee B)$ je naopak nepravdivá pouze tehdy, když není pravdivý ani jeden z výroků A, B.

Implikace $(A \Longrightarrow B)$ je nepravdivá pouze tehdy, je-li první výrok pravdivý a druhý nikoliv.

Ekvivalence $(A \Longleftrightarrow B)$ je nepravdivá tehdy, je-li jeden z výroků A, B pravdivý a druhý nikoliv.

Tabulka 2.3.1: Tabulka pravdivostních hodnot složených výroků

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

2.4 Definice, věty, druhy důkazů

Důkaz přímý: Pro důkaz tvrzení $P \implies Q$ sestavíme řetězec pravdivých implikací $P \implies P_1 \implies P_2 \implies \dots \implies P_n \implies Q$.

Důkaz nepřímý: Dokážeme (přímo) obměnu implikace $P \implies Q$, tedy $\neg Q \implies \neg P$.

Důkaz sporem: Vyjdeme z negace $\neg P$ dokazovaného tvrzení P a pomocí pravdivých implikací odvodíme tvrzení nepravdivé. Tedy původní tvrzení P je pravdivé.

Důkaz matematickou indukcí: Tento důkaz používáme pro dokazování tvrzení typu *pro všechna $n \in \mathbb{N}$, resp. pro všechna $n \geq n_0$ platí P*. Důkaz sestává ze dvou částí: v prvním kroku dokážeme tvrzení pro n_0 a ve druhém (indukčním) kroku dokážeme, že platí-li výrok P pro n, pak platí i pro $n + 1$.

2.5 Číselné množiny

Definujeme následující číselné množiny:

- $\mathbb{N}-$ množina přirozených čísel; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}-$ množina všech celých čísel;
  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}-$ množina racionálních čísel; $\left\{\frac{m}{n}\right\}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$
- $\mathbb{Q}^+-$ množina iracionálních čísel (např. $\sqrt{2}, e$ (základ přirozeného logaritmu), π (Ludolphovo číslo), $\log 5, \dots$)
- $\mathbb{R}-$ množina reálných čísel; $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$
- $\mathbb{C}-$ množina komplexních čísel $\{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ Symbol i, popř. j označuje tzv. komplexní jednotku, pro niž platí: $j^2 = -1$. Komplexní číslo lze zapsat v různých tvarech, např. algebraickém: $z = a + jb$ či goniometrickém $z =$.[1]
- Platí: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

[1] V elektrotechnice se komplexní jednotka označuje j, neboť se písmeno i používá pro označení proudu. Budeme tedy komplexní jednotku označovat j místo v matematických textech obvykle užívaného i.

2.6 Intervaly

Budeme interpretovat čísla jako body (celočíselné nebo reálné osy) a naopak body přímky jako čísla. Množina čísel x splňujících nerovnosti $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$) se nazývá uzavřený (resp. otevřený) interval s koncovými body a a b. Analogicky definujeme intervaly polootevřené, polouzavřené a nekonečné:

- uzavřený interval: $[a, b]$ nebo $< a, b >$, $a \leq x \leq b$
- otevřený interval: (a, b) nebo $]a, b[$, $a < x < b$
- polootevřený (polouzavřený) interval: $[a, b)$, $a \leq x < b$ ($(a, b]$, $a < x \leq b$)
- nekonečné intervaly: $(-\infty, \infty), (-\infty, a], (-\infty, a), (a, \infty), [a, \infty)$.

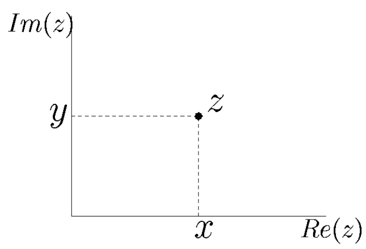
2.7 Základní vlastnosti komplexních čísel

2.7.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Číslo

$$z = x + jy,$$

kde x a y jsou libovolná reálná čísla a j je *komplexní, popř. imaginární jednotka*, se nazývá *algebraický tvar* komplexního čísla. Pak x se nazývá *reálná* a y *imaginární část* komplexního čísla z.



Obrázek 2.7.4: Komplexní číslo $z = x + jy$ v komplexní rovině

Podle definice jsou si dvě komplexní čísla *rovna* tehdy a jen tehdy, jsou-li si rovny jejich reálné a imaginární části. Potom je rovnost

$$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2$$

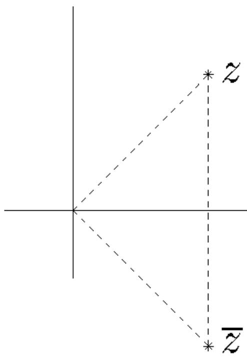
ekvivalentní dvěma rovnostem

$$x_1 = x_2 \qquad \text{a} \qquad y_1 = y_2.$$

Komplexní číslo $z = x + jy$ lze zobrazit jako bod v rovině $0xy$, na jejíž ose x je znázorněna reálná část z a na ose y imaginární část z (viz náčrtek 2.7.4). Pro účely tohoto zobrazení se osa x nazývá *reálná osa*, osa y se nazývá *imaginární osa* a rovina Oxy se pak nazývá *komplexní rovina.*

Komplexní číslo si lze představit také jako vektor, jehož počátek je totožný s počátkem soustavy souřadnic a konec s bodem, na nějž se zobrazí dané komplexní číslo. Souřadnice vektoru na osách x a y znázorňují reálnou a imaginární část komplexního čísla z.

Je-li $y = 0$, pak komplexní číslo $z = x + i0 = x$ je reálné číslo znázorněné bodem reálné osy; je-li naopak $x = 0$, číslo $z = 0 + jy = jy$ se nazývá *ryze imaginární* a je znázorněno bodem $(0, y)$ ležícím na imaginární ose.



Obrázek 2.7.5: $z, \overline{z}$ - čísla komplexně sdružená

Číslo komplexně sdružené (viz obr.2.7.5) s daným komplexním číslem $z = a + jb$ značíme $\overline{z}$. Je definováno jako

$$\overline{z} = a - jb.$$

Operace *odčítání* je definována jako operace inverzní ke sčítání; tj. $z = a+jb$ se nazývá *rozdíl* mezi komplexními čísly $z_1 = a_1+jb_1$ a $z_2 = a_2+jb_2$, platí-li $a = a_1-a_2$ a $b = b_1-b_2$.

Operaci *násobení* komplexních čísel v algebraickém tvaru provádíme podobně jako násobení dvou polynomů, tj. pro součin $z = a + jb$ komplexních čísel $z_1 = a_1 + jb_1$ a $z_2 = a_2 + jb_2$ platí $a = a_1a_2 - b_1b_2$ a $b = a_1b_2 + a_2b_1$.

Operace *dělení* komplexních čísel je definována jako operace inverzní k operaci násobení. Komplexní číslo $z = a + jb$ se nazývá *podílem (kvocientem)* komplexních čísel $z_1 = a_1 + jb_1$ a $z_2 = a_2 + jb_2$, platí-li $z_1 = z \cdot z_2$. Řešením této rovnice (za předpokladu, že $z_2 \neq 0$) dostáváme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \cdot \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ .$$

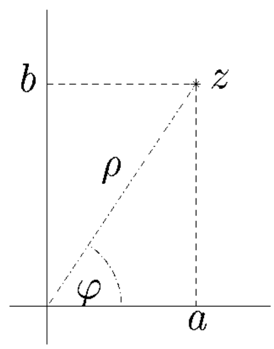
2.7.2 Trigonometrický tvar komplexního čísla

Jelikož je komplexní číslo definováno jako dvojice čísel reálných, je přirozené zobrazovat komplexní číslo $z = a + jb$ jako bod v rovině xy s kartézskými souřadnicemi $x = a$ a $y = b$. Tuto rovinu nazveme **komplexní rovinou;** osa x se nazývá *reálná* osa, osa y se nazývá *imaginární* osa komplexní roviny. Je také možné definovat pozici bodu v rovině pomocí polárních souřadnic (ρ, φ), kde ρ je vzdálenost bodu od počátku souřadnic a φ je úhel, který svírá vektor průvodič s kladnou poloosou osy x. Kladný směr pro měření úhlu φ je směr proti pohybu hodinových ručiček. Využijeme-li vztahu mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

dostáváme takzvaný **trigonometrický** (nebo *polární*) tvar zápisu komplexního čísla:

$$z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$



Obrázek 2.7.6: Trigonometrický tvar komplexního čísla

Vzdálenost ρ se nazývá *modul* nebo *absolutní hodnota* z; úhel φ se nazývá *argument* nebo *amplituda* z (viz obr.2.7.6). Obvykle používáme značení

$$\rho = |z|, \varphi = \mathrm{Arg} z.$$

Je-li $z = a + jb$, pak

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \mathrm{tg}\,(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

Argument komplexního čísla je jednoznačně definován až na periodu 2π. Je vhodné označit jako $\arg z$ hodnotu argumentu v intervalu

$$\varphi_0 \leq \arg z \leq 2\pi + \varphi_0,$$

kde φ_0 je libovolné pevně zvolené číslo (např. $\varphi_0 = 0$ nebo $\varphi_0 = \pi$). Pak

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Hodnota $\arg z$ se nazývá *hlavní* hodnota argumentu. V následujícím budeme používat $\varphi_0 = 0$.
Argument komplexního čísla $z = 0$ není definován a jeho modul je roven nule.
Dvě nenulová komplexní čísla jsou si *rovna* tehdy a jen tehdy, když jsou si rovny jejich moduly a hodnoty argumentů se buďto rovnají, nebo se liší o násobek 2π.

2.7.3 Exponenciální tvar komplexního čísla

Exponenciální tvar (exponenciální označení) komplexního čísla

$$z = \rho e^{j\varphi}$$

lze získat z trigonometrického tvaru užitím tzv. *Eulerovy formule*:

$$\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

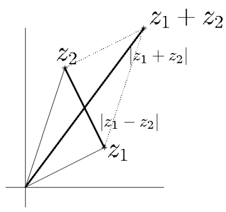
Podle pravidel pro násobení a dělení dostáváme pro $z_1 = \rho_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1}$ a $z_2 = \rho_2 \mathrm{e}^{j\varphi_2}$:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad (2.7.1)$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{j(\varphi_1-\varphi_2)}\ .$$

Pro rovnost dvou komplexních čísel zadaných v exponenciálním tvaru platí stejné podmínky jako u čísel zadaných v trigonometrickém tvaru.



Obrázek 2.7.7: $|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|$

Operace sčítání a odčítání komplexních čísel odpovídají operacím sčítání a odčítání vektorů (viz obrázek 2.7.7): součet dvou komplexních čísel (vektorů) z_1 a z_2 je vektor $z_1 + z_2$. Analogicky se sestrojí vektor $z_2 - z_1$ jako rozdíl vektorů z_2 a z_1. Tak okamžitě dostáváme trojúhelníkové nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

2.7.4 Moivreova věta

Postupným použitím vztahu (2.7.1) lze obdržet tzv. *Moivreovu větu:*

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi),$$

kde n je kladné celé číslo.

2.7.5 Odmocňování komplexního čísla

Komplexní číslo $z_1 = \sqrt[n]{z}$ se nazývá n-tou odmocninou komplexního čísla z, jestliže platí $z = z_1^n$. Je-li $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ potom podle Moivreovy věty (nebo Eulerovy formule) platí:

$$z_1^n = \rho_1^n(\cos n\varphi_1 + j\sin n\varphi_1).$$

Je-li komplexní číslo z zadané v goniometrickém tvaru jako $z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, pak se čísla z a z_1 rovnají, platí-li:

$$\rho = \rho_1^n \text{ a } \varphi = n\varphi_1,$$

tedy

$$\rho_1 = \sqrt[n]{\rho} \text{ a } \varphi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Jak bylo výše uvedeno, argument komplexního čísla je definován jednoznačně až na periodu 2π. Z toho důvodu dostáváme pro argument komplexního čísla z_1 celkem n různých hodnot, které se navzájem liší o celočíselný násobek n-tiny úhlu 2π. Budeme je značit φ_1^k. Platí:

$$\varphi_1^k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n},$$

kde za $k = 0, 1, \dots, n-1$ a φ je jedna z hodnot argumentu komplexního čísla z. Tedy existují různá komplexní čísla která, umocněná na n-tou, jsou rovna témuž komplexnímu číslu z. Moduly těchto komplexních čísel jsou stejné a jsou rovny $\sqrt[n]{\rho}$, jejich argumenty se liší o násobky $\frac{2\pi}{n}$. Počet různých hodnot n-tých odmocnin komplexního čísla z je n. Body v komplexní rovině odpovídající různým hodnotám n-té odmocniny komplexního čísla z leží ve vrcholech pravidelného $n-$úhelníka vepsaného do kruhu o poloměru $\sqrt[n]{\rho}$ se středem v bodě $z = 0$. Odpovídající hodnoty φ_1^k získáme tak, že za k dosadíme hodnoty $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Klasická analýza položila problém rozšíření reálných čísel takovým způsobem, aby výsledkem nejen elementárních operací sčítání a násobení, ale také operace odmocňování bylo číslo z téže (rozšířené) číselné množiny. Komplexní čísla tento problém řeší.

Dostali jsme vzorec

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Příklad 2.1 *Najděte všechny hodnoty $\sqrt{j}$.*

Řešení. Nechť $z = j = e^{j\pi/2}$. Pak

$$z_k = \cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + j\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2},\ k = 0, 1$$

a

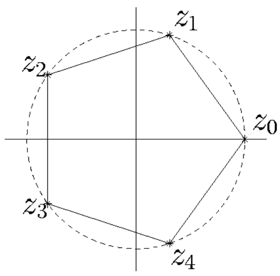
$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Příklad 2.2 *Graficky znázorněte všechna řešení rovnice* $z^5 = 1$.

Řešení. Užitím výše uvedeného vzorce dostáváme

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + j\sin\frac{2k\pi}{5},\ k = 0, 1, \ldots, 4.$$

Poloha komplexních čísel z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 je znázorněna na obrázku 2.7.8.



Obrázek 2.7.8: Řešení rovnice $z^5 = 1$

2.8 Zavedení pojmu funkce, inverzní funkce

Nechť D_f je číselná množina a nechť je dán jistý předpis, podle něhož každému číslu $x \in D_f$ přiřadíme (jedinou) hodnotu y. Pak říkáme, že na množině D_f je definována (jednohodnotová) funkce a píšeme: $y = f(x), (x \in D_f)$. Hodnotu y nazýváme *hodnotou funkce* (nebo také *funkcí* či *závisle proměnnou*), hodnotu x nazýváme *argumentem* (popř. *nezávisle proměnnou*).

Množinu D_f nazýváme *definičním oborem funkce* a množinu H_f nazýváme *oborem hodnot funkce*. Dále říkáme, že funkce f zobrazuje množinu D_f na množinu H_f a f nazýváme *zobrazením*, množinu H_f nazýváme *obrazem* množiny D_f.

Pojem funkce můžeme chápán také geometricky jako popis množiny bodů se souřadnicemi (x, f_x), kde $x \in D_f$, $y = f(x)$. Tuto množinu bodů nazýváme *grafem funkce* $y = f(x)$.

2.8.1 Speciální typy funkcí

Definice 2.3 *Nabývá-li funkce $f(x)$ různých hodnot pro různé hodnoty x, říkáme, že je* prostá.[2]

[2]Pomocí kvantifikátorů tuto skutečnost zapisujme takto:
Platí-li $\forall x_1, x_2 \in D_f\ (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, pak $f(x)$ se nazývá prostá.

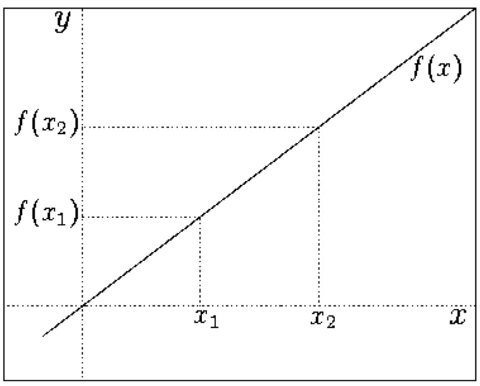
Příklad 2.4 *Jsou funkce $y = x^2, y = \cos x, y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ prosté ve svých definičních oborech D_f?*

Řešení. Funkce $y = f_1(x) = x^2$ a $y = f_2(x) = \cos x$ mají stejný definiční obor $D_f = \mathbb{R}$. Nejsou prosté, neboť pro první funkci platí $f_1(x) = f_1(-x)$ pro každé $x \in D_f, x \neq 0$ a pro druhou funkci platí například $f_2(0) = f_2(\pi) = 1$. Funkce $y = f_3(x) = \frac{1}{x}$ má $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a je prostá, neboť vztah $f_3(x_1) = f_3(x_2)$ nemůže platit pro $x_1 \neq x_2$, tj. $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

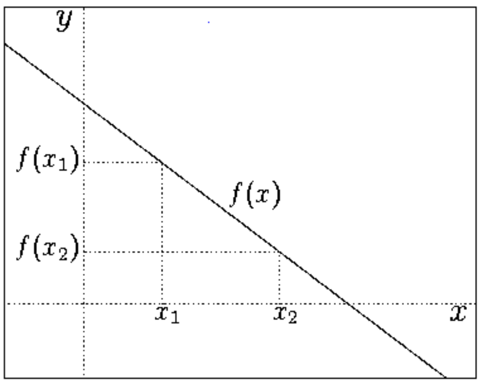
Definice 2.5 *Funkce $f(x)$ je na intervalu $I \subseteq D_f$:*

- *rostoucí, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$ (viz náčrtek 2.8.9)*
- *klesající, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$ (viz náčrtek 2.8.10)*
- *nerostoucí, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$ (viz náčrtek 2.8.11)*
- *neklesající, jestliže $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$. (viz náčrtek 2.8.12)*

Tyto typy funkcí jsou ilustrovány na obrázcích.



Obrázek 2.8.9: Funkce rostoucí



Obrázek 2.8.10: Funkce klesající

Definice 2.6 *Rostoucí a klesající funkce se nazývají ryze monotónní.*

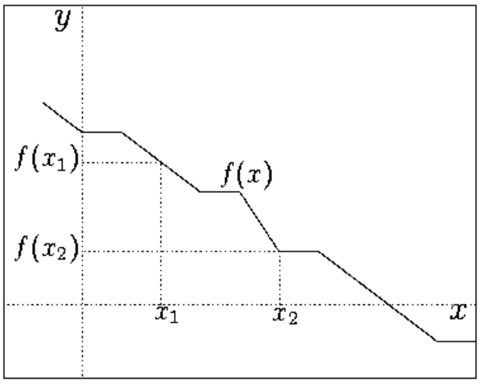
Definice 2.7 *Funkce $f(x)$ se nazývá omezená, jestliže*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in D_f : \;\; |f(x)| \leq M.$$

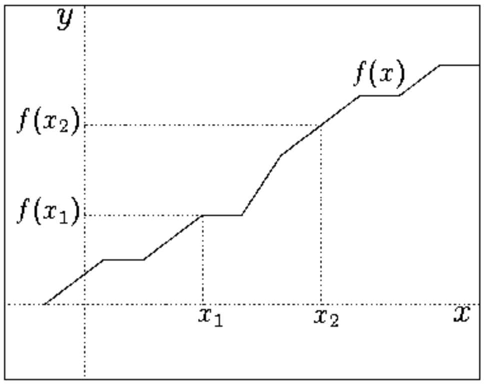
Příklad 2.8 *Jsou funkce $f(x) = x^2, f(x) = \sin x$ omezené?*

Řešení. Funkce $f(x) = x^2$ omezená není. Předpokládejme, že existuje číslo M dle výše uvedené definice. Pak stačí položit. např. $x = M + 1$. Je zřejmé, že $f(M+1) = (M+1)^2 > M$.

Funkce $f(x) = \sin x$ je omezená: stačí položit např. $M = 1$.



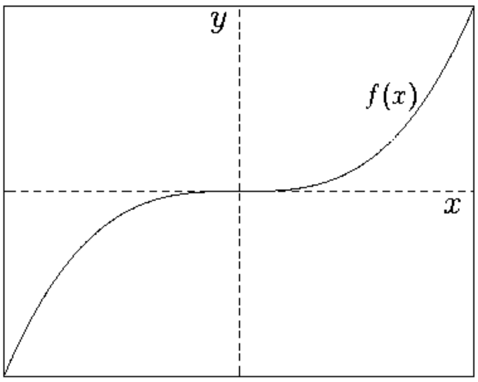
Obrázek 2.8.11: Funkce nerostoucí



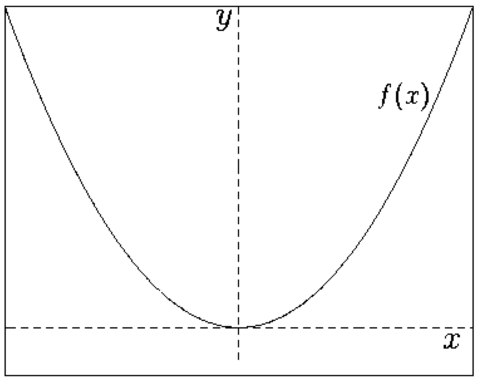
Obrázek 2.8.12: Funkce neklesající

Definice 2.9 *Funkce $f(x)$ se nazývá:*

- *lichá, jestliže* $\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$, *(viz náčrtek 2.8.13)*
- *sudá, jestliže* $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$, *(viz náčrtek 2.8.14)*
- *periodická, jestliže* $\exists\ \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f : f(x + \omega) = f(x)$ *(viz náčrtek 2.8.15).*



Obrázek 2.8.13: Funkce lichá

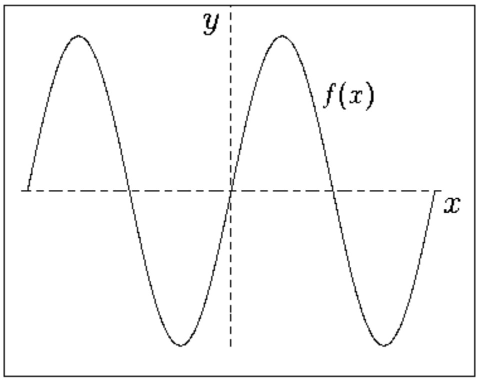


Obrázek 2.8.14: Funkce sudá

2.9 Inverzní funkce

Uvažujme libovolnou funkci $y = f(x)$ definovanou na množině E a označme její obraz jako $E_1 = f(E)$. Přiřaďme každému $y \in E_1$ množinu všech $x \in E$, pro něž $y = f(x)$. Dostáváme funkci $x = \varphi(y)$ definovanou na E_1. Funkce $\varphi(y)$ se nazývá funkce inverzní k $f(x)$. Budeme předpokládat, že inverzní funkce je *prostá*. Dostáváme zřejmé identity:

$$\varphi[f(x)] = x,\ x \in E$$



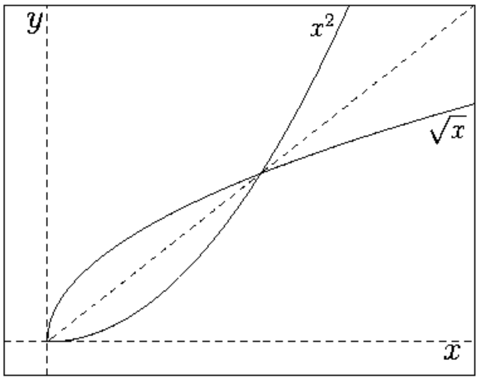
Obrázek 2.8.15: Funkce periodická

a

$$f[\varphi(y)] = y,\ y \in E_1.$$

Někdy je pohodlné označit funkci inverzní k f symbolem f^{-1}. Pak $f^{-1}f(x) = x$, $x \in E$ a $ff^{-1}(y) = y$, $y \in E_1$.

Například Funkce $f(x) = x^2$ a $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, (neboli $y = x^2$ a $x = \sqrt{y}$) pro $x \geq 0$ jsou navzájem inverzní (viz obr. 2.9.16). Funkce $y = kx, k \neq 0, k \in \mathbb{R}$ má inverzní funkci $y = \frac{1}{k}x$ a naopak.



Obrázek 2.9.16: Funkce inverzní

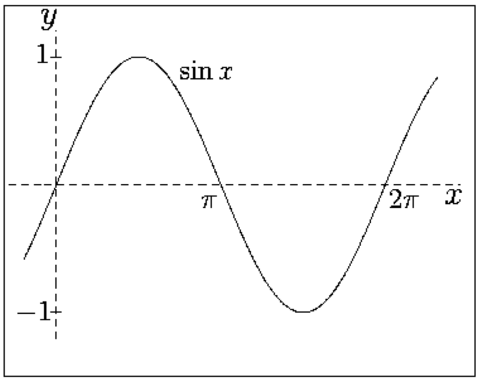
Věta 2.10 *Grafy inverzních funkcí $f(x)$, $f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle osy $y = x$.*

Důkaz. Nechť jsou dány inverzní funkce $y = f(x)$, $y = g(x)$ a $f[g(x)] = x$, $x \in E$. Je-li $b = f(a)$, pak musí platit $g(b) = a$ a body $[a, b]$, $[b, a]$ jsou symetrické podle osy $y = x$.

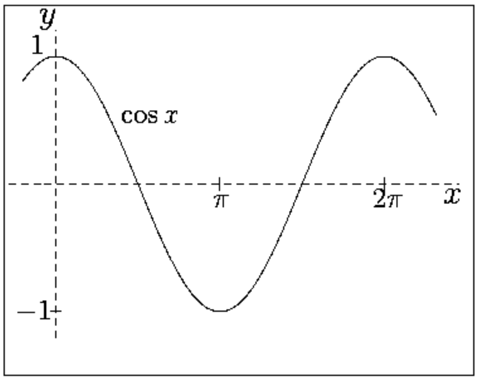
2.10 Trigonometrické funkce

Základní trigonometrickými funkcemi jsou:

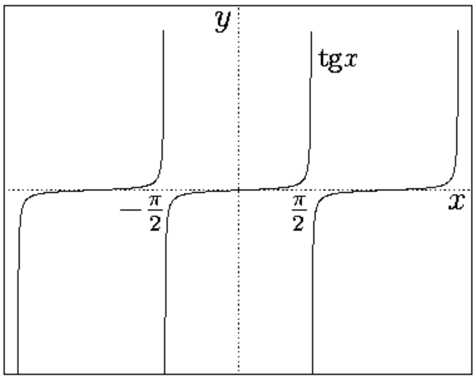
- Funkce sinus: $\sin\alpha$ (viz náčrtek 2.10.17)
- Funkce kosinus: $\cos\alpha$ (viz náčrtek 2.10.18)
- Funkce tangens: $\mathrm{tg}\alpha$ (viz náčrtek 2.10.19)
- Funkce kotangens: $\mathrm{cotg}\alpha$ (viz náčrtek 2.10.20)



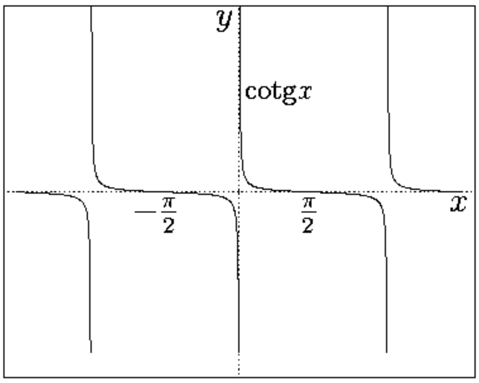
Obrázek 2.10.17: Funkce sinus



Obrázek 2.10.18: Funkce kosinus



Obrázek 2.10.19: Funkce tangens



Obrázek 2.10.20: Funkce kotangens

2.11 Inverzní trigonometrické funkce

Inverzními funkcemi k základním trigonometrickým funkcím jsou následující funkce (souhrnně označované *cyklometrické*):

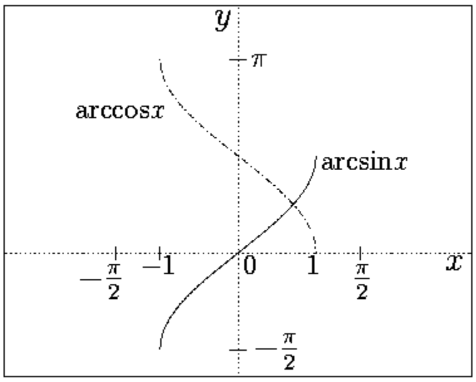
- $y = \arcsin x$ („arkus sinus“) je inverzní k funkci $y = \sin x$;
  $\arcsin(\sin x) \equiv x, \sin(\arcsin x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$. (viz náčrtek 2.11.21)

- $y = \arccos x$ („arkus kosinus“) je inverzní k funkci $y = \cos x$;
  $\arccos(\cos x) \equiv x, \cos(\arccos x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$. (viz náčrtek 2.11.21)

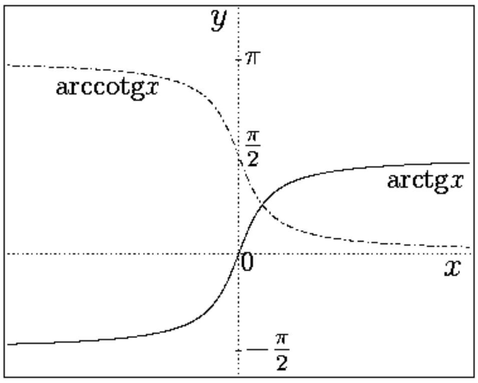
- $y = \operatorname{arctg} x$ („arkus tangens“) je inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$;
  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$, (viz náčrtek 2.11.22)

- $y = \operatorname{arccotg} x$ („arkus kotangens“) je inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$;
  $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) \equiv x, \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$. (viz náčrtek 2.11.22)

Znalost průběhu základní funkcí je velmi užitečná při stanovení různých důležitých údajů, například o jejich maximálních a minimálních hodnotách, o jejich asymptotách atd. (viz například část 6.15, str. 110).



Obrázek 2.11.21: Funkce Arcsin, Arccos



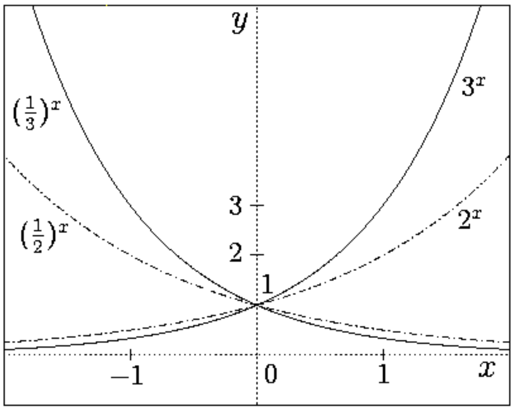
Obrázek 2.11.22: Funkce Arctg, Arccotg

2.12 Exponenciální a logaritmické funkce

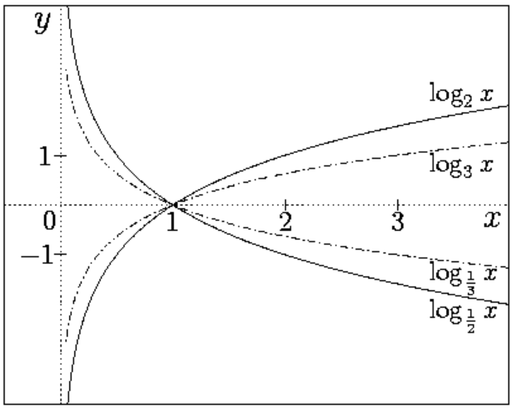
Funkcemi exponenciálního a logaritmického typu nazýváme následující typy funkcí:

- $y = a^x$ (exponenciální funkce), $D_f = \mathbb{R}, a > 0, a \in \mathbb{R}$. Na náčrtku 2.12.23 vidíme příklad exponenciální funkce pro $a = 2$, $a = 3$, $a = 1/2$ (funkce “12nax”) a $a = 1/3$ (funkce “13nax”).

- $y = \log_a x$ (logaritmická funkce) $D_f = (0, \infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$ je inverzní k exponenciální funkci. Grafy některých logaritmických funkcí jsou znázorněny na náčrtku 2.12.24. (Značení jednotlivých grafů je analogické jako u funkcí exponenciálních.)



Obrázek 2.12.23: Funkce exponenciální



Obrázek 2.12.24: Funkce logaritmická

Platí tedy následující ekvivalence:

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y\,.$$

Definice 2.11 Logaritmem *čísla x při základu a nazýváme číslo y takové, že $a^y = x$. Předpokládáme, že $a > 0$, $a \neq 1$ a $x > 0$. Zapisujeme: $y = \log_a x$.*

Následující vzorec, nazývaný vzorcem pro přechod k jinému základu, je často užitečný:

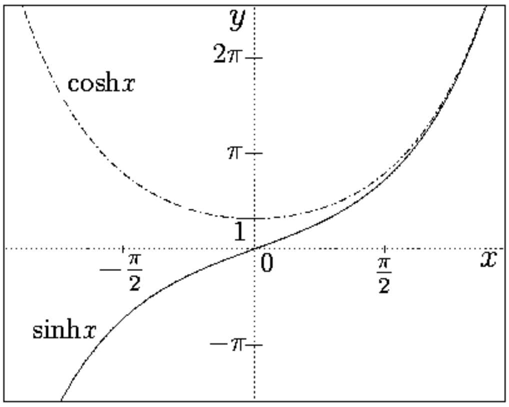
$$\log_\beta \alpha = \frac{\log_\gamma \alpha}{\log_\gamma \beta}$$

Je-li $a = 10$, pak místo $\log_{10}$ píšeme $x = \log x$. Tento logaritmus (o základu 10) nazýváme *dekadický*. Je-li $a = \mathrm{e}$, pak místo $\log_e$ píšeme $x = \ln x$ a tento logaritmus (při základu e) nazýváme *přirozený*.

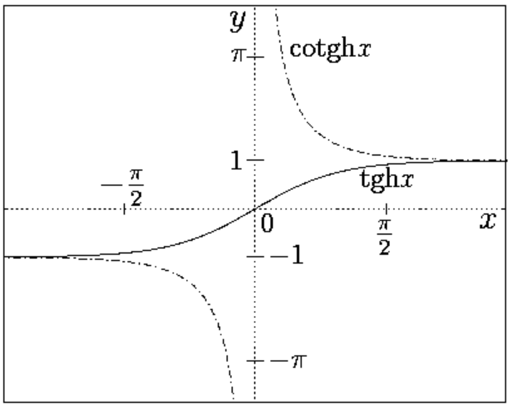
2.13 Hyperbolické a inverzní hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou definovány následujícími vztahy:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hyperbolický sinus, viz náčrtek 2.13.25)
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (hyperbolický kosinus , viz náčrtek 2.13.25)
- $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (hyperbolický tangens, viz náčrtek 2.13.26)
- $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (hyperbolický kotangens, viz náčrtek 2.13.26)



Obrázek 2.13.25: Funkce hyperbolický sinus (sinh) a cosinus(cosh)



Obrázek 2.13.26: Funkce hyperbolický tangens (tgh) a cotangens (cotgh)

Inverzní hyperbolické funkce, nazývané *hyperboometrické*, jsou:

- $y = \operatorname{argsinh} x$ ("arkus sinus hyperbolický') je funkcí inverzní k funkci $y = \sinh x$
- $y = \operatorname{argcosh} x$ ("arkus kosinus hyperbolický') je funkcí inverzní k funkci $y = \cosh x$
- $y = \operatorname{argtgh} x$ ("arkus tangens hyperbolický') je funkcí inverzní k funkci $y = \operatorname{tgh} x$
- $y = \operatorname{argcotgh} x$ ("arkus kotangens hyperbolický') je funkcí inverzní k funkci $y = \operatorname{cotgh} x$

Uveďme některé vztahy, které platí pro hyperbolometrické funkce:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{tgh}^2 x}$
- $\sinh^2 x = \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{1-\operatorname{tgh}^2 x}$

2.14 Komplexní funkce reálné proměnné

Předpokládejme, že je dán rovinný vektor $\vec{A}$, který závisí na parametru t, tj. $\vec{A} = \vec{A}t$. Pak můžeme psát

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \qquad (2.14.2)$$

kde $\vec{i}$ a $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory na osách x a y. Křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ (kterou získáme tak, že za parametr t budeme dosazovat všechny hodnoty z nějaké číselné množiny) leží celá v rovině Oxy. V tomto případě je příhodné považovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

za geometrickou reprezentaci komplexního čísla $z = x + iy$ a hovořit místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t. Pozor, vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ nelze zaměňovat s imaginární jednotkou označovanou i nebo j.

Definice 2.12 *Jestliže je každé hodnotě parametru t přiřazeno určité komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{2.14.3}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce *reálného argumentu t.*

Parametr t nabývá hodnot z daného intervalu. *Graf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je, podle definice, křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy, hodografy vektorové funkce (2.14.2) a komplexní funkce (2.14.3) jsou shodné.

Příklad 2.13 *Pro funkci*

$$z(t) = t + it^2, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. Hodografem je parabola $y = x^2$. Pokud t nabývá hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, bod $[t; t^2]$ ležící na parabole se pohybuje tak, že kladná část osy y zůstává vždy vlevo.

2.15 Polynomy a racionální funkce

Definice 2.14 *Polynomem (mnohočlenem) n-tého stupně proměnné x nazveme výraz*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_n, \ldots, a_1, a_0$ jsou libovolná reálná či komplexní čísla, přičemž $a_n \neq 0$.

Polynom může být zapsán i ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Podle toho, z jaké množiny bereme koeficienty $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, mluvíme o polynomu celočíselném, reálném, racionálním, komplexním, atd. Polynomy můžeme sčítat, násobit číslem, násobit mezi sebou a dělit. Předpokládejme, že máme dva polynomy

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

a

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

kde $n \geq m$. Pak jejich součtem je polynom

$$P_n(x) + Q_m(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n,$$

α-násobkem (α je dané číslo) polynomu $P(x)$ je polynom

$$\alpha P_n(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$$

a součinem polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ je polynom

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \; j = 0, 1, \ldots, m.$$

Pro podíl polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ platí schematický vzorec

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \tag{2.15.4}$$

kde $R_k(x)$ je polynom (tzv. zbytek) stupně $k < m$, což můžeme zapsat ve tvaru

$$P_n(x) = S_{n-m}(x)Q_m(x) + R_k(x).$$

Polynom $S_{n-m}(x)$ nazýváme *částečným podílem.*

2.15.1 Euklidův algoritmus

Definice 2.15 *Polynom $D(x)$, který dělí beze zbytku polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ se nazývá společným dělitelem polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$. Polynom $D(x)$, který má ze všech společných dělitelů nejvyšší stupeň, se nazývá největší společný dělitel polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.*

Vyložíme nyní postup nazývaný *Euklidův algoritmus*, který slouží pro nalezení největšího společného dělitele dvou polynomů.

Nechť jsou dány nenulové polynomy P, Q, stupeň $P = \text{st } (P) > \text{st } (Q)$. Polynom P vydělíme polynomem Q a dostaneme částečný podíl S a zbytek R_1, pro který platí st $(R_1) <$ st (Q) (viz vztah 2.15.4):

$$P = QS + R_1.$$

Nyní vydělíme polynom Q zbytkem R_1 a získáme částečný podíl S_1 a zbytek R_2, kde st $(R_2) <$ st (R_1),

$$Q = R_1 S_1 + R_2.$$

Vydělíme polynom R_1 zbytkem R_2 a dostaneme

$$R_1 = R_2 S_2 + R_3.$$

Pokračujeme dále, až v k-tém kroku dostaneme

$$R_{k-2} = R_{k-1}S_{k-1} + R_k.$$

Protože st $(R_k) <$ st $(R_{k-1}) < \cdots <$ st $(R_2) <$ st $(R_1) <$ st $(Q) <$ st (P), po konečném počtu t kroků dostaneme

$$R_{t-2} = R_{t-1}S_{t-1} + R_t,$$
$$R_{t-1} = R_tS_t + 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že polynom R_t je dělitelem polynomu R_{t-1}. Dosazením do předposlední rovnosti dostaneme

$$R_{t-2} = R_tS_tS_{t-1} + R_t = R_t\left(S_tS_{t-1} + 1\right),$$

neboli R_t je i dělitelem polynomu R_{t-2} a tak můžeme pokračovat dále a ukázat, že všechny polynomy $R_j, j < t$ jsou dělitelné polynomem R_t, tedy i P a Q jsou dělitelné R_t.

Obráceně, necht' je polynom D společným dělitelem polynomů P a Q. Potom D bude dělitelem polynomu R_1. Jestliže D dělí Q a R_1, potom dělí i R_2. Jestliže dělí R_1 a R_2, dělí i R_3, atd., polynom D tedy musí dělit i R_t. R_t je tedy *největším společným dělitelem polynomů P a Q.*

2.15.2 Věty o kořenech polynomů

Definice 2.16 *Číslo α nazýváme kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže platí*

$$P_n(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Věta 2.17 (Základní věta algebry) *Každý polynom s reálnými nebo komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má aspoň jeden kořen (ten může být reálný nebo komplexní).*

Věta 2.18 (Bézoutova) *Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$ stupně $n \geq 1$ právě tehdy, když*

$$P_n(x) = (x-\alpha)Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $n-1$.

Důsledek 2.19 *Každý polynom $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, stupně $n \geq 1$ s (komplexními) kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, přičemž kořeny nemusí být navzájem různé, se dá rozložit na součin kořenových činitelů*

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Jinými slovy, každý polynom $P_n(x)$, $n \geq 1$ má právě n kořenů.

Poznamenejme ještě, že má-li polynom s reálnými koeficienty komplexní kořen $a + bj$, pak je jeho kořenem také číslo komplexně sdružené, tj. $a - bj$.

Definice 2.20 *Násobností kořene α rozumíme počet, kolikrát se α vyskytuje v rozkladu na kořenové činitele.*

Důsledek 2.21 *Kořen α polynomu $P_n(x)$ má násobnost k, jestliže $P_n(x)$ je dělitelný polynomem $(x-\alpha)^k$, ale není dělitelný polynomem $(x-\alpha)^{k+1}$.*

Věta 2.22 (Hornerovo pravidlo) *Pro výpočet hodnoty $r = P_n(\alpha)$ polynomu*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

v bodě $x = \alpha$ nebo pro určení koeficientů b_i polynomu

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

vzniklého dělením polynomu $P_n(x)$ členem $(x-\alpha)$ lze použít tento postup:

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n,\\
b_{n-2} &= b_{n-1}\alpha + a_{n-1},\\
\dots & \quad \dots\\
b_1 &= b_2\alpha + a_2,\\
b_0 &= b_1\alpha + a_1,\\
r &= b_0\alpha + a_0 = P_n(\alpha).
\end{aligned}$$

Je východné výpočty provádět pomocí následující tabulky:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
$x=\alpha$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	b_0	r

,

Důsledek 2.23 *Jestliže při použití Hornerova pravidla dostaneme $r = 0$, potom je α kořenem polynomu $P_n(x)$.*

Věta 2.24 (Vietovy vzorce) *Mezi koeficienty a kořeny polynomu*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

platí vztahy (tzv. Vietovy vzorce)

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),\\
a_{n-2} &= a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n),\\
\dots & \quad \dots\\
a_0 &= (-1)^n a_n(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n).
\end{aligned}$$

Důsledek 2.25 *Každý kořen dělí absolutní člen a_0.*

Věta 2.26 *Mějme polynom s celočíselnými koeficienty*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Celé číslo α může být kořenem, jestliže α dělí absolutní člen a_0.
Racionální číslo p/q (kde p je celé číslo a q je přirozené číslo nesoudělné s p) může být kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže p dělí absolutní člen a_0 a q dělí koeficient u nejvyšší mocniny a_n.

Definice 2.27 ((Racionální lomená funkce) *Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy. Jejich podíl*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazveme racionální funkcí lomenou. *Je-li $n < m$, mluvíme o racionální funkci* ryze *lomené.*

2.15.3 Rozklad na parciální zlomky

V mnohých matematických a technických aplikacích (např. u tzv. transformace Z nebo při integrování racionální lomené funkce v části 10.2) je nutné umět racionální lomenou funkci rozložit na součet jednodušších zlomků. Tyto zlomky se nazývají *parciální zlomky.* Následující věta podává informaci o jejich tvaru a o tvaru celého rozkladu.

Věta 2.28 *Každá racionální neryze lomená funkce $R(x)$ (tj. $n \geq m$) se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$R(x) = F(x) + G(x),$$

kde $F(x)$ je polynom stupně $n - m$ a $G(x)$ je racionální funkce ryze lomená.

Věta 2.29 (O rozkladu na parciální zlomky) *Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

s rozkladem jmenovatele na kořenové činitele nad $\mathbb{R}$

$$Q_m(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\dots(x^2+p_vx+q_v)^{s_v},$$

kde α_i, $i = 1, 2, \dots, r$ jsou reálné kořeny násobnosti k_i a kvadratický trojčlem $x^2 + p_jx + q_j$, kde $j = 1, 2, \dots, v$, $p_j^2 - 4q_j < 0$, reprezentuje dvojici komplexně sdružených kořenů s násobností s_j. Potom

$$\begin{aligned} R(x) = &\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{v}\left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2+p_jx+q_j)} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \dots + \frac{M_{js_j}x + N_{js_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}}\right), \end{aligned} \tag{2.15.5}$$

kde všechny koeficienty A_{ik}, M_{js}, N_{js} jsou reálná čísla.

Při hledání rozkladu (2.15.5) je nutno určit jeho koeficienty. Ilustrujme postup jejich hledání na několika příkladech.

Příklad 2.30 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$R(x) = \frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1}.$$

Řešení. Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů (nejlépe pomocí Hornerova schématu):

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2.$$

Máme jeden prostý reálný kořen $x = 1/2$ a jeden reálný kořen $x = -1$, který má násobnost 2. Podle předchozí věty o rozkladu na parciální zlomky dostaneme:

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Neznámé koeficienty určíme tak, že celou rovnici vynásobíme jmenovatelem racionální funkce (t.j. polynomem $2x^3 + 3x^2 - 1$) a upravíme:

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x+1)^2 + B2(x - \frac{1}{2})(x+1) + C2(x - \frac{1}{2}),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x - 1)(x+1) + C(2x - 1),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x^2 + x - 1) + C(2x - 1).$$

Srovnáním koeficientů polynomů na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6 &= 2A + 2B \\ 7 &= 4A + B + 2C \\ 4 &= 2A - B - C \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení

$$A = 2, B = 1, C = -1.$$

Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Příklad 2.31 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$F(x) = \frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}.$$

Řešení. Jmenovatel má jeden reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ násobnosti 2 a dvojici komplexně sdružených kořenů. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar:

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem dostaneme

$$16x^3 - 15x^2 + 6x + 5 = 4A\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2x + 5) + 4B(x^2 + 2x + 5) + 4(Cx + D)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic, která má řešení

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4},\ C = 4,\ D = 0.$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{4x}{x^2+2x+5}.$$

Částečným důsledkem věty o rozkladu na parciální zlomky je následující věta:

Věta 2.32 *Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

jejíž jmenovatel má pouze prosté kořeny

$$Q_m(x) = a_m(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_m),$$

Potom

$$R(x) = \frac{L_1}{(x-\lambda_1)} + \frac{L_2}{(x-\lambda_2)} + \dots + \frac{L_m}{(x-\lambda_m)},$$

kde

$$L_i = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q'_m(\lambda_i)},\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Příklad 2.33 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$R(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)}.$$

Řešení. Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů.

$$(x^2-1)(x^2+x-6) = (x+1)(x-1)(x+3)(x-2).$$

Všechny kořeny jsou reálné prosté. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-2}.$$

Po vynásobení rovnice jmenovatelem $(x^2-1)(x^2+x-6)$ dostaneme

$$x^2 + 1 = A(x-1)(x+3)(x-2) + B(x+1)(x+3)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2)+$$

$$+D(x+1)(x-1)(x+3).$$

Do poslední rovnice postupně dosazujeme jednotlivé kořeny. Pro $x_1 = -1$ dostaneme po dosazení:

$$(-1)^2 + 1 = A(-1-1)(-1+3)(-1-2) + B(-1+1)(-1+3)(-1-2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

$$2 = A(-2)(2)(-3),$$

$$A = \frac{1}{6}.$$

Pro $x = 1$:

$$1 + 1 = A(1-1)(1+3)(1-2) + B(1+1)(1+3)(1-2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

$$2 = B(2)(4)(-1),$$

$$B = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = -3$:

$$(-3)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-3+1)(-3-1)(-3-2) + D \cdot 0,$$

$$10 = C(-2)(-4)(-5),$$

$$C = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = 2$:

$$2^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(2+1)(2-1)(2+3),$$

$$5 = D(3)(1)(5),$$

$$D = \frac{1}{3}.$$

Konečný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)} = \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

2.16 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili se základními pojmy matematické logiky, teorie množin, číselných množin a funkcí. Naučili jsme se také rozkládat podíl dvou polynomů na součet parciálních zlomků. Zavedený aparát budeme průběžně využívat v dalším výkladu. Např. rozklad na parciální zlomky se uplatní při integraci racionálních funkcí (viz část 10.2), str 170). Stanovení, zda je funkce lichá, sudá, rostoucí, klesající a pod. se uplatní při určování průběhu funkce (viz 7.16, str. 132.

2.17 Kontrolní příklady ke kapitole 2

1. Je dána funkce $f(x)$. Určete její definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a hodnoty $f(-2)$ a $f(10)$.

   Vzor: Funkce $f(x) = \sin x$ je definována pro všechna reálná čísla, tedy $D(f) = \mathbb{R}$. Nabývá hodnot v intervalu $\langle -1; 1\rangle$, tedy $H(f) = \langle -1; 1\rangle$. $f(-2) = -0,909...$, $f(10) = -0,544....$

   Jiný příklad: Pro funkci $f(x) = \sqrt{x-1}$ je $D(f) = \langle 1; \infty)$, $H(f) = \langle 0; \infty)$. $f(-2)$ neexistuje, $f(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$.

   (a) $f(x) = 2x - 5$
   (b) $f(x) = x^2 + 1$
   (c) $f(x) = 5e^x$
   (d) $f(x) = \sin 2x$

2. Jsou dány funkce $f(x)$ a $g(x)$. Napište funkce $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ a $w(x) = f(f(x))$. Vypočtěte funkční hodnoty $u(0)$, $v(1)$ a $w(-2)$.

   $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = e^x$

3. Najděte definiční obor funkce $f(x)$:

   (a) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sin 6x$
   (b) $f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$
   (c) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$
   (d) $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$
   (e) $f(x) = \log(x^2 - 9)$
   (f) $f(x) = \ln \frac{x+2}{2x-3}$
   (g) $f(x) = \arcsin \frac{2x+3}{9}$

4. Najděte funkci inverzní k funkci $f(x)$.

   (a) $f(x) = -2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = 2x^2 + 16$, $x \in \langle 0; \infty)$
   (c) $f(x) = e^{2x+3}$, $x \in \mathbb{R}$
   (d) $f(x) = \ln(x - 2)$, $x \in \langle 2; \infty)$

5. (a) Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

(b) Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)(x-2)}.$$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.2.

Kapitola 3

Matice a determinanty. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení.

3.1 Cíl kapitoly

Řada technických, ekonomických a jiných problémů vede na soustavy lineárních algebraických rovnic. Jako vhodný aparát pro jejich zápis a následné řešení se ukázaly matice. Proto se nejdříve seznámíme s maticemi a jejich vlastnostmi. Ukážeme si, co je determinant čtvercové matice a jaké jsou jeho vlastnosti. Naučíme se některým metodám výpočtu determinantů a jejich použití při určování vlastností matic.

Budeme se dále věnovat algebraickým operacím s maticemi. Vedle sčítání matic a násobení matice číslem si zavedeme i součin matic. Jedná se o operaci, které se výrazně odlišuje od operace s čísly. Jde o nekomutativní operaci, tedy součin AB se nemusí rovnat součinu BA. Bude záležet na pořadí činitelů. Další odlišností od počítání s reálnámi čísly je, že u matic může nastat situace, kdy se součin dvou nenulových matic rovná nulové matici.

Vlastnosti determinantů a matic použijeme při popisu soustav lineárních algebraických rovnic. Ukážeme si, kdy je taková soustava řešitelná a jakým způsobem můžeme určit její řešení. Stanovíme, kdy bude soustava řešitelná pro libpvolnou pravou stranu.

Na závěr si uvedeme i i dvě numerické metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Obě metody předpokládají, že matice koeficientů bude speciálního typu. Nelze je použít pro libovolnou soustavu. Pokud ale soustava splňuje požadované podmínky, t.j. matice koeficientů má požadovaný tvar, potom numerická metoda zaručuje, že se dostaneme k řešení soustavy s požadovanou přesností.

Práci nám může usnadnit použití vhodného počítačového vybavení. Program Maple umožňuje výpočet determinantů, provádí operace s maticemi, řeší soustavy.

3.2 Matice

Nejdříve si vybudujeme potřebný matematický aparát.

Definice 3.1 *Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in \mathbb{R}$, obdržíme reálnou matici typu (m, n) nad $\mathbb{R}$. Čísla i, j nazýváme indexy: i je řádkový a j je sloupcový index.*

Matice zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice budeme označovat velkými písmeny. Symbol $R_{m,n}$ značí množinu všech reálných matic typu (m, n).

3.2.1 Speciální typy matic

Uveďme některé často se vyskytující speciální typy matic.

- **Matice řádková:** pro $m = 1$ dostáváme $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
- **Matice sloupcová:** pro $n = 1$ dostáváme $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- **Matice diagonální** je taková matice A, pro niž platí: $a_{ij} = 0$ pro $\forall i \neq j$, tj. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$
  Výše uvedená matice A je typu (m, m), obecně však může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, a nebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly. Prvky a_{ii} pro $i = 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}$ tvoří *hlavní diagonálu.*
- **Matice čtvercová řádu** m : Jestliže $m = n$, potom mluvíme o čtvercové matici řádu m. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$

- **Matice jednotková** je čtvercová diagonální matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- **Matice nulová** je taková matice, jejímiž prvky jsou pouze 0 : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- **Matice transponovaná** k matici A typu (m, n) vznikne záměnou řádků původní matice za sloupce a naopak. Výslednou matici značíme A^T a má n řádků a m sloupců, neboli je typu (n, m). $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- **Matice symetrická** je čtvercová matice taková, pro niž platí $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$.
  Např. matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ je symetrická.
  Pro každou symetrickou matici platí $A = A^T$.

3.2.2 Lineární závislost a nezávislost matic.

Definice 3.2 *Matice* $A = (a_{ij})$ *je* rovna *matici* $B = (b_{kl})$, *jsou-li obě matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě rovnají, tj.* $A \in \mathbb{R}_{m,n},\ B \in \mathbb{R}_{m,n},\ a_{ij} = b_{ij}$, *pro* $\forall i, j\ \in\ \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$.

Definice 3.3 Součtem *dvou matic* $A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ *je matice* $C \in \mathbb{R}_{m,n}$ *taková, že* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = C \tag{3.2.1}$$

Číselným α-násobkem, *$\alpha \in \mathbb{R}$, matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $D \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $d_{ij} = \alpha a_{ij}$.*

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} = D \tag{3.2.2}$$

Lineární kombinací *matic $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_{m,n}$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nazveme matici $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$.*

Definice 3.4 *Mějme rovnost*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = \mathcal{O} \tag{3.2.3}$$

kde $\mathcal{O}$ je nulová matice. Matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazveme lineárně závislé, *pokud $\exists \lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ a rovnost (3.2.3) platí.*
Matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazveme lineárně nezávislé, *pokud rovnost (3.2.3) platí tehdy a jen tehdy, když $\lambda_i = 0$ pro $\forall i = 1, 2, \dots, k$.*

Důsledek 3.5 *Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé, potom alespoň jedna z nich je lineární kombinací zbývajících.*
Je-li některá z matic $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineární kombinací zbývajících, jsou matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé.
Je-li některá z matic $A_1, A_2, \dots, A_k$ nulová, jsou matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé.

Příklad 3.6 *Matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé, protože platí $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathcal{O}$.*

Příklad 3.7 *Určete lineární závislost či nezávislost matic*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme lineární kombinaci těchto matic podle definice 3.4:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazeních a úpravách dostáváme

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Porovnáním stejnolehlých prvků dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Podle definice 3.4 jsou matice A_1, A_2, A_3 lineárně nezávislé.

3.3 Determinanty

Definice 3.8 Permutace *je zobrazení množiny* $\{1, 2, \dots, n\}$ *na sebe.*

Příklad 3.9 *Určete všechny permutace množiny* $\{1, 2, 3\}$.

Řešení. Z tříprvkové množiny můžeme vytvořit následující permutace prostým výčtem všech možností:

$$\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}.$$

Definice 3.10 Inverzí *v permutaci* $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ *rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším (tj. vlevo od něj).*

Příklad 3.11 *Permutace* $(2, 3, 1)$ *má dvě inverze* $2 > 1$ *a* $3 > 1$.

Definice 3.12 Determinant *čtvercové matice* A *řádu* n *je číslo*

$$det\ A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ *množiny* $\{1, 2, \dots, n\}$ *a* $t(j)$ *je rovno počtu inverzí v permutaci* $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Z definice determinantu lze snadno odvodit jednoduchá pravidla pro výpočet determinantů matic 2. a 3. řádu, tzv. *křížové* a *Sarrussovo* pravidlo.

- **Křížové pravidlo** pro výpočet determinantu matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **Sarrusovo pravidlo** pro výpočet determinantu matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - afh - bdk$$

Poznámka 3.13 *Pro determinanty matic vyšších řádů se podobné vzorece nepoužívají.*

3.3.1 Vlastnosti determinantů

Z definice determinantu vyplývají následující vlastnosti determinantů, které uvádíme bez důkazu.

Věta 3.14

1. *V definičním vyjádření determinantu matice A se vyskytuje člen $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ se znaménkem $(+)$, pokud má permutace $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sudý počet inverzí a se znaménkem $(-)$, pokud má permutace $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ lichý počet inverzí.*

2. *Pravidla pro počítání s deteminanty, která formulujeme pro řádky, platí i pro sloupce a naopak. Speciálně, $\det A = \det(A^T)$, tedy determinant čtvercové matice je stejný jako determinant matice k ní transponované.*

3. *Záměnou dvou sloupců matice A se hodnota determinantu změní na opačnou.*

4. *Determinant matice, která má dva stejné sloupce, je roven nule.*

5. *Společný násobek všech prvků sloupce lze vytknout před determinant.*

6. *Necht' prvky s-tého sloupce matice A jsou lineární kombinace prvků tvaru $a_{is} = \beta b_{is} + \gamma c_{is}$, potom $|A| = \beta|A_b| + \gamma|A_c|$, kde matici A_b získáme z matice A nahrazením s-tého sloupce prvky b_{is} a ponecháním ostatních beze změny a matici A_c získáme obdobně nahrazením s-tého sloupce matice A prvky c_{is} a ponecháním ostatních beze změny.*

7. *Jestliže některý sloupec matice A je lineární kombinací zbývajících, potom $|A| = 0$.*

8. *Hodnota determinantu se nezmění, pokud přičteme k jednomu sloupci lineární kombinaci zbývajících sloupců.*

9. *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Počítat hodnotu determinantu pro matice vyšších řádů přímo podle definice je obtížné a časově náročné. Proto se pro jejich výpočet používá "rozvoj" determinatu podle řádku nebo sloupce. Výpočet se tak výrazně urychluje a současně se snižuje i pravděpodobnost chyby.

Definice 3.15 Algebraickým doplňkem A_{ks} *prvku* a_{ks} *nazveme číslo* $A_{ks} = (-1)^{k+s} M_{ks}$, *kde* M_{ks} *je determinant matice, která vzniklne z matice* A *vynecháním* k*-tého řádku a* s*-tého sloupce.*

Věta 3.16 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu) *Pro každou čtvercovou matici* A *a každé* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *platí*

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Každý determimant matice řádu n si tímto způsobem vyjádříme jako součet násobků n determinantů řádu $(n-1)$.
výpočet se nám dále zkrátí, pokud budeme provádět rozvoj podle řádku (sloupce), který obsahuje větší počet nul.

Důsledek 3.17 *Vzhledem k rovnoprávnosti řádků a sloupců platí* $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

Příklad 3.18 *Určete hodnotu deterninantu matice* A*, je-li*

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Násobky druhého sloupce budeme přičítat ke zbývajícím tak, abychom ve třetím řádku dostali nuly. Dvojnásobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci, ke třetímu sloupci přičteme druhý a od čtvrtého sloupce odečteme druhý sloupec.

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme determinant podle třetího řádku a potom podle posledního sloupce:

$$= (-1)^{(3+2)} 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Poznámka 3.19 *Při výpočtu je vhodné si nejprve zapsat sloupec (řádek), jehož násobky budeme přičítat ke zbývajícím. Zapisujeme jej na jeho místo, protože nemůžeme měnit pořadí jednotlivých sloupců, aniž by došlo i ke změně hodnoty determinantu. Snížíme tím možnost, že se nechtěně dopustíme chyby.*

Věta 3.20 *Pro každou čtvercovou matici A řádu n a pro každou dvojici různých indexů $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$, platí*

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0,$$

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0.$$

3.4 Hodnost matice a elementární úpravy

V této části se seznámíme s pojmem hodnosti matice, který je později využijeme např. při určování počtu řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Definice 3.21 *Nechť $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \leq \min(m, n)$. Vybereme v matici A libovolně k řádků a k sloupců. Elementy stojící na průsečících těchto řádků a sloupců tvoří matici řádu k. Její determinant nazveme* minorem k-tého řádu *matice A.*

Důsledek 3.22 *Minorů k-tého řádu matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \leq \min(m, n)$ můžeme vytvořit celkem $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$.*

Příklad 3.23 *Mějme matici*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme z ní vytvořit celkem 12 minorů prvního řádu, 18 minorů druhého řádu a 4 minory třetího řádu. Všechny minory třetího řádu jsou přitom nulové.

Definice 3.24 Hodnost nulové matice *je rovna nule.*
Hodnost nenulové matice *A je rovna k, jestliže existuje nenulový minor řádu k a všechny minory vyšších řádů, pokud existují, jsou rovny nule.*

Věta 3.25 *Má-li matice A hodnost k, má potom právě k lineárně nezávislých sloupců a naopak, má-li matice A právě k lineárně nezávislých sloupců, potom má hodnost k.*

Důsledek 3.26 *Determinant čtvercové matice A je nenulový právě tehdy, když všechny sloupce jsou lineárně nezávislé.*

Definice 3.27 *Za* elementární úpravy *matice A prohlásíme*

1. *Přechod od matice A k matici transponované A^T.*

2. *Vzájemnou výměnu dvou řádků.*

3. *Vynásobení všech prvků v jednom řádku nenulovým číslem.*

4. *Přičtení k jednomu řádku lineární kombinace zbývajících řádků.*

5. *Vynechání nulového řádku.*

Věta 3.28 *Elementární úpravy nemění hodnost matice.*

Definice 3.29 *Matici $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ nazveme* horní trojúhelníkovou *maticí, když $a_{ij} = 0\ \forall i > j > \min(m,n)$. Matici A nazveme* dolní trojúhelníkovou *maticí, když $a_{ij} = 0\ \forall i < j < \min(m,n)$. Vznikla-li matice B z matice A pomocí elementárních úprav, píšeme $A \sim B$.*

Lze dokázat, že postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na trojúhelníkovou matici. Tento postup se nazývá *Gaussova eliminační metoda.* Dále lze ukázat, že postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na diagonální matici. Tento postup se nazývá *Jordanova eliminační metoda.* Dále je zřejmé, že determinant trojúhelníkové matice řádu n je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad 3.30 *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. První řádek vynásobený (-2) přičteme ke druhému, první řádek vynásobený (-3) přičteme ke třetímu a první řádek vynásobený (-4) přičteme k poslednímu řádku.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První a poslední řádek opíšeme, třetí přičteme ke druhému a zapíšeme třetí řádek jako druhý

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky necháme beze změny, poslední řádek násobíme (-4) a přičteme k němu desetinásobek třetího řádku

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 186 \end{pmatrix}.$$

Matice A je převedena na trojúhelníkový tvar, má čtyři nenulové rádky, první čtyři řádky a první čtyři sloupce tvoří nenulový minor řádu 4 (jeho hodnota je 304), hodnost matice A je proto rovna čtyřem.

3.5 Operace s maticemi

V části 3.2.2 jsme se seznámili se sčítáním matic a násobením matice číslem. Nyní si ukážeme násobení matic.

Definice 3.31 Součinem *matice* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ *a matice* $B \in \mathbb{R}_{n,p}$ *v uvedeném pořadí je matice* $C \in \mathbb{R}_{m,p}$, *pro kterou platí*

$$C = AB, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Matice násobíme tak, že násobíme první prvek i-tého řádku a prvním prvkem j-tého sloupce plus součin druhého prvku i-tého řádku a druhého prvku j-tého sloupce plus …plus součin posledního prvku i-tého řádku a posledního prvku j-tého sloupce. Získané číslo bude prvkem výsledné matice a bude stát v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Poznámka 3.32 *Násobení matic není komutativní, t.j. existují takové matice* A, B, *že platí* $AB \neq BA$ *nebo některý ze součinů* AB, BA *není definován.*

Příklad 3.33 *Nechť* $A \in \mathbb{R}_{2,3}$ *a* $B \in \mathbb{R}_{3,4}$. *Potom součin* AB *existuje, ale součin* BA *není definován.*

Důsledek 3.34 *Součin matic* A *a* B *je definován právě tehdy, když počet sloupců matice* A *je roven počtu řádků matice* B.

Příklad 3.35 *Mějme dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, tedy AB \neq BA.$$

Příklad 3.36

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme případ, že $A \neq \mathcal{O}, B \neq \mathcal{O}$, ale $AB = \mathcal{O}$. Jedná se o situaci, která nemá obdobu v oboru reálných čísel. Nelze proto přenášet automaticky poznatky z číselných množin do teorie matic.

Věta 3.37 *Pro všechny matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}, B, C \in \mathbb{R}_{n,p}, D \in \mathbb{R}_{p,q}$ a pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $A(B + C) = AB + AC$,
2. $A(BD) = (AB)D$,
3. $(\alpha A)B = A\,(\alpha B) = \alpha(AB)$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Věta 3.38 *Pro každou matici A typu (m, n) platí $AI = A$, kde I je jednotková matice řádu n.*

Důsledek 3.39 *$IA = A$, kde $I \in \mathbb{R}_{m,m}$.*

Věta 3.40 *Nechť A je matice typu m, n, potom součin AA^T je matice symetrická.*

3.5.1 Inverzní matice

Věta 3.41 *Nechť A, B, C jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = CA = I.$$

Potom $B = C$.

Důkaz.

$$C = CI = C(AB) = CAB = (CA)B = IB = B.$$

Definice 3.42 *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = BA = I.$$

Potom říkáme, že matice B je matice inverzní *k matici A. Tuto skutečnost zapisujeme následujícím způsobem: $B = A^{-1}$.*

Příklad 3.43 *Pro každou matici A nemusí existovat taková matice B, že platí $AB = I$. Vynásobíme-li matici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ s libovolnou maticí } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že pro danou matici A neexistuje matice B taková, že po jejich vynásobení dostaneme matici jednotkovou.

Definice 3.44 *Matice, k níž existuje matice inverzní, se nazývá* regulární. *V opačném případě mluvíme o matici* singulární.

Věta 3.45 *Nechť A,B jsou dvě regulární matice řádu n. Potom platí:*

1. *Součin AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *Matice A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Věta 3.46 *Nechť A, B jsou libovolné čtvercové matice řádu n. Potom $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

Důsledek 3.47 *Položíme-li v předchozím vztahu $B = A^{-1}$ (předpokládáme, že matice A je regulární a k ní inverzní matice B tedy existuje), pak*

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

Dále lze ukázat, ze matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový.

Definice 3.48 Adjungovanou maticí *k matici A nazýváme matici* $\mathrm{adjA} = (\mathrm{a}^*_{\mathrm{ij}})$, *kde* $a^*_{ij} = A_{ji}$.

Z definice vyplývá, že matici adjungovanou získáme, když každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a výslednou matici transponujeme.

Příklad 3.49 *Ověřte, že platí:* $|\mathrm{adj\,A}| = |\mathrm{A}|^{\mathrm{n}-1}$.

3.5.2 Výpočet inverzní matice

Věta 3.50 *Buď A regulární matice. Potom pro inverzní matici platí:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A).$$

Příklad 3.51 *Uveďme postup pro určení inverzní matice k regulární matici řádu 2.*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad adj\, A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad tedy \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.52 *Určete inverzní matici k matici A, jestliže*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Protože $|A| = -16 + 7 + 84 + 10 = 85$, je matice A regulární a tedy k ní existuje matice inverzní. Určíme jednotlivé algebraické doplňky.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 28, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 17, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Potom

$$adj\, A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad A^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Věta 3.53 *Pro výpočet inverzní matice vyšších řádů používáme metodu doplnění s jednotkovou maticí: Vedle matice A (vpravo) napíšeme jednotkovou matici téhož řádu a pomocí* řádkových *elementárních úprav převedeme matici $(A|I)$ na tvar, kdy vlevo bude matice jednotková. Potom vpravo bude matice inverzní*

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \sim (I|A^{-1})$$

Příklad 3.54 *Určete inverzní matici k matici A, jestliže*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zapíšeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Od prvního řádku odečteme druhý:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících, poté odečítáme násobek druhého řádku od třetího:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní odečítáme násobky třetího řádku od zbývajících a poté sečteme druhý a první řádek:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Tedy pro matici A je inverzní matice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 3.55 *Není nutné předem prověřovat regularitu matice A. Pokud matice A není regulární, tak pomocí řádkových úprav získáme v levé polovině nulový řádek. Provádíme totiž stejné úpravy jako při zjišťování hodnosti matice. Výpočet v takovém případě končí a říkáme, že matice inverzní není definována.*

Příklad 3.56 *Určete inverzní matici k matici B, jestliže*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zapíšeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sečteme druhý a třetí řádek:

$$(B|I) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vlevo jsme dostali nulový řádek. Protože jsme použili pouze úpravy, které nemění hodnost matice, je hodnost matice B rovna 2. Matice B je proto singulární a inverzní matice k matici B neexistuje.

3.6 Soustavy lineárních rovnic: Základní pojmy

Vztah

$$Ax = b,$$

kde $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}_{m,1}$, $x \in \mathbb{R}_{n,1}$ nazýváme *soustavou lineárních (algebraických) rovnic.* Matice A, b jsou dané číselné matice a matice x je hledaný vektor řešení. V rozepsaném tvaru dostáváme:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3.6.4}$$

Matici A také nazýváme *matice koeficientů* , matici b *sloupec pravých stran* a x sloupec neznámých. Matice

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *maticí rozšířenou.*

Každý sloupec (sloupcová matice) α, pro který platí $A\alpha = b$, se nazývá *řešením soustavy* (3.6.4).

Dále říkáme, že soustava (3.6.4) je *řešitelná*, má-li aspoň jedno řešení, *jednoznačně řešitelná*, má-li právě jedno řešení a *víceznačně řešitelná*, má-li více než jedno řešení.

Definice 3.57 *Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá* homogenní*, jestliže je tvaru*

$$Ax = \mathcal{O}, \tag{3.6.5}$$

kde $\mathcal{O}$ je nulový sloupec. V opačném případě mluvíme o nehomogenní *soustavě.*

Definice 3.58 *Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, pak* přidruženou homogenní soustavou *rozumíme soustavu $Ax = \mathcal{O}$ (t.j. homogenní soustavu se stejnou maticí koeficientů jakou má nehomogenní soustava).*

Je-li například dána nehomogenní soustava

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4, \end{aligned}$$

pak přidružená homogenní soustava má tvar

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

3.7 Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Následující věta je speciálním případem Frobeniovy věty, s níž se seznámíme později.

Věta 3.59 *Nechť soustava $Ax = b$ má regulární matici koeficientů. Potom má tato soustava právě jedno řešení.*

Má-li soustava právě jedno řešení, můžeme je určit použitím tzv. *Cramerova pravidla:* k-tý člen řešení je zlomek, v jehož jmenovateli je determinant matice koeficientů A a v čitateli determinant matice D_k, která vznikne z matice A tak, že k-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy (3.6.4), ostatní sloupce ponecháme beze změny. Tedy

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

kde $k = 1, 2, \dots n$.

Příklad 3.60 *Najděte řešení soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Určíme determinant matice koeficientů

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14.$$

Determinant matice A je nenulový, soustava je tedy jednoznačně řešitelná. Spočítáme determinanty matic D_i, kde matice D_i vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce ($i = 1, 2, 3$) sloupcem pravých stran dané soustavy.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -28, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom $x_i = |D_i|/|A|$, takže máme

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{-28}{14} = -2, \quad x_3 = \frac{0}{14} = 0.$$

Poznámka 3.61 *Cramerovy vzorce nám sice dávají přesné řešení, ale vyžadují výpočet $(n+1)$ determinantů n-tého řádu. Pro rozsáhlejší soustavy je jejich použití problematické, protože ani s pomocí výpočetní techniky nejsme schopni určit přesně hodnoty determinantů. Cramerovy vzorce navíc předpokládají regularitu matice koeficientů, a nedají se proto použít pro libovolnou soustavu.*

Věta 3.62 ***(Frobeniova.)***
Soustava (3.6.4) *je řešitelná právě tehdy, když se hodnost matice koeficientů rovná hodnosti matice rozšířené.*

Důsledek 3.63 *Lze dokázat, že je-li soustava (3.6.4) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, pak pro $h = n$ má soustava (3.6.4)* právě jedno řešení *a pro $h < n$ má soustava (3.6.4)* nekonečně mnoho řešení, *která závisí na $(n - h)$ parametrech.*

Příklad 3.64 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Protože $|A| = -2 \neq 0$, lze použít Cramerovo pravidlo. Potom

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} =, \quad y = x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1, \quad z = x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.65 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Lehce ověříme, že $|A| = 0$, a proto nemůžeme použít Cramerovo pravidlo. Určíme tedy hodnost matice a rozšířené matice soustavy:

$$h(A) = 2, \; h(A|b) = 3 \Longrightarrow h(A) \neq h(A|b).$$

Podle Frobeniovy věty 3.62 nemá soustava řešení.

Příklad 3.66 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 2z + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Opět platí $|A| = 0$, a proto nemůžeme použít Cramerovo pravidlo. Dále určíme hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy:

$$h(A) = 2, \; h(A|b) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b).$$

Soustava je tedy řešitelná a řešení závisí na jednom parametru $t \in \mathbb{R}$, neboť $n - h = 3 - 2 = 1$. Snadno odvodíme obecný tvar řešení:

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= 0. \end{aligned}$$

3.7.1 Homogenní soustavy lineárních rovnic

Z Frobeniovy věty lehce odvodíme, že homogenní soustava (3.6.5) je vždy řešitelná. Jejím řešením je vždy $x = \vec{o}$, tzv. nulové neboli *triviální* řešení.

Dále z Frobeniovy věty plyne, že homogenní soustava (3.6.5) má netriviální řešení právě tehdy, když hodnost matice koeficientů je menší než počet neznámých.

Věta 3.67 *Nechť u, v jsou řešení homoogenní soustavy* (3.6.5)*. Potom i jejich libovolná lineární kombinace $\alpha u + \beta v$ je řešením soustavy* (3.6.5)*.*

Definice 3.68 *Maximální počet lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy (3.6.5) nazveme* fundamentální soustavou řešení *soustavy (3.6.5).*

Příklad 3.69 *Řešte homogenní soustavu rovnic*

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0\\
6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0\\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0\\
6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme matici koeficientů soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav tuto matici převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7\\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11\\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9\\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18\\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme dvě rovnice o pěti neznámých. Volíme proto tři parametry. Neznámé, které stojí na začátku řádku, jehož předchozí koeficienty jsou nulové, můžeme dopočítat. Zbývající volíme jako parametry. Zvolme $x_2 = 3s$, $x_4 = 3t$, $x_5 = 3u$, kde $s, t, u \in \mathbb{R}$. Potom

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 2t + 8u\\ 3s\\ -9u\\ 3t\\ 3u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2\\ 3\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 0\\ 3\\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 8\\ 0\\ -9\\ 0\\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tři sloupcové matice vpravo pak představují fundamentální soustavu řešení, protože pokud je zapíšeme jako sloupce do matice, tak druhý, čtvrtý a pátý řádek nám vytvářejí nenulový minor řádu 3.

Věta 3.70 *Nechť vektory p, q jsou řešení soustavy (3.6.4). Potom vektor $(p-q)$ je řešením přidružené homogenní soustavy.*

Důsledek 3.71 *Součet řešení soustavy (3.6.4) a libovolného řešení přidružené homogenní soustavy je řešením soustavy (3.6.4).*

Důsledek 3.72 *Všechna řešení soustavy (3.6.4) (tj. obecné řešení soustavy)získáme jako součet jednoho (parciálního) řešení soustavy (3.6.4) a libovolné lineární kombinace fundamentální soustavy řešení přidružené homogenní soustavy. Jinými slovy, je-li x_0 řešením soustavy (3.6.4) a vektory $v_1, \ldots, v_k$, kde $k \leq n$, tvoří fundamentální systém řešení soustavy (3.6.5), pak lze libovolné řešení soustavy (3.6.4) vyjádřit jako lineární kombinaci*

$$x = x_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_k x_k,$$

kde $C_1, \ldots, C_k$ jsou parametry.

3.8 Gaussova a Jordanova eliminační metoda

Definice 3.73 *Dvě řešitelné soustavy lineárních rovnic se nazývají* ekvivalentní, *jestliže mají stejnou množinu řešení.*

Poznámka 3.74 *Dvě ekvivalentní soustavy mohou mít různý počet rovnic, ale musí mít stejný počet neznámých.*

Mějme dvě takové soustavy $Ax = b, \qquad A'x = b'$. Potom z podmínek řešitelnosti plyne, že $h(A) = h(A|b) = h(A') = h(A'|b')$. Protože mají stejnou množinu řešení, platí: $A\alpha = b \Leftrightarrow A'\alpha = b'$.
Potom konečným počtem řádkových elementárních úprav lze matici $(A|b)$ převést na matici $(A'|b')$, přičemž nelze kombinovat řádkové a sloupcové úpravy. Můžeme používat pouze řádkové úpravy a ze sloupcových pouze výměnu sloupců v matici A, což je vlastně přeznačení proměnných. Pomocí povolených elementárních úprav si upravíme soustavu $Ax = b$ na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h + c_{1,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{1,n}y_n & = & d_1 \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h + c_{2,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{2,n}y_n & = & d_2 \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h + c_{h,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{h,n}y_n & = & d_h
\end{array}$$

kde $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je vhodná permutace proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Je-li $h = n$ má soustava právě jedno řešení — jde o soustavu řešitelnou pomocí Cramerova pravidla (tzv. kramerovskou soustavu). Je-li $h < n$, potom proměnné $y_{h+1}, \ldots, y_n$ prohlásíme za parametry a soustavu upravíme na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h & = & d_1 - c_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{1,n}y_n \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h & = & d_2 - c_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h & = & d_h - c_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{h,n}y_n
\end{array} \qquad (3.8.6)$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou $Ax = b$ a každé volbě parametrů $y_{h+1}, \ldots, y_n$ odpovídá právě jedno řešení. Parametrů je celkem $(n-h)$. Jestliže za prvky $y_{h+1}, \ldots, y_n$ bereme sloupce regulární matice řádu $(n-h)$, potom bereme za parametry lineárně nezávislé prvky a obdržíme obecné řešení soustavy (3.6.4). Tento postup nazýváme *Gaussova eliminační metoda.*

Budeme-li dále pokračovat v řádkových úpravách, můžeme soustavu (3.8.6) upravit na tvar

$$\begin{aligned}
y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_h &= g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\
y_2 + \cdots + 0y_h &= g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & \quad \cdots \\
y_h &= g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n
\end{aligned}$$

Zde máme na hlavní diagonále vlevo jednotky a zbývající prvky pod i nad ní jsou nulové. Tento postup se nazývá *Jordanova eliminace.*

Příklad 3.75 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\
-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 2 \\
-3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 &= 3 \\
-4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4
\end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na trojúhelníkový tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 18 & 22 & 6 \\ 0 & 13 & 18 & 23 & 28 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 & 12 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o pěti neznámých

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\
x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -1
\end{aligned}$$

Hodnost matice soustavy je 3, tedy zvolíme $5 - 3 = 2$ parametry $x_4 = s, x_5 = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned}
x_3 &= -1 - 2x_4 - 3x_5 = -1 - 2s - 3t \\
x_2 &= -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 2 + s + 2t \\
x_1 &= 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0
\end{aligned}$$

Obecným řešením naší soustavy je $x = (0, 2+s+2t, -1-2s-3t, s, t)^T$.
Často bývá vhodnější pokračovat dále v maticových úpravách a převést matici koeficientů na diagonální tvar. V našem případě budeme mít

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Potom

$$x_1 = 0, x_2 = 2 + x_4 + 2x_5, x_3 = -1 - 2x_4 - 3x_5$$

a analogicky jako v předchozím případě si volíme dva parametry x_4 a x_5 a dostaneme stejný výsledek. $(0, 2, -1, 0, 0)^T$ tvoří partikulární řešení a $(0, 1, -2, 1, 0)^T, (0, 2, -3, 0, 1)^T$ je fundamentální soustava řešení přidružené homogenní soustavy.

Poznámka 3.76 *Parametry si nemůžeme volit zcela libovolně. Volba vždy závisí na tvaru soustavy. Doporučujeme následující postup:*
Převeďte si rozšířenou matici soutavy na trojúkelníkový tvar. Pokud je hodnost matice menší jak počet neznámých, potom si musíme volit parametry. V poslední rovnici si první proměnnou zleva s nenulovým koeficientem ponecháme jako proměnnou a zbytek prohlásíme za parametry. V následující rovnici (předposlední), po dosazení z poslední rovnice, opět první neznámá zleva s nenulovým koeficientem je proměnná a zbývající, pokud existují, jsou parametry. Stejně postupujeme u zbývajících rovnic.

3.9 Shrnutí

Seznámili jsme se s maticemi, determinanty, soustavami lineárních algebraických rovnic a metodmi jejich řešení.

Při jejich použití je třeba rozlišovat mezi úpravami, které nemění hodnotu determinantu a elementárními úpravami, které nemění hodnost matice. V obou případech můžeme použít jen některé, např. přičtení k řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců).

Vhodné programové vybavení, např. Matlab, Maple, Mathematica, nám může usnadnit práci. Musíme ale dávat pozor na jeho vhodné použití. Pokud budeme mít matice nebo soustvy vyšších řádů, potom může dojít při jejich výpočtu k vyjádření čísel v semilogaritmickém tvaru a tedy k jejich zaokrouhlování. Protože obecně jsou matice a veškeré postupy obsahující matice nestabilní, je třeba v těchto případech použít některou z numerických metod. My jsme se seznámili pouze se dvěma. Numerických metod ale existuje podstatně víc. Jejich použití se řídí tvarem a vlastnostmi matice koeficientů.

3.10 Kontrolní příklady ke kapitole 3

1. Stanovte n–tou mocninu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vypočtěte hodnotu deternimantu matice

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3. V závislosti na parametrech α, β určete hodnost matice

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

   (b)
$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Určete $(AB)^{-1}$, jestliže

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

(a)

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & 2z & = & -4 \\ 4x & +y & 4z & = & 8 \\ x & +y & +2z & = & 5 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & + & 3u & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4u & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & u & = & 3 \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2u & = & 4 \end{array}$$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.3.

Kapitola 4

Vektorové prostory

4.1 Cíl kapitoly

Na střední škole byly zavedeny vektory např. ve fyzice při popisu silového působení na hmotný bod. Vektorový počet bude dále hojně využíván při popisu fyzikálních dějů. Proto bude v této kapitole zaveden obecný vektorový prostor. Vlastnosti vektorů, které jste zatím studovali v rovině a nebo v trojrozměrném prostoru lze zobecnit na prostory libovolné dimenze. Přitom pracovní postupy zůstávájí stejné.

Jde o matematickou abstrakci, která nemusí mít přímý vzor v reálném světě. Jako příklad vektorového prostoru vyšší dimenze může posloužit množina všech řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic. Počet proměnných bude udávat rozměr prostoru. Omezíme se přitom na prostory konečné dimenze.

Ukážeme si, kdy se vektorové prostory sobě rovnají, jak můžeme vektorový prostor popsat. K tomu nám poslouží báze vektorového prostoru a matice přechodu od jedné báze k druhé. Pokud známe aspoň jednu bázi prostoru, potom známe všechny a jsme schopni popsat celý vektorový prostor.

Ukážeme si, jak se mění souřadnice vektoru při přechodu od jedné báze ke druhé.

4.2 Vektorový prostor

Definice 4.1 *Nechť L je nějaká množina. Předpokládejme, že jsou zavedeny dvě operace, které budeme značit jako „+“ a „·“, které často nazýváme „sčítáním“ a „násobením“ (i když se od obyčejného sčítání či násobení mohou velmi lišit). O těchto operacích předpokládáme, že*

$$+ \quad : L \times L \to L, \qquad a \cdot \quad : \mathbb{R} \times L \to L.$$

Dále předpokládáme, že pro obě operace platí tato pravidla (nazývaná „axiomy“):

1. $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x, y, z \in L$ *(toto pravidlo se nazývá „asociativita sčítání“)*
2. $\exists \mathcal{O} \in L : \ \mathcal{O} + x = x + \mathcal{O} = x \qquad \forall x \in L$
   (tzv. existence „neutrálního“ prvku $\mathcal{O}$)
3. $\forall x \in L \ \exists x^{-1} \in L : x + x^{-1} = \mathcal{O}$
   (existence „inverzního“ prvku, který značíme x^{-1})
4. $x + y = y + x \qquad \forall x, y \in L$
   (komutativita sčítání)
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in L$
   (asociativita pro násobení)
6. $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in L$
   (první axiom distributivity)
7. $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in L$
   (druhý axiom distributivity)
8. $1 \cdot x = x \qquad \forall x \in L$
   (existence tzv. „jednotkového“ prvku)

Pak říkáme, že trojice $(L, +, \cdot)$ tvoří tzv. vektorový prostor *nad (číselným) prostorem* $\mathbb{R}$.

Prvky z L budeme nazývat *vektory*, prvky z $\mathbb{R}$ *skaláry*. Značit budeme vektory malými písmeny latinské abecedy a skaláry malými písmeny řecké abecedy.

Poznámka 4.2 *Pro vektorový prostor se používá též název* lineární prostor.

Věta 4.3 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $\mathcal{O}$ je neutrální prvek z axiomu 2. Potom pro $\forall a \ \in \ L$ a pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $0 \cdot a \ = \mathcal{O}$,
2. $\alpha \cdot \mathcal{O} \ = \mathcal{O}$,

3. $\alpha \cdot a = \mathcal{O} \iff \alpha = 0 \vee a = \mathcal{O}$,

4. $(-\alpha) \cdot a = (\alpha \cdot a)^{-1}$.

Příklad 4.4 *Uveďme příklady vektorových prostorů:*

1. *Množina* $\mathbb{R}^2$ *všech uspořádaných dvojic reálných čísel spolu s operacemi "+", "·" definovanými následovně:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$ *tvoří vektorový prostor.*

2. *Množina* $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$ *všech matic typu* (m, n) *s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem tvoří vektorový prostor.*

Doporučujeme samostatně prověřit, že v obou uvedených příkladech jsou splněny všechny axiomy definice 4.1.

Definice 4.5 *Nechť* $(L, +, \cdot)$ *je vektorový prostor. Neprázdnou podmnožinu* K *vektorového prostoru* L *nazveme* podprostorem *prostoru* L*, jestliže je* K *vektorovým prostorem vzhledem ke stejným operacím jako vektorový prostor* $(L, +, \cdot)$*. Množina* K *se názývá* nosičem *podprostoru.*

Příklad 4.6 *Uveďme příklady vektorových podprostorů:*

1. *Množina* $\{H_{m,n}, +, \cdot\}$ *všech horních trojúhelníkových matic tvoří podprostor v prostoru* $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$.

2. *Množina* $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ *tvoří podprostor v* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3. *Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic o* n *neznámých tvoří podprostor ve vektorovém prostoru* $(M_{(n,1)}, +, \cdot)$ *sloupcových matic typu* $(n, 1)$.

4. *Množina* $\{\mathcal{O}\}$ *je podprostorem a nazývá se triviální podprostor.*

Jestliže je K podmnožinou v L, potom pravidla, která platí v L (například asociativita) budou platit i v K. Pro určení podprostoru proto není nutné prověřovat platnost všech axiomů definice 4.1.

Věta 4.7 *Neprázdná podmnožina* K *vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$ *je podprostorem v* L*, právě když pro* $\forall u, v \in K$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$u + v \in K, \ \alpha \cdot u \in K.$$

Věta 4.8 *Průnik libovolného počtu podprostorů vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$ *je opět vektorovým podprostorem v* L.

Definice 4.9 *Buď* M *podmnožina vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$*. Průnik všech podprostorů obsahujících* M *nazveme* lineárním obalem *množiny* M *a označíme jej* $\langle M \rangle$.
Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *jsou vektory z vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$. Lineární kombinací *vektorů* u_i *nazveme každý vektor tvaru* $v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Věta 4.10 *Nechť M je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Pak platí:*
1) Je-li $M = \emptyset$, je $\langle M \rangle = \mathcal{O}$.
2) Je-li $M \neq \emptyset$, je $\langle M \rangle$ množina všech lineárních kombinací tvaru

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n,\ \text{kde } u_i \in M,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Definice 4.11 *Podmnožina M vektorového prostoru L se nazývá* generující, *jestliže $\langle M \rangle \equiv L$.*

Příklad 4.12 *Uveďme příklady generujících množin některých vektorových prostorů:*

1. *Vektory*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   tvoří generující množinu pro $(M_{2,2}, +, \cdot)$ (vektorový prostor všech matic řádu 2).

2. *Vektory $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, x+x^3, x^3-x^2+7$ tvoří generující množinu prostoru všech polynomů stupně nejvýše třetího.*

3. *Vektory $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ tvoří generující množinu ve vektorovém prostoru všech polynomů.*

Věta 4.13 *Podmnožina M vektorového prostoru L je generující právě tehdy, když každý vektor z L je lineární kombinací vektorů z M.*

V definici 3.4 jsme si zavedli lineárně závislé a nezávislé matice. Nyní pojem lineární závislosti a nezávislosti rozšíříme na libovolné vektory.

Definice 4.14 *Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nazveme lineárně nezávislé, jestliže*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O} \ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

a nazveme je lineárně závislé, *jestliže existuje aspoň jeden nenulový koeficient α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že platí*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O}\ .$$

Definice 4.15 *Množina $M \subset L$ je* lineárně nezávislá, *jestliže každá její konečná neprázdná podmnožina $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je tvořena lineárně nezávislými vektory.*
Množina $M \subset L$ je lineárně závislá *v opačném případě.*

Věta 4.16 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Potom platí:*

1. *Jsou-li prvky* $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ *lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i prvky* $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, *kde* $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
2. *Je-li mezi vektory* $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ *nulový vektor, jsou vektory* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *lineárně závislé.*
3. *Jsou-li vektory* $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ *lineárně závislé, je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.*
4. *Jsou-li vektory* $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ *lineárně závislé, potom pro libovolné* $a_{n+1} \in L$ *jsou lineárně závislé i vektory* $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$.

4.3 Báze, dimenze, souřadnice.

Definice 4.17 *Podmnožina* $\mathcal{B}$ *vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$ *se nazývá* báze *vektorového prostoru, jestliže množina* $\mathcal{B}$ *je lineárně nezávislá a* $\langle \mathcal{B} \rangle \equiv L$. *Říkáme také, že báze je lineárně nezávislá generující množina vektorů.*

Věta 4.18 *Buď* $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots\}$ *báze vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$. *Pak každý nenulový vektor* u *lze jednoznačně, až na pořadí, vyjádřit ve tvaru*

$$u = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n,$$

kde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{B}$ *a vektory* a_i *jsou po dvou různé.*

Věta 4.19 *V každém netriviálním vektorovém prostoru existuje aspoň jedna báze.*

Definice 4.20 *Říkáme, že netriviální vektorový prostor* $(L, +, \cdot)$ *nad* $\mathbb{R}$ *má* konečnou dimenzi, *jestliže v* L *existuje generující množina tvořená konečným počtem vektorů.*

Věta 4.21 *Z každé generující množiny vektorového prostoru konečné dimenze lze vybrat bázi.*

Úmluva: Všude dále budeme pod vektorovým prostorem rozumět vektorový prostor konečné dimenze.

Věta 4.22 (Steinitzova o výměně) *Nechť* $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ *tvoří generující množinu vektorového prostoru* $(L, +, \cdot)$, *nechť* $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ *je lineárně nezávislá množina vektorů z* $(L, +, \cdot)$. *Potom* $k \leq n$ *a při vhodném označení je množina* $\{b_1, b_2, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ *generující množinou pro* $(L, +, \cdot)$.

Důkaz. Vektor $b_1 \in L$ a proto jej lze vyjádřit podle věty 4.13 jako lineární kombinaci vektorů generující množiny:

$$b_1 = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n, \tag{4.3.1}$$

kde aspoň jeden z koeficientů $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, n$ je nenulový, neboť b_1 je vektor z lineárně nezávislé množiny, a tedy nemůže být nulový. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u vektoru a_1 (v opačném případě provedeme přeznačení vektorů generující množiny). Z rovnice 4.3.1 vyjádříme a_1:

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot [b_1 - \alpha_2 \cdot a_2 - \cdots - \alpha_n \cdot a_n] . \tag{4.3.2}$$

Jestliže nyní ve vyjádření libovolného vektoru v jako lineární kombinace prvků generující množiny nahradíme vektor a_1 vztahem (4.3.2), dostaneme vektor v jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Potom tyto vektory tvoří novou generující množinu. Vyjádříme nyní b_2 jako jejich lineární kombinaci:

$$b_2 = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot a_2 + \beta_3 \cdot a_3 + \cdots + \beta_n \cdot a_n, \tag{4.3.3}$$

kde aspoň jeden z koeficientů $\beta_2, \ldots, \beta_n$ bude nenulový. Pokud by byly všechny nulové, pak by b_2 bylo násobkem b_1 a to nemůže nastat, protože b_1, b_2 jsou prvky z lineárně nezávislé množiny. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u a_2. Vyjádříme z rovnice (4.3.3) vektor a_2:

$$a_2 = \frac{1}{\beta_2} \cdot [b_2 - \beta_1 \cdot b_1 - \beta_3 \cdot a_3 - \cdots - \beta_n \cdot a_n] . \tag{4.3.4}$$

Stejně jako dříve každý vektor vyjádřený jako lineární kombinace vektorů generující množiny $\{b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ získané záměnou a_2 podle (4.3.4) lze vyjádřit také jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Pokračujeme dále podle indukce. Počet lineárně nezávislých vektorů musí být menší nebo roven počtu vektorů generující množiny. Tento počet je konečný, a proto se po konečném počtu kroků zastavíme. $\square$

Důsledek 4.23 *Každé dvě báze vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ mají stejný počet prvků a každá lineárně nezávislá podmnožina L s tímto počtem prvků je bází.*

Věta 4.24 *Nechť $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$. Množina $\mathcal{B}$ je bází prostoru L právě tehdy, když lze každý vektor $v \in L$ jednoznačně vyjádřit (až na pořadí) jako lineární kombinaci prvků z $\mathcal{B}$.*

Příklad 4.25 *Mějme prostor $(M_{2,2}, +, \cdot)$. Dokažte, že jeho bázi tvoří vektory*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle předchozí věty stačí ukázat, že každý vektor z $M_{2,2}$ se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů A, B, C, D. Mějme libovolný vektor

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Hledejme koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = X.$$

Rozepsáním dostáváme

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= a \\ \beta + \gamma + \delta &= b \\ \gamma + \delta &= c \\ \delta &= d \end{aligned}$$

Jde o nehomogenní soustavu s regulární maticí koeficientů (je to trojúhelníková matice), která je jednoznačně řešitelná pro libovolný tvar pravé strany. To znamená, že libovolný vektor X se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků A, B, C, D a tedy tyto prvky tvoří bázi.

Definice 4.26 *Nechť $L \neq \{\mathcal{O}\}$ je vektorový prostor.*Dimenzí *prostoru L nazveme počet prvků jeho báze. Píšeme* $\dim L = n$.
Triviální vektorový prostor $\mathcal{V} = \{\mathcal{O}\}$ má dimenzi 0.
Vektorový prostor dimenze n budeme značit L_n.

Definice 4.27 *Nechť uspořádaná množina $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ je bází vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ dimenze n. Potom $\forall x \in L$ platí*

$$x = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n,$$

kde koeficienty α_i jsou určeny jednoznačně. Prvek $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ nazveme souřadnicemi *vektoru x vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.*

Věta 4.28 *Každý podprostor P vektorového prostoru L konečné dimenze má také konečnou dimenzi* $\dim P \leq n$.

Důsledek 4.29 *Nechť P je podprostor prostoru L konečné dimenze. Jestliže* $\dim P = n$, *potom $P \equiv L$.*

Příklad 4.30 *Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete v závislosti na parametru α dimenzi lineárního obalu vektorů $a = (\alpha, -4, -1)$, $b = (4, -6, -3)$, $c = (1, 1, -\alpha)$.*

Řešení. Lineární obal množiny vektorů je podprostorem a úloha má smysl. Určíme lineární závislost či nezávislost vektorů a, b, c. Zapíšeme vektory do matice a pomocí elementárních úprav matici převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -4 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 4 & -6 & -3 \\ \alpha & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & -4 - \alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & 0 & -6\alpha^2 + 13\alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

Rovnice $-6\alpha^2 + 13\alpha - 2 = 0$ má kořeny $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, proto $\dim \langle a, b, c\rangle = 2$ pro $\alpha = 2$ a nebo $\alpha = \frac{1}{6}$ a $\dim \langle a, b, c\rangle = 3$ pro $\alpha \neq 2$ a $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

4.4 Transformace souřadnic.

Definice 4.31 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jsou dvě báze tohoto prostoru. Potom prvky báze $\mathcal{B}$ se dají jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze $\mathcal{A}$:*

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\ \dots & \quad \dots \\ b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

neboli

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right). \tag{4.4.5}$$

Matici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ nazveme maticí přechodu *od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$.*

Ve vztahu (4.4.5) máme vpravo formální součin matic, kde první matice je řádková a její prvky jsou vektory a druhá je čtvercová a její prvky jsou skaláry.

Věta 4.32 *Matice přechodu je vždy regulární.*

Věta 4.33 (O transformaci souřadnic) *Nechť máme vektor x vyjádřený jako lineární kombinaci ve dvou různých bázích $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)\xi_{\mathcal{A}}$ a $x = (b_1, b_2, \dots, b_n)\xi_{\mathcal{B}}$. Nechť $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ je maticí přechodu. Potom*

$$\xi_{\mathcal{A}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)\xi_{\mathcal{B}}.$$

Důsledek 4.34 $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Příklad 4.35 *Nechť v $(\mathbb{R}^3, +, .)$ jsou dány dvě báze:*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$

a

$$\mathcal{C} = \{(-1,1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}.$$

Určete matici přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{C}$ a naopak. Určete $x_{\mathcal{C}}$, $y_{\mathcal{B}}$, jestliže

$$x_{\mathcal{B}} = (-1,3,0)^T$$

a

$$y_{\mathcal{C}} = (2,4,7)^T.$$

Řešení. Zademe si označení $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{C} = \{k, l, m\}$. Prvky báze $\mathcal{C}$ vyjádříme jako lineární kombinace prvků báze $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} k &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \\ l &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c, \\ m &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned}$$

To znamená, že musíme řešit tři soustavy rovnic se stejnou maticí koeficientů a různými pravými stranami. Budeme je všechny tři řešit najednou, protože u matice koeficientů bychom prováděli opakovaně stejné úpravy. Zapíšeme vektory bází $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ sloupcově do matice, přitom vektory báze $\mathcal{B}$ tvoří matici koeficientů a vektory báze $\mathcal{C}$ jsou "pravé strany", které máme zapsány v jedné matici. Pomocí řádkových elementárních úprav najdeme řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|r|c|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r|c|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r|c|r} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{C}$ je

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od báze $\mathcal{C}$ k bázi $\mathcal{B}$ bude pak matice inverzní

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením nyní dostaneme $x_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})x_{\mathcal{B}} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T$, $y_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})y_{\mathcal{C}} = (-4, -1, 7)^T$.

Věta 4.36 *Nechť $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je báze vektorového prostoru L, M je regulární matice řádu n. Potom $(a_1, a_2, \ldots, a_n)M$ je taktéž báze vektorového prostoru L a všechny báze prostoru L můžeme získat tímto způsobem.*

4.5 Shrnutí

Byl zaveden obecný vektorový prostor a odvozeny jeho vlastnosti. Ukázali jsme si, že vektory nemusí být definovány pouze v rovině a nebo v trojrozměrném prostoru.

Při popisu vektorového prostoru hraje důležitou roli „Steinitzova věta o výměně“. Jako její důsledek jsme dostali, že všechny báze téhož vektorového prostoru mají stejný počet prvků. Jde o invariant, který nezávisí na volbě báze a který jsme si nazvali dimenzí prostoru.

Ukázali jsme si jak je možné přejít od jedné báze ke druhé a jak lze pomocí matice přechodu vyjádřit souřadnice vektoru v různých bázích.

4.6 Kontrolní příklady ke kapitole 4

1. Počáteční bod umístění vektoru $\vec{u} = (5; -4)$ má souřadnice $A = [-2; 3]$. Určete souřadnice koncového bodu B tohoto umístění vektoru $\vec{u}$.

2. Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$ a $\vec{c} = (3; 2; 2)$ lineárně závislé či nikoliv.

3. (a) Určete matici přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$, jestliže

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \quad (1, 1, 2), (-2, 1, -2), (2, -1, 1) \\ \mathcal{B} = & \quad (-8, -2, -13), (5, 14, 15), (-12, 9, -13) \end{aligned}$$

   (b) Určete matici přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{B}$, jestliže

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \quad (1, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 1, -1) \\ \mathcal{B} = & \quad (-1, 1, 1), (0, 2, 0), (-3, 0, 2) \end{aligned}$$

4. V závislosti na parametru určete dimenzi lineárního obalu množiny M:

   (a) $M = \langle (\alpha, -4, -1), (4, -6, -3), (1, 1, -\alpha) \rangle$

   (b) $M = \langle (1, 2, 3 - \beta, 3), (1, 2 + \alpha, 4, 6), (2, 4, \beta - 6, 7), (1, 2 - \alpha, 2 - \beta, 1) \rangle$.

Výsledky jsou uvedeny v části 15.4.

Kapitola 5

Skalární, vektorový a smíšený součin. Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů

5.1 Cíl kapitoly

Vektory v libovolném vektorovém prostoru můžeme sčítat, můžeme je násobit číslem a můžeme je také násobit mezi sebou. Ukážeme si, že pro násobení máme dvě možnosti

1) skalární součin, kdy je výsledkem součinu dvou vektorů číslo,

2) vektorový součin, kdy je výsledkem součinu dvou vektorů zase vektor.

Ukážeme si výpočet obou součinů, jejich použití a vlastnosti. Pomocí sklaárního součinu si zavedeme pojem normy vektoru, který je zobecněním pojmu velikost vektoru z prostoru R^2 a nebo R^3, na prostory libovolné dimenze.

Geometrický pojem kolmost dvou vektorů si zobecníme na pojem ortogonální vektory, které můžeme definovat v každém vektorovém prostoru. Ukážeme si, jak můžeme z každé báze vektorového prostoru vybudovat ortogonální bázi téhož prostoru (Grammův - Schimidtův otogonalizační proces). Dále si ukážeme, jak lze sestrojit ortogonální doplněk podprostoru a jak lze určit ortogonální průmět vektoru do podprostoru. Tento postup se využívá v numerické matematice, kde se nazývá "Metoda nejmenších čtverců".

Spojením vektorového a skalárního součinu dostaneme smíšený součin tří vektorů.

Vektorový počet použijeme při vyšetřování lineárních útvarů v prostoru E^3.

Pro určení vzájemné polohy přímek a rovin použijeme vlastností soustav lineárních algebraických rovnic a podmínek jejich řešitelnosti.

5.2 Skalární součin

Definice 5.1 *Nechť* $(L, +, \cdot)$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad* $\mathbb{R}$. *Zobrazení* $g : L \times L \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y)$ *se nazývá* skalárním součinem *na* L, *jestliže* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *a* $\forall x, y, z \in L$ *platí:*

1. $g(x, y) = g(y, x)$, *komutativita*
2. $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$, *distributivita*
3. $g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$, *vytýkání skalárního násobku*
4. $g(x, x) \geq 0$, *přičemž* $g(x, x) = 0$ *pouze pro* $x = \mathcal{O}$. *pozitivní definitnost*

Příklad 5.2 *Mějme prostor* $(C[a, b], +, \cdot)$ *všech spojitých funkcí definovaných na intervalu* $[a, b]$. *Definujme zobrazení:*

$$\forall\, u, v \in C[a, b] : \quad g(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Zobrazení g *splňuje všechny požadavky definice 5.1, a jedná se tedy o skalární součin. (Prověřte samostatně platnost všech požadavků.)*

Důsledek 5.3 *Platí:*

1. $g(\mathcal{O}, x) = 0 \;\; \forall x \in L$.
2. $g((\sum\limits_i \alpha_i x_i), (\sum\limits_j \beta_j y_j)) = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \beta_j g(x_i, y_j)$.

Věta 5.4 *V libovolném vektorovém prostoru dimenze* n *je možné definovat skalární součin.*

Definice 5.5 *Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá* Eukleidovský vektorový prostor.
Jako standardní skalární součin *na* $\mathbb{R}^n$ *budeme označovat*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 5.6 *Nechť* L *je Eukleidovský prostor dimenze* n.Normou *vektoru* $x \in L$ *nazveme číslo*

$$\|x\| = \sqrt{g(x, x)} \quad \left(= \sqrt{x \cdot x}\right).$$

Věta 5.7 $\forall x, y \in (L_n, +, \cdot)_{\mathbb{R}}$ *platí* Cauchyova-Schwarzova nerovnost:

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta 5.8 $\forall x, y \in L$ *platí trojúhelníková nerovnost.*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Důsledek 5.9 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ *právě tehdy, když* $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Definice 5.10 Velikost úhlu φ *mezi dvěma nenulovými vektory je definována takto:*

$$\cos\varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Poznámka 5.11 *Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti vyplývá, že definice je korektní. Absolutní hodnota čitatele je menší nebo rovna jmenovateli.*
Omezujeme se na $\varphi \in < 0, \pi >$.

Definice 5.12 *Prvky* $x, y \in L$ *nazveme* ortogonálními, *jestliže platí* $x \cdot y = 0$.

Poznámka 5.13 *Jde o zobecnění pojmu "kolmost" pro libovolné prostory a libovolné báze.*

Věta 5.14 *Pro každé dva ortogonální vektory platí Pythagorova rovnost*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definice 5.15 *Báze vektorového prostoru se nazývá* ortogonální, *jestliže jsou každé dva její vektory navzájem ortogonální. Báze vektorového prostoru se nazývá* ortonormální, *jestliže platí*

$$a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Důsledek 5.16 *Jsou-li ve vektorovém prostoru dány nenulové vektory* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *po dvou ortogonální, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 5.17 ***(Grammova-Schmidtova)*** *V každém netriviálním eukleidovském vektorovém prostoru lze sestrojit ortonormální bázi.*

Důkaz: Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Mějme bázi $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nejdříve vytvoříme ortogonální bázi $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a pak ji normalizujeme. Každý prvek nové báze $\mathcal{B}$ je roven stejnolehlému prvku staré báze $\mathcal{A}$ a lineární kombinaci již vytvořených prvků nové báze $\mathcal{B}$. Položíme

$$b_1 = a_1,$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1,$$

kde α_1 je neznámý koeficient. Vynásobíme skalárně poslední rovnost vektorem b_1. Aby vektory b_1, b_2 byly ortogonální, musí platit

$$0 = (a_2 \cdot b_1) + \alpha(b_1 \cdot b_1),$$

$$\alpha = -\frac{a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1}.$$

Určili jsme koeficient α a tím také vektor b_2. Vektor b_2 musí být nenulový, jinak by platilo, že $a_2 = -\alpha_1 b_1 = -\alpha_1 a_1$, což by byl spor s tvrzením, že a_1, a_2 jsou prvky báze, t.j. jsou lineárně nezávislé. Dále položíme

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2,$$

kde β_1, β_2 jsou neznámé koeficienty. Postupujeme analogicky jako v předchozím případě a dostáváme

$$\beta_i = -\frac{a_3 \cdot b_i}{b_i \cdot b_i}, \ i = 1, 2.$$

Vektor b_3 musí být opět nenulový. Obecně tedy položíme

$$b_k = a_k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j b_j, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

kde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}$ jsou neznámé koeficienty. Odtud vypočteme

$$\gamma_j = -\frac{a_k \cdot b_j}{b_j \cdot b_j}, \quad j = 1, 2, \ldots n.$$

Nakonec provedeme normalizaci, tj. každý vektor vzniklé ortogonální báze nahradíme jednotkovým vektorem stejného směru:

$$c_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$$

Dostáváme ortonormální bázi $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. □

Poznámka 5.18 *Stejným způsobem můžeme postupovat i při hledání ortonormální báze podprostoru zadaného generující množinou. Jestliže jsou vektory generující množiny lineárně závislé, objeví se během konstrukce některý z vektorů b_i jako nulový. Pak ovšem nemůže být prvkem báze, proto jej vyloučíme a pokračujeme dále.*

Příklad 5.19 *Určete ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory*

$$\vec{a} = (1, 1, -1, -1),\ \vec{b} = (1, -1, 1, 1),\ \vec{c} = (-1, -2, 0, 1),\ \vec{d} = (1, -2, 0, 1).$$

Řešení. Hledané ortogonální vektory si označíme $\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$. Položíme tedy

$$\vec{k} = \vec{a},$$

$$\vec{l} = \vec{b} + \alpha\vec{k}, \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \vec{l} = (3, -1, 1, 1).$$

$$\vec{m} = \vec{c} + \beta\vec{k} + \gamma\vec{l}, \quad \Rightarrow \beta = 1,\ \gamma = 0, \quad \Rightarrow \vec{m} = (0, -1, -1, 0).$$

$$\vec{n} = \vec{d} + \delta\vec{k} + \eta\vec{l} + \zeta\vec{m}, \quad \Rightarrow \delta = \frac{1}{2},\ \eta = -\frac{1}{2},\ \zeta = -1, \quad \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, 0, 0).$$

Ortogonální bázi tvoří vektory $\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}$.

5.3 Ortogonální průmět

Definice 5.20 *Říkáme, že dva podprostory K a M vektorového prostoru L jsou* ortogonální, *jestliže pro $\forall x \in K$ a pro $\forall y \in M$ platí: $x \cdot y = 0$.*

Důsledek 5.21 *Nechť K a M jsou ortogonální podprostory. Potom*

$$K \cap M = \mathcal{O} \Rightarrow K + M = K \oplus M.$$

Definice 5.22 Ortogonálním doplňkem *podprostoru K nazveme množinu*

$$M = \{x \in (L \setminus K) : x \cdot y = 0 pro \forall y \in K\}.$$

Důsledek 5.23 *Ortogonální doplněk podprostoru doplněný o nulový vektor je podprostor.*

Příklad 5.24 *Určete ortogonální doplněk podprostoru*

$$K = \langle a = (-1, 2, 0, 1), b = (3, 1, -2, 4), c = (-4, 1, 2, -3)\rangle .$$

Řešení. Ortogonální doplněk bude tvořen vektory $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, pro něž platí

$$v \cdot a = v \cdot b = v \cdot c = 0.$$

Úloha vede na homogenní soustavu rovnic. Elementárními úpravami převedeme matici koeficientů na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Máme soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých. Řešení bude záviset na dvou parametrech a má tvar $v = (4s - t, 2s - t, 7s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}, s^2 + t^2 \neq 0$. (Parametry s, t se nemohou oba současně rovnat nule, protože bychom dostali nulový vektor, který nepatří do ortogonálního doplňku.) Tím máme popsán ortogonální doplněk.

Bázi ortogonálního podprostoru M získáme vhodnou volbou hodnot nezávislých parametrů, např. $s = 1, t = 0$ a $s = 0, t = 1$. Dostáváme $M = \langle (4, 2, 7, 0), (-1, -1, 0, 1)\rangle$.

Definice 5.25 Ortogonální průmět *vektoru v do podprostoru K je vektor $u \in K$, pro který platí $v = u + z$, kde z je ortogonální k podprostoru K.*

Věta 5.26 *Nechť K je podprostor vektorového prostoru L. Potom $\forall v \in L$ můžeme sestrojit jeho ortogonální průmět do podprostoru K.*

Poznámka 5.27 *Tento postup se využívá v numerické matematice, kde se nazývá* metoda nejmenších čtverců.

Příklad 5.28 *V prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete ortogonální průmět vektoru $x = (1, 2, 3)$ do podprostoru $K = \langle a, b\rangle$, kde $a = (-1, 1, 1), b = (1, 1, , 1)$.*

Řešení. Zapíšeme si vektor x ve tvaru

$$x = \alpha a + \beta b + z,$$

kde $a, b \in k,\ z \perp a, b$ a tedy $z \cdot a = 0, z \cdot b = 0$. Vynásobíme vyjádření x skalárně vektory a, b, dostaneme

$$x \cdot a = \alpha(a \cdot a) + \beta(b \cdot a) + z \cdot a,$$
$$x \cdot b = \alpha(a \cdot b) + \beta(b \cdot b) + z \cdot b.$$

Dosazením získáme soustavu rovnic

$$3\alpha + \beta = 4,$$
$$\alpha + 3\beta = 6,$$
$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{7}{4},$$

hledaný průmět u je

$$u = \alpha a + \beta b = \frac{3}{4}(-1, 1, 1) + \frac{7}{4}(1, 1, 1) = \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Zkouška:

$$z = x - u = (1, 2, 3) - \left(1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

potom $z \cdot a = z \cdot b = 0$.

Poznámka 5.29 *Při výpočtu ortogonálního průmětu nemůžeme (jako při výpočtu ortogonální báze) změnit normu (velikost) vektoru jeho vynásobením nenulovým číslem.*

5.4 Vektorový počet v E^3. Vektorový a smíšený součin.

Definice 5.30 *Dvě báze $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ téhož vektorového prostoru L nazveme* souhlasně orientované*, jestliže matice přechodu od $\mathcal{A}$ k $\mathcal{B}$ má kladný determinant a* nesouhlasně orientované *v opačném případě.*

Vzhledem k tomu, že $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ a pro každou regulární matici M je $|M^{-1}| = |M|^{-1}$, mají obě matice determinant buď současně kladný a nebo současně záporný. Tím se množina všech bází vektorového prostoru L rozpadne na dvě disjunktní třídy.

Každé dvě báze patřící do stejné třídy mají matici přechodu s kladným determinantem. Naopak každé dvě báze patřící do různých tříd mají matici přechodu se záporným determinantem.

Souhlasně orientovaný systém se také označuje jako *kladný* nebo *pravotočivý,* symbolicky E^+, nesouhlasně orientovaný systém jako *záporný* nebo *levotočivý,* symbolicky E^-.

V praxi (hlavně technické) se kladný (pravotočivý) systém v E^3 definuje následujícím způsobem:

Definice 5.31 *Je dána souřadná soustava $(P, (e_1, e_2, e_3))$. Do roviny (P, e_1, e_2) umístíme hodinky tak,aby ciferník směřoval do poloprostoru v němž leží e_3. Úhel mezi vektory e_1, e_2 musí být menší než π. Přejdeme-li nyní z e_1 na e_2* proti směru *hodinových ručiček, tvoří vektory (e_1, e_2, e_3) kladně orientovanou soustavu. V případě přechodu* po směru *hodinových ručiček jde o záporně orientovanou soustavu.*

Pravidlo pravé ruky nabízí jinou definici kladně a záporně orientované soustavy: Nechť jsou dány tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Vezmeme menší z úhlů, které svírají vektory a, b. Položíme palec pravé ruky na vektor a a ukazováček pravé ruky na vektor b. Směřuje-li dlaň do poloprostoru, v němž leží vektor c, jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *souhlasně (kladně) orientované,* v opačném případě jsou vektory *nesouhlasně (záporně) orientované.*

Důsledek 5.32 *Kanonická báze (i, j, k) prostoru E^3 je pravotočivá (kladná). Přitom $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$.*

Definice 5.33 ***(Vektorový součin.)*** *Mějme orientovaný prostor E^3. Pro každé dva vektory $a, b \in E^3$ definujeme jejich vektorový součin následovně: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, kde $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, φ je úhel mezi vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a trojice $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b})$ tvoří kladně orientovanou soustavu.*

Důsledek 5.34 *Geometrický význam vektorového součinu je znázorněn na náčrtku 5.4.1. Délka vektoru $\vec{c}$ je rovna ploše lichoběžníka P sestrojeného z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.*

Z definice vektorového součinu lze snadno odvodit, že je-li (e_1, e_2, e_3) pravotočivá ortonormální báze v E^3, pak $e_i \times e_j = \pm e_k$ pro každou permutaci (i, j, k) z množiny $\{1, 2, 3\}$, přičemž znaménko $(+)$ se bere pro sudé permutace a znaménko $(-)$ pro liché permutace.

Věta 5.35 *Nechť $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je pravotočivá ortonormální báze v E^3.*
Nechť $\vec{a} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$, $\vec{b} = \varepsilon\,\vec{i} + \zeta\,\vec{j} + \eta\,\vec{k}$. Potom

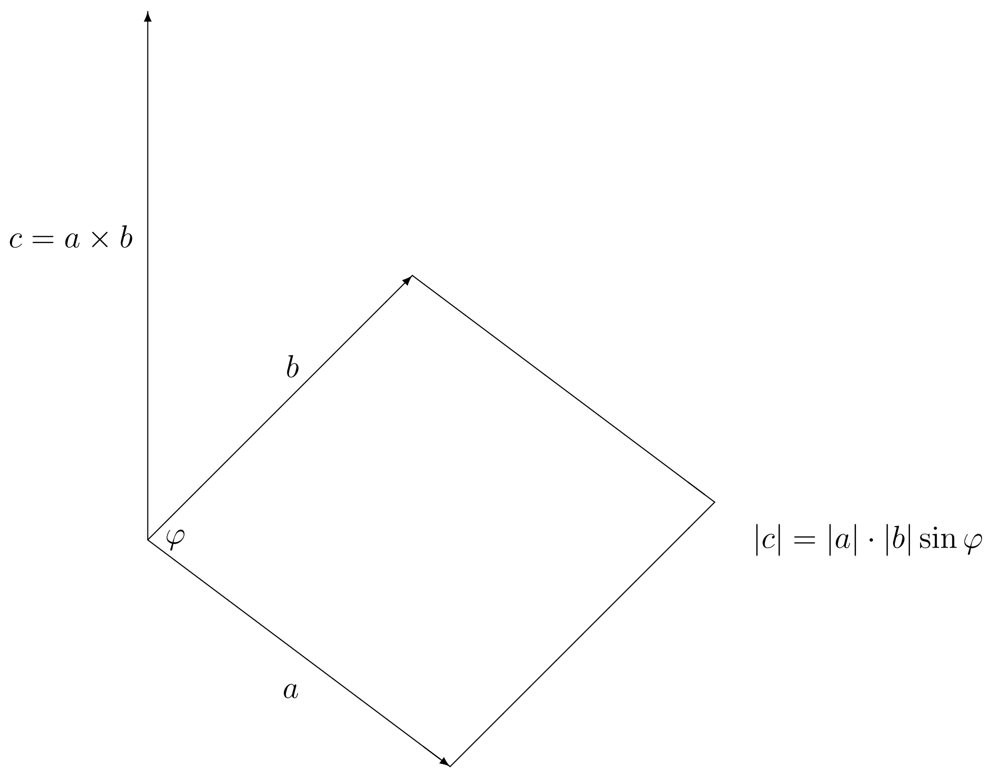
$$a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta & \eta \end{vmatrix}. \tag{5.4.1}$$

Poznámka 5.36 *Ve vzorci 5.4.1 je použit formální determinant, jehož prvky jsou čísla a vektory. Formálně na něj aplikujeme Sarrusovo pravidlo. Výsledkem výpočtu zde nebude číslo, ale vektor*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (\beta\eta - \gamma\zeta)\vec{i} + (\gamma\varepsilon - \alpha\eta)\vec{j} + (\alpha\zeta - \beta\varepsilon)\vec{k}.$$

Uveďme základní vlastnosti vektorového součinu. Přímo z definice lze odvodit, že:

1. $a \times b = -(b \times a)$;
2. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$;
3. $a \times (\beta\, b) = (\beta\, a) \times b = \beta(a \times b)$ pro každé reálné číslo β;



Obrázek 5.4.1: Geometrický význam vektorového součinu

4. a, b jsou lineárně závislé právě tehdy když $a \times b = \mathcal{O}$.

Definice 5.37 ***(Smíšený součin.)*** Smíšeným součinem *vektorů* $a, b, c \in E^3$ *nazýváme výraz* $[a, b, c] = a \cdot (b \times c)$.

Věta 5.38 *Nechť* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *jsou lineárně nezávislé vektory z* E^3. *Potom* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ *je objem rovnoběžnostěnu s hranami* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. *V případě, že vektory* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *jsou kladně orientované, je* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$, *v opačném případě je* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$.

Geometrický význam vektorového součinu je znázorněn na náčrtku 5.4.2.

Věta 5.39 *Nechť* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. *Potom platí*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Uveďme základní vlastnosti smíšeného součinu:

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$.
2. Pro každé reálné číslo ϱ platí: $[\varrho\,\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \varrho\,\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \varrho\,\vec{c}] = \varrho\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$.
4. Vektory $\vec{a}\vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

5.5 Lineární útvary v E^3.

5.5.1 Přímka

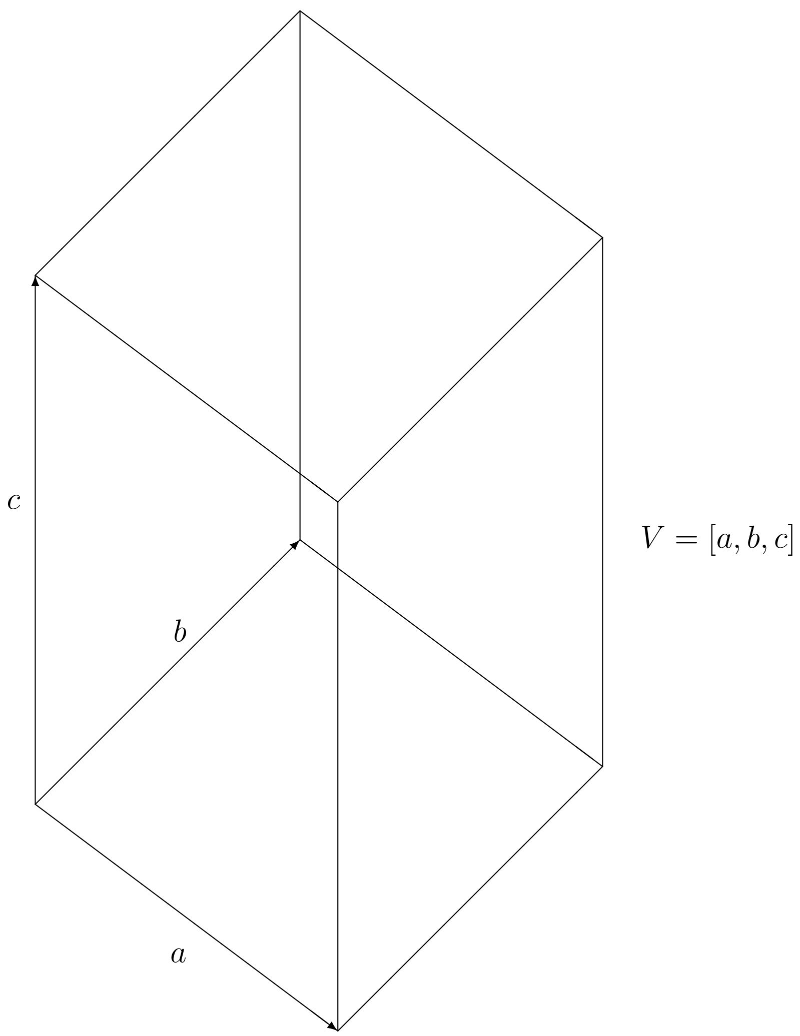
Je-li dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak přímka p procházející bodem A ve směru vektoru $\vec{u}$ má *vektorovou rovnici* $X = A + t\mathbf{u}$. Rozepsáním vektorové rovnice podle jednotlivých složek dostáváme tzv. *parametrické rovnice* přímky p :

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3 \end{aligned}$$

Vyloučením parametru t dostaneme tzv. *obecnou rovnici přímky*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned},$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ jsou konstanty. Jde o rovnice dvou různých rovin, jejichž průsečíkem je přímka p.



Obrázek 5.4.2: Geometrický význam smíšeného součinu

Poznámka 5.40 *Ze středoškolské analytické geometrie víme, že normálové vektory $\vec{n_1}$ a $\vec{n_2}$ rovin*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

jsou $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ a $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Proto musí platit:

$$\vec{n_1} \cdot \vec{u} = 0 \quad a \quad \vec{n_2} \cdot \vec{u} = 0.$$

Rozepsáním těchto skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{aligned} a_1u_1 + b_1u_2 + c_1u_3 &= 0 \\ a_2u_1 + b_2u_2 + c_2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Souřadnice směrového vektoru $\vec{u}$ jsou tedy netriviálním řešením systému lineárních homogenních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

5.5.2 Rovina

Je-li dán bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ a dva lineárně nezávislé vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, pak rovina ϱ určená bodem A a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ má *vektorovou rovnici*

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v},$$

kde $X = [x, y, y]$ a t, s jsou reálné parametry. Rozepsáním vektorové rovnice podle jednotlivých složek dostáváme tzv. *parametrické rovnice roviny*

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

Vyloučením parametrů t, s dostaneme *obecnou rovnici* roviny ϱ

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Každý vektor $\vec{w} \neq \vec{o}$, kde $\vec{o} = (0, 0, 0)$, leží v rovině ϱ, pokud jeho souřadnice (w_1, w_2, w_3) vyhovují rovnici $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$. Všechny nenulové násobky vektoru $\vec{n} = (a, b, c)$ jsou normálovými vektory. *Obecnou rovnici roviny* obdržíme teké rozepsáním determinantu

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5.5.3 Úsečka, polopřímka, polorovina

Nechť $A, B \in E^3$, $A \neq B$. Vektorová rovnice

$$X = A + t\vec{u},$$

kde $\vec{u} = B - A$ a $t \in< 0, +\infty)$, je rovnicí polopřímky AB. Pokud $t \in< 0, -\infty)$, popisuje uvedený vztah polopřímku BA a pro $t \in< 0, 1 >$ úsečku AB. Analogická tvrzení lze zformulovat i pro parametrické rovnice.

Jestliže ve vektorové rovnici roviny položíme $t \in \mathbb{R}$, $s \in< 0, +\infty)$, dostaneme vektorovou rovnici poloroviny s hraniční přímkou $p : X = A + t\vec{u}$ a vnitřním bodem $C = A + \vec{v}$.

5.5.4 Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v E^3 mohou být

1. *různoběžné,* mají-li společný právě jeden bod
2. *rovnoběžné,* leží-li v jedné rovině a nejsou různoběžné
3. *mimoběžné,* neleží-li v jedné rovině

Určování vzájemné polohy dvou přímek převedeme na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.
Nechť přímky p, q jsou zadány vektorovými rovnicemi

$$p : X = P + s\vec{u}, \quad q : Y = Q + t\vec{v} \tag{5.5.2}$$

nebo

$$p : \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 & = & 0 \end{array} \right. \qquad q : \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.5.3}$$

Vzájemná poloha přímek p, q potom souvisí s řešitelností soustavy rovnic

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 & = & 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 & = & 0 \\ \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 & = & 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.5.4}$$

vzniklé rozepsáním vztahu

$$P - Q = t\vec{v} - s\vec{u}, \tag{5.5.5}$$

který vychází z předpokladu, že obě přímky mají společný alespoň jeden bod.

Označme A matici koeficientů soustavy (5.5.5), A^* rozšířenou matici této soustavy, B matici koeficientů soustavy (5.5.4) a konečně B^* rozšířenou matici této soustavy. Potom přímky p, q jsou:

1. mimoběžné $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow h(A^*) = 3 \\ \Longleftrightarrow h(B^*) = 4 \end{array}$

2. různoběžné $\iff h(A) = h(A^*) = 2$
$\iff h(B) = h(B^*) = 3$

3. rovnoběžné a různé $\iff h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2$
$\iff h(B) = 2 \wedge h(B^*) = 3$

4. totožné $\iff h(A) = h(A^*) = 1$
$\iff h(B) = h(B^*) = 2$

Úhel φ přímek p, q definujeme jako menší z úhlů,které svírají přímky p, q, pokud jsou různoběžné a jako nulový, pokud jsou rovnoběžné. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou směrové vektory p, q, potom

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}.$$

5.5.5 Vzájemná poloha přímky a roviny.

Přímka a rovina se nazývají

1. *různoběžné,* mají-li právě jeden společný bod
2. *rovnoběžné*
   (a) *různé,* nemají-li žádný společný bod.
   (b) *splývající,* leží-li přímka v rovině.

Při určování vzájemné polohy přímky a roviny využijeme vlastností skalárního součinu. Nechť přímka p je dána rovnicí (5.5.2) a nechť $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ϱ. Potom jsou přímky

1. p a ϱ *různoběžné* tehdy a jen tehdy, když $\vec{u}\cdot\mathbf{n} \neq 0$.
2. p a ϱ rovnoběžné různé (t.j. $p \not\subset \varrho$) tehdy a jen tehdy, když $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \notin \varrho$.
3. p a ϱ rovnoběžné splývající (t.j. $p \subset \varrho$) tehdy a jen tehdy, když $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \wedge A \in \varrho$.

Přímka p je kolmá na rovinu ϱ, jestliže je směrový vektor přímky nenulovým násobkem normálového vektoru roviny. Úhel φ, který svírá přímka p a rovina ϱ, je definován jako úhel směrového vektoru přímky u a jeho ortogonálního průmětu u' do roviny ϱ. Pokud je $p \perp \varrho$, je $\varphi = \pi/2$. Úhel počítáme podle vzorce

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{u}'|}{|\vec{u}|.|\vec{u}'|}$$

5.5.6 Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny nazýváme

- *různoběžné,* mají-li společnou přímku;
- *rovnoběžné různé,* nemají-li žádný společný bod;
- *rovnoběžné splývající,* jsou-li totožné.

Určování vzájemné polohy dvou rovin opět převedeme na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.
Nechť jsou roviny ϱ a σ dány vztahy

$$\begin{array}{ll} \varrho: & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \sigma: & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \tag{5.5.6}$$

Nechť A a A^* jsou matice koeficientů a matice rozšířená soustavy (5.5.6). Potom ϱ a σ jsou

1. *různoběžné* tehdy a jen tehdy, když $h(A) = h(A^*) = 2$
2. *rovnoběžné různé* tehdy a jen tehdy, když $h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2$
3. *totožné* tehdy a jen tehdy, když $h(A) = h(A^*) = 1$

Úhel φ, který roviny svírají, lze určit jako úhel jejich normálových vektorů $\vec{n_1}, \vec{n_2}$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$$

5.6 Analytická geometrie lineárních útvarů

V této části uvedeme pouze některé často se vyskytující vztahy.

5.6.1 Vzdálenost bodu od přímky

Na střední škole jste se seznámili s tím, že vzdálenost v bodu $C = (x_0, y_0)$ od přímky $ax + by + c = 0$ je

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Při řešení této úlohy můžeme ale využít i vlastností vektorového součinu.
Mějme přímku p zadanou dvěma body A, B a bod C. Pak vzdálenost přímky p a bodu C je dána vztahem

$$d = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|}.$$

5.6.2 Příčka mimoběžek

Předpokládejme, že máme zadány dvě mimoběžné přímky p a q. Nechť přímka p je určena bodem A a směrovým vektorem $\vec{a}$, přímka q je je určena bodem B a směrovám vektorem $\vec{b}$. Označme $\vec{AB} = \vec{c}$. Potom je délka příčky těchto mimoběžek rovna

$$d = \frac{\left|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\right|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

5.6.3 Rovnice roviny procházející body třemi body

Nechť $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ jsou tři body neležící na jedné přímce. Potom rovnice roviny ϱ procházející těmito body je určena vztahem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kde (x, y, z) jsou souřadnice libovolného bodu ležícího v rovině ϱ.

5.7 Kanonické tvary kuželoseček.

Definice 5.41 *Množinu bodů z E^2 o souřadnicích (x, y) nazveme* kuželosečkou, *jestliže vyhovuje rovnici*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{5.7.7}$$

kde $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$. Kvadratickou částí rovnice kuželosečky nazýváme výraz

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + +2a_{12}xy,$$

lineární částí rovnice výraz

$$2a_1x + 2a_2y.$$

Matici

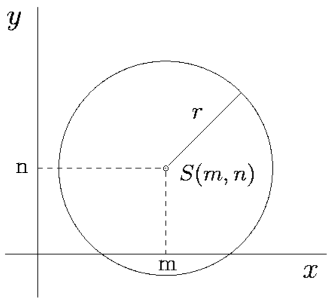
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí kuželosečky.

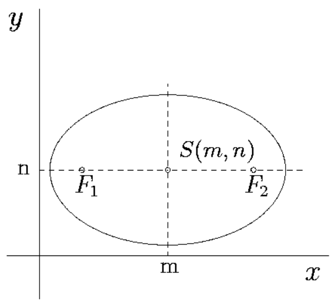
V tabulce 5.7.1 jsou bez podrobného zdůvodnění uvedeny tzv. *kanonické tvary* kuželoseček, které jsou obecně zadány rovnicí (5.7.7):

Poznámka 5.42 *Kružnice je speciální typ elipsy pro $a = b$.*

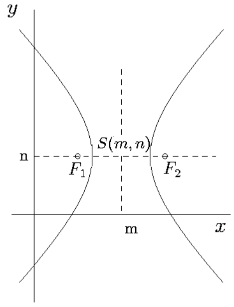
Některé kanonické tvary jsou ilustrovány na obrázcích.



Obrázek 5.7.3: Kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$



Obrázek 5.7.4: Elipsa: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$



Obrázek 5.7.5: Hyperbola: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Imaginární elipsa	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Elipsa	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Parabola	$y^2-2px=0$
Bod	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Dvě různoběžné přímky	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
$\emptyset$	$x^2+a^2=0$
Dvě rovnoběžné přímky	$x^2-a^2=0$
Dvě splývající přímky	$x^2=0$

Tabulka 5.7.1: Kanonické tvary kuželoseček

5.8 Kanonické tvary kvadrik.

Definice 5.43 *Množinu bodů z* E^3 *o souřadnicích* (x,y,z) *nazveme* kvadrikou *nebo* kvadratickou plochou, *jestliže vyhovuje rovnici*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0, \quad (5.8.8)$$

kde $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23},a_1,a_2,a_3,a_0\in\mathbb{R}$. *Kvadratickou částí rovnice kvadriky nazýváme výraz*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz,$$

lineární částí rovnice výraz

$$2a_1x+2a_2y+2a_3z.$$

Matici

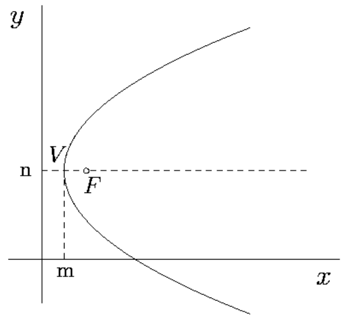
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0\end{pmatrix}$$

nazýváme maticí kvadriky.

Poznámka 5.44 *Koule je speciální typ elipsoidu pro* $a=b=c$.

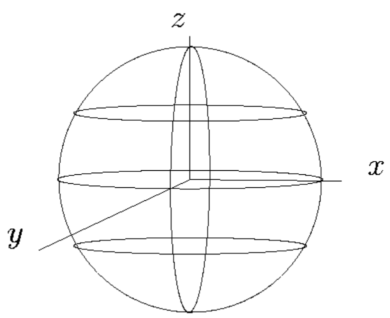
Imaginární elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
Jednodílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
Dvoudílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
Eliptický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
Hyperbolický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
Imaginární kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
Eliptická kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Imaginární válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
Eliptická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
Hyperbolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
Parabolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}-2py=0$
Dvě imaginární různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Dvě různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Dvě imaginární rovnoběžné roviny	$x^2+a^2=0$
Dvě rovnoběžné roviny	$x^2-a^2=0$
Dvě splývající roviny	$x^2=0$

Tabulka 5.8.2: Kanonické tvary kvadrik



Obrázek 5.7.6: Parabola: $(y-n)^2 = 2p(x-m)$

V tabulce 5.8 jsou uvedeny tzv. *kanonické tvary kvadrik* obecně zadaných rovnicí (5.8.8). Některé kanonické tvary jsou ilustrovány na náčrtcích 5.8.7–5.8.16.



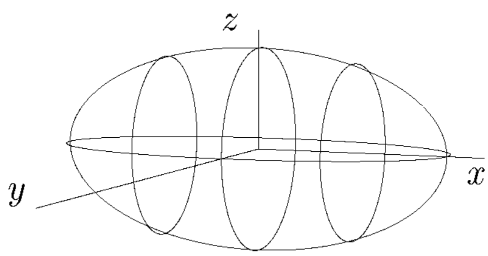
Obrázek 5.8.7: Koule: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

5.9 Základní vlastnosti kuželoseček a kvadrik

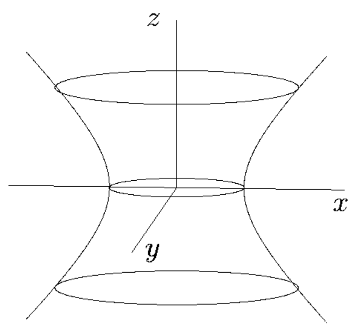
Definice 5.45 *Kvadratická plocha s maticí A se nazývá* regulární, *jestliže* $|A| \neq 0$. *Kvadratická plocha se nazývá* singulární, *jestliže* $|A| = 0$.

Věta 5.46 *Regulární kuželosečky jsou: elipsa, hyperbola, parabola. Regulární kvadratické plochy jsou: elipsoid, hyperboloid, paraboloid.*

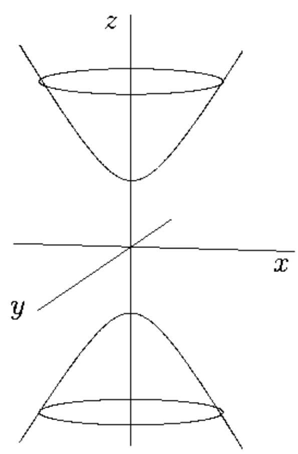
Definice 5.47 *Kvadratická plocha se nazývá* středová, *jestliže má jedinný střed souměrnosti (nazývá se střed kvadratické plochy).*



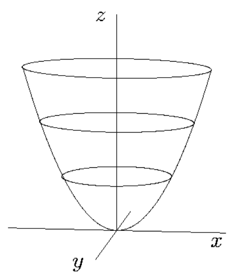
Obrázek 5.8.8: Elipsoid: $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$



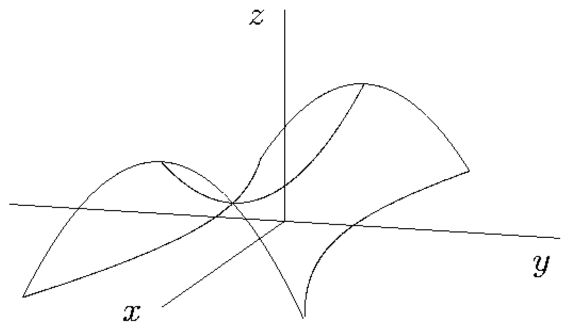
Obrázek 5.8.9: Jednodílný hyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



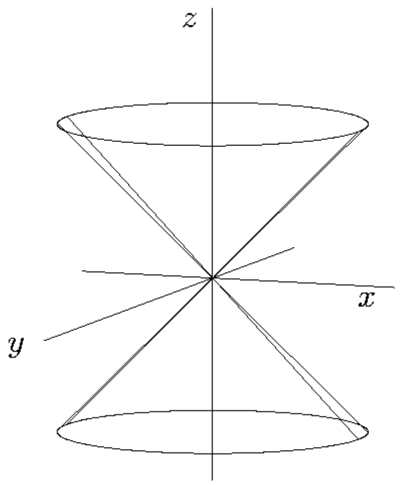
Obrázek 5.8.10: Dvojdílný hyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$



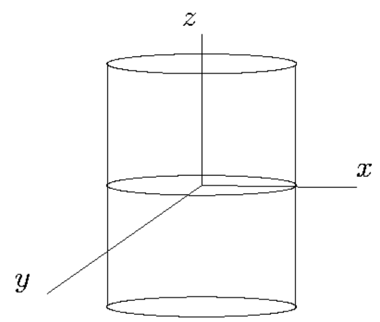
Obrázek 5.8.11: Eliptický paraboloid: $x^2 + y^2 - 2z = 0$



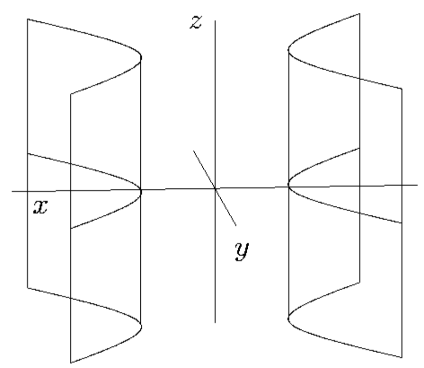
Obrázek 5.8.12: Hyperbolický paraboloid: $x^2 - y^2 - 2z = 0$



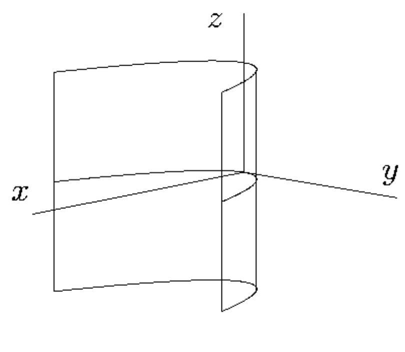
Obrázek 5.8.13: Kuželová plocha: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



Obrázek 5.8.14: Eliptická válcová plocha: $x^2 + y^2 = 1$



Obrázek 5.8.15: Hyperbolická válcová plocha: $x^2 - y^2 = 1$



Obrázek 5.8.16: Parabolická válcová plocha: $y^2 = 2px$

Z předchozí definice je zřejmé, že bod $S = (s_1, s_2, s_3)$ je středem kvadratické plochy s maticí A právě tehdy, když uspořádaná trojice (s_1, s_2, s_3) je jediným řešením soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & + & a_1 & = & 0 \\ a_{12}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & + & a_2 & = & 0 \\ a_{13}x & + & a_{23}y & + & a_{33}z & + & a_3 & = & 0 \end{array}$$

Každou kuželosečku či kvadriku lze vhodnou transformací souřadnic x, y, z převést na kanonický tvar. Ilustrujme toto tvrzení na následujícím příkladu:

Příklad 5.48 *Určete kanonickou rovnici kuželosečky*

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0. \tag{5.9.9}$$

Použijeme Lagrangeovu metodu doplnění na čtverec. Vezmeme všechny členy obsahující x a doplníme je na úplný čtverec. Potom provedeme totéž pro členy obsahující y. Levou stranu rovnice (5.9.9) tedy ekvivalentně upravujeme na tvar:

$$\begin{gathered} (x^2 + 4xy + 2x) + y^2 + 1 = 0, \\ [(x + 2y + 1)^2 - 4y^2 - 4y - 1] + y^2 + 1 = 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3y^2 - 4y = 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) = 0, \\ (x + 2y + 1)^2 - 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0, \\ -\frac{(x + 2y + 1)^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}} = 1. \end{gathered}$$

Označme

$$\xi = x + 2y + 1 \quad \eta = y + \frac{2}{3}.$$

Potom

$$-\frac{\xi^2}{4/3} + \frac{3\eta^2}{4/3} = 1. \tag{5.9.10}$$

Dostali jsme rovnici hyperboly. Kanonickou rovnicí kuželosečky (5.9.9) je rovnice (5.9.10).

5.10 Shrnutí

Definovali jsme si skalární, vektorový a smíšený součin vektorů. Zatímco skalární součin může být definován více způsoby v libovolném netriviálním vektorovém prostoru, vektorový a smíšený součin jsme definovali pouze v $\mathbb{E}^3$. Zavedli jsme si pojem ortogonálnosti vektorů, který v $\mathbb{E}^2$ a $\mathbb{E}^3$ je shodný s pojmem kolmosti vektorů.

Grammova - Schmidtova věta říká, že v každém netriviálním vektorovém prostoru existuje ortogonální báze. Důkaz věty obsahuje přesný pracovní postup, jak sestrojit hledanou ortogonální bázi.

Výhody práce s ortogonální bází oceníme např. při určování ortogonálního průmětu do podprostoru. Obecně zde musíme řešit soustavu lineárních algebraických rovnic se symetrickou maticí koeficientů. Pokud budeme mít ortogonální bázi podprostoru, potom matice soustavy bude mít diagonální matici.

Vektorový a smíšený součin je vhodné používat v jejich vyjádření pomocí determinantů, který jsme si ukázali. Z vlastností determinantů potom automaticky vyplývají i vlastnosti vektorového či smíšeného součinu.

Získané znalosti z vektorového počtu jsme využili při definování lineárních útvarů v $\mathbb{E}^3$ a při odvozování jejich vlastností. Při určování vzájemné polohy přímek, přímky a roviny, rovin jsme využili poznatků o řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic.

5.11 Kontrolní příklady ke kapitole 5

1. Určete kosinus úhlu φ sevřeného vektory $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ a $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

2. V $\triangle ABC$, kde $A = [2; 3; 5]$, $B = [-1; -3; 8]$ a $C = [5; -2; 1]$ určete délky stran a velikosti vnitřních úhlů.

3. Určete ortogonální průmět w vektoru v do podprostoru P

   (a) $v = (4, 2, -5, 3)$, $\mathcal{P} =< (5, 1, 3, 3), (3, -1, -3, 5), (3, -1, 5, -3) >$.

   (b) $v = (2, 5, 2, -2)$, $\mathcal{P} =< (1, 1, 2, 8), (0, 1, 1, 3), (1, -2, 1, 1) >$.

4. Určete vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ a najděte obsah rovnoběžníka sestrojeného z vektorů $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ a $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

5. Určete $\sin(\vec{a}, \vec{b})$, kde $\vec{a} = (3; 1; 2)$ a $\vec{b} = (2; -2; 4)$.

6. Zjednodušte: $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})]$.

7. Dané rovnice přímky převeďte na parametrické.

   (a) $2x + y + 4 = 0$

   (b) $x - y = 1$

8. Napište rovnici přímky, která

   (a) prochází body $A = [2; -1]$ a $B = [3; -2]$.

   (b) prochází bodem $B = [4; 3]$ a je kolmá na přímku $q : x = 3 - 3t, y = 2 + 5t$.

Výsledky jsou uvedeny v části 15.5.

Kapitola 6

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné - část 1

6.1 Cíl kapitoly

Jedním ze základních matematických pojmů je pojem funkce. V této kapitole začneme podrobněji studovat vlastnosti funkcí jedné proměnné.

Začneme zavedením limity a odvozením jejich vlastností. Pojem limity funkce je jedním z nejzávažnější pojmů vyšší matematiky. Věnujte proto, prosím, dostatek vašeho času promýšlením její definice a snažte se proniknout do podstaty tohoto pojmu. Pokud se vám to podaří, můžeme s trochou nadsázky říci, že matematika vám nebude dělat problémy, protože jste schopni abstraktního myšlení. Ukážeme si, jak se počítají limity funkce ve vlastních i nevlastních (v nekonečnu) bodech. Pomocí pojmu limity si budeme definovat spojitost funkce v bodě a na intervalu. Uvedeme si vlastnosti spojitých funkcí a klasifikaci nespojitostí.

Limita se stane také výchozím aparátem pro určení derivace funkce. Od příkladu, kde si ukážeme, že směrnice tečny ke křivce je limitou podílu diferencí, přejdeme k definici derivace a odvození nejdůležitějších vlastností derivace. Ukážeme si jak se derivují elementární funkce a jaké jsou základní vlastnosti derivace.

Zavedeme si pojem diferenciál funkce a ukážeme si, jako jedno z jeho možných použití, přibližný výpočet hodnoty funkce pomocí diferenciálu.

Poukážeme také na užitečnost vhodných programů (Maple, Matlab, Mathematica) při konkrétních výpočtech.

6.2 Pojem okolí bodu (ε - okolí)

Prakticky ve všech úvahách, týkajících se pojmů, které budou dále zavedeny (limita funkce, spojitost funkce, derivace funkce) je nezbytné pracovat v některé blízkosti dopředu zadaného bodu. Aby bylo možné o těchto pojmech hovořit, je nutné napřed tuto „blízkost“ vysvětlit. To se většinou dělá zajedením pojmu „okolí“ bodu.

Definice 6.1 *Epsilon (ε) okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme otevřený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kde ε je některé malé kladné číslo.*

Pro značení okolí bodu jsou často používány symboly: $O(a)$, $O(a,\varepsilon)$, $U(a)$ nabo $U(a,\varepsilon)$.
Pravé okolí: $[a, a+\varepsilon)$.
Levé okolí: $(a-\varepsilon, a]$.

6.3 Limita funkce

Definice 6.2 *Číslo b se nazývá (vlastní) limita funkce f v bodě a, jestliže funkce je definována v okolí tohoto bodu a jestliže pro $\forall\,\varepsilon\,\exists\,\delta > 0$ (v závislosti na ε) taková, že $\forall\,x : |x-a| < \delta,\ x \neq a$ máme $|f(x)-b| < \varepsilon$.*

Tento fakt symobolicky zapisujeme následujícím způsobem:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ nebo } f(x) \to b\ (x \to a).$$

Příklad 6.3 *Nechť $f(x) = x^3$. Ukažte, že $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.*

Řešení. Víme, že $|x^3-8| = |x^2+2x+4| \cdot |x-2|$. Podívejme se, co se děje, když se x blíží 2 v jistém okolí tohoto bodu, např. v okolí s poloměrem 1, tj.

$$2-1 < x < 2+1 \implies 1 < x < 3.$$

Pro libovolnou hodnotu x v tomto okolí platí

$$7 < |x^2+2x+4| < 19,$$

a tedy

$$|x^3-8| < 19|x-2|.$$

Nechť ε je libovolné pevně zvolené (malé) kladné číslo. Z předchozí nerovnosti plyne, že

$$|x^3-8| < \varepsilon \text{ if } |x-2| < \frac{\varepsilon}{19} = \delta.$$

($\varepsilon/19$ musí být menší než poloměr okolí, tj. 1.)

Geometricky splnění nerovnosti $|f(x)-b| < \varepsilon$ při splnění nervnosti $|x-a| < \delta$ znamená, že jestliže sestrojíme na ose y okolí bodu b s libovolně malým poloměrem ε, pak lze určit poloměr δ pro takové okolí bodu a na ose x, že hodnoty argumentu x (s výjimkou $x = a$) budou patřit do 2δ-okolí bodu a a hodnoty funkce padnou do 2ε okolí bodu b.

Příklad 6.4 *Definujme funkci*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $\lim_{x\to 1} y(x) = \frac{1}{2}$.

Řešení. Musíme dokázat, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x-1| < \delta,\ x \neq 1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že $\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-1|$ a $\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ jestlie $|x-1| < 2\varepsilon = \delta$.

Příklad 6.5 *Ověřte, že neexistuje limita* $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Řešení. Nechť limita je rovna číslu b, tj.

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = b.$$

Vybereme posloupnost $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$. Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0.$$

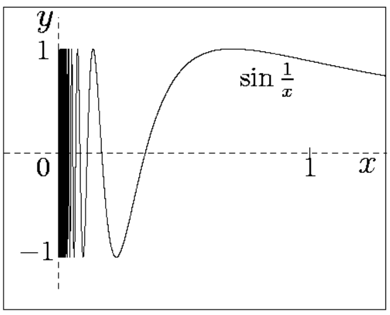
Tedy $b = 0$. Vybereme jinou posloupnost

$$\{x_n\} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\ .$$

Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Tedy $b = 1$. Došli jsme ke sporu, protože jestliže limita existuje, pak hodnota b musí být určena jednoznačně. Náčrtek funkce je na obrázku 6.3.1.



Obrázek 6.3.1: Graf funkce $\sin\frac{1}{x}$

Příklad 6.6 *Existuje* $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$?

Příklad 6.7 *Uvažujme funkci*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \; .$$

Najděte $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Řešení. Pro libovolné $x \neq 2$ máme $f(x) = x + 2$, a protože definice limity pro $x \to 2$ nezahrnuje hodnotu funkce f v bodě $x = 2$, dostáváme

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 2) = 4.$$

6.4 Pravostranná a levostranná limita funkce. Limita zprava a zleva

Definice 6.8 *Pravostranná limita definujeme takto:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a, x\in(a,+\infty)\cap D_f} f(x).$$

Číslo b je pravostrannou limitou, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \; \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Podobně definujeme levostrannou limitu:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a, x\in(-\infty,a)\cap D_f} f(x).$$

Číslo b je levostrannou limitou, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \; \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Příklad 6.9 *Najděte jednostranné limity pro $x \to 1$, jestliže*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Řešení. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0, \; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2.$
Mezi jednostrannými limitami funkce v bodě a limitou funkce v bodě platí následující vztah, který uvedeme bez dokazování.

Věta 6.10

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \;\; (a \neq \infty)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

6.5 Nevlastní limita funkce

Definice 6.11 *Funkce f má v bodě $x = a$ nevlastní limitu (tj. limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$), jestliže*

$$\forall M > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a\ : f(x) > M\ \ (\text{nebo}\ \ f(x) < -M).$$

Píšeme:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

6.6 Další případy limit

Následující limity mohou být definovány analogicky k předchozím definicím vlastních a nevlastních limit (viz podkapitoly 6.3 a 6.5). Pokuste se o jejich rozepsání pomocí nerovností samostatně.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b.$$

6.7 Některé věty o limitách

O limitách funkcí platí řada zajímavých pravidel a poznatků. Nyní uvedeme některé z nich. Tento přehled není úplným přehledem, pouze slouží k dalšímu ilustrování toho, jak s limitami pracovat. Poznantky uvádíme bez důkazů. Pokuste se promyslet a podrobně pochopit znění níže uvedených vět. Pokud budede tápat využijte uvedených příkladů. Zkuste také promyslet jak by se asi tyto věty daly dokázat.

Věta 6.12 *Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = c$, pak*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = b \pm c,\\
&\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = b \cdot c,\\
&\lim_{x\to a} \tfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \tfrac{b}{c}\ ,
\end{aligned}$$

pokud hodnota $c \neq 0$ a na některém okolí $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\})$ platí $f_2(x) \neq 0$.

Věta 6.13 *Jestliže* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ *a* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$ *a jestliže existuje okolí* $U(a)$ *takové, že v něm*

$$f_1(x) < f_2(x) \qquad (nebo\ \ f_1(x) \leq f_2(x)),$$

pro $x \in U(a), x \neq a$*, pak* $b_1 \leq b_2$*.*

Příklad 6.14 *Jestliže* $f_1(x) = 1 + x^2$*,* $f_2(x) = 1 + |x|$ *a* $x \in U(0, \frac{1}{2})$ *pak* $f_1(x) < f_2(x)$ *a* $b_1 \leq b_2$*, tj.*

$$b_1 = \lim_{x\to 0} f_1(x) = 1 = \lim_{x\to 0} f_2(x) = b_2.$$

Věta 6.15 *Jestliže*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1,\ \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2$$

a $b_1 < b_2$ *pak existuje množina bodů* $U(a, \delta) \setminus \{a\}$ *takové, že*

$$f_1(x) < f_2(x)$$

pro všechna $x \in U(a, \delta) \setminus \{a\}$*.*

Příklad 6.16 *Položme* $f_1(x) = x^2$*,* $f_2(x) = 1 + x^2$ *a* $a = 0$*. Potom máme* $b_1 = 0 < b_2 = 1$ *a platí* $x^2 < 1 + x^2$ *pro všechny hodnyty* $x \in U(0, 1) \setminus \{0\}$*.*

Věta 6.17 *Předpokládejme, že*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b.$$

Jestliže navíc platí

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$$

pro $x \in U(a) \setminus \{a\}$*, potom*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = b.$$

6.8 Limita složené funkce

Složenou funkci (nebo také *funkci jiné funkce*) definujeme takto: Je-li $y = f(z)$ a dále $z = \varphi(x)$, potom funkci

$$y = f[\varphi(x)]$$

nazýváme složenou funkcí. V tomto vysvětlení předpokládáme, že výsledná funkce je definována na množině, která je podmnožinou oboru hodnot funkce $\varphi(x)$. Funkci f nazýváme vnější funkcí, funkci φ nazýváme vnitřní funkcí.
Zajisté pro vás nebude problém samostatně ověřit výsledek následujícího příkladu.

Příklad 6.18 *Jsou dány funkce*

$$f(x) = 1 + \cos x, \quad \varphi(x) = (x - 1)^2.$$

Určete funkce $f[\varphi(x)]$*,* $\varphi[f(x)]$*.*

Řešení. Přímým dosažením dostáváme

$$f[\varphi(x)] = 1 + \cos(x-1)^2, \quad \varphi[f(x)] = \cos^2 x.$$

Na závěr uvedeme jednu komplikovanější větu o limitách. Přijedete na to, proč je podmínka (6.8.1) pro její platnost nevyhnutná. Pokud ne, nechte se motivovat dále uvedenými příklady 6.20, 6.21. Příklad 6.21 je kostruován tak průkazně, že po jeho prostudování smysl podmínky (6.8.1) snadno pochopíte.

Věta 6.19 *Jestliže* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = c$ *a* $\exists U(a,\epsilon)$ *takové, že*

$$f(x) \neq b \ \text{ pro } \ x \in U(a,\varepsilon), x \neq a, \tag{6.8.1}$$

pak

$$\lim_{x\to a} \varphi[f(x)] = c.$$

Příklad 6.20 *Platí Věta 6.19 v případě, že* $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, *a* $a = 2$*?*

Řešení. V zadaném příkladu dopočítáme $b = 4$ a $c = \dfrac{1}{4}$. Všechny podmínky Věty 6.19 platí a

$$\lim_{x\to 2} \varphi[f(x)] = \frac{1}{4} \ ,$$

protože

$$\left(= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{4} \, .$$

Ukažme nyní jak důležitou podmínka (6.8.1) je.

Příklad 6.21 *Zjistěte, zdali platí Věta 6.19 v případě, že*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

a

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Položte $a = 0$.

Řešení. Snadno nalezneme, že

$$\lim_{x\to 0} f(x) = b = 2$$

a

$$\lim_{x\to 2} \varphi(x) = c = 1.$$

Složená funkce má tvar

$$\varphi[f(x)] = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Odtud již snadno vidíme, že $\lim\limits_{x\to 0} \varphi[f(x)] = 0 \neq 1$. Podmínka (6.8.1) není v tomto případě splněna.

6.9 Některé známé limity

Nyní uvedeme několik limit, které se často při výpočtech vyskytují. Mnohé z nich již znáte ze střední školy. Jakmile se seznámite s L'Hospitalovým pravidlem (viz 7.13), nebude pro vás problém je snadno vypočítat.

(i)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \doteq 2,71828,$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

(iii)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c, \quad c\in\mathbb{R},$$

(iv)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

(v)
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a\in\mathbb{R}^+,$$

(vi)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

(Tato limita je jen modifikací předchozí limity. Skutečně, substituce $a^x - 1 = z$ vede k požadovanému výsledku.)

(vii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

6.10 Spojitost funkce

Přistupme k dalšímu důležitému pojmu, týkajícího se funkcí. Je jím pojem spojitosti funkce. Co to je funkce spojitá v bodě nebo na některém intervalu záhy osvětlíme. Předtím jen připomeňme, že v jednoduché (a matematicky nekorektní podobě) je spojitost funkce na intervalu tvaru (a,b) často interpretována jako možnost nakreslit tužkou na papíru odpovídající graf jedním tahem bez nutnost oddalovat tužku od papíru. I když je tato „definice“ matematicky nekorektní, do jisté míry vystihuje podstatu spojitosti.

Definice 6.22 *Funkce f se nazývá spojitá v bodě a, jestliže je definována v okolí $U(a, \varepsilon)$ a*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Pomocí matematických symbolů můžeme psát definici takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definice 6.23 *Funkce f se nazývá zprava (zleva) spojitá v bodě a, jestliže*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \left(\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \right).$$

Poznámka 6.24 *Zkráceně zapisujeme:*

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Zkrácený zápis $x \to a^+$ je ekvivalentní zápisu $x \to a$, $x > a$ a zkrácený zápis $x \to a^-$ je ekvivalentní zápisu $x \to a$, $x < a$.

Zaveďme pojem přírůstku funkce.

Definice 6.25 *Rozdíl*

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta) - f(x)$$

se nazývá ***přírůstek funkce*** *f v bodě x příslušný přírůstku Δ nezávisle proměnné x.*

Zkráceně zapisujeme přírůstek funkce $y = f(x)$takto:

$$\Delta f = \Delta f(x).$$

Definice 6.25 platí pro livobolný bod. Zajímá-li nás přírůstek funkce $y = f(x)$ v bodě $x = x_0$, pak

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta) - f(x_0).$$

Zaveďme pojem přírůstku nezávislé proměnné Δx. Z definice 6.25 vidíme, že položíme-li $f(x) \equiv x$, máme

$$\Delta x = x + \Delta - x.$$

Přírůstek Δx nezávislé proměnné x je tedy roven Δ. Symboly Δx a Δ jsou tedy ekvivalentní. Prodiskutujme nyní jednu skutečnost, které není tak jednoduchá, jak se na první pohled zdá a souvisí s právě odvozeným vztahem. Vysvětleme jednu vlastnost přírůstku, kterou je jeho nezávislost na proměnné x. Tato vlastnost připomíná zásadní vlastnost, která platí pro volné vektory. Volný vektor může být přiložen k libovolnému bodu v prostoru. Tak se chová i přírůstek (i když zde nejde o vektor, ale o skalár): přírůstek je samostatná nezávislá veličina. To znamená, že nezávisí na nezávislé proměnné x, ani na jiné veličině. Jde o skalár, který je přiložen ke konkrétnímu bodu. Tím může být bod x nebo bod x_0 nebo libovolný jiný konkrétní bod. Symbol Δx užíváme zejména v těch situacích, kdy chceme zdůraznit, že přírůstek je přiložen k číslu x. Zcela na místě je tedy následující závěrečné konstatování:

Poznámka 6.26 *Přírůstek Δx nezávisle proměnné x nezávisí na x. Nechť například $x = x_0 = 1$, $x = x_1 = 10$, $x = a = -9$, $\Delta x = 0,1$. Pak $x_0 + \Delta x = 1,1$; $x_1 + \Delta x = 10,1$; $a+\Delta x = -8,9$. Uvedená vlastnost přírůstku je využita v případě výpočtu diferenciálů - viz* *7.3, str. 122.*

Poznámka 6.27 *Definice funkce spojité v bodě a můžeme přepsat následujícím způsobem:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0.$$

Definice 6.28 *Funkce f se nazývá spojitá na otevřeném intervalu (a, b), jestliže je spojitá v každém jeho bodě $c \in (a, b)$.*

Definice 6.29 *Funkce f se nazývá spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, jestliže je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a navíc je v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva.*

Úkol. Napište analogicky definici spojitosti funkce na intervalech $(a, b]$ a $[a, b)$.

Úkol. Je funkce

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

spojitá (nespojitá) zprava (zleva) v bodě $x = 0$?

Skutečnost, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ zapisujeme takto: $f \in C[a, b]$ nebo $f \in C$ na $[a, b]$ Podobně zapisujeme spojitost na jiných typech intervalu. Píšeme například $f \in C(a, b)$ nebo $f \in C$ na (a, b) pro funkci, spojitou na intervalu (a, b).

6.11 Některé vlastnosti spojitých funkcí

Věta 6.30 *Jsou-li funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ spojité v bodě a, pak jejich součet (nebo rozdíl) $f(x) \pm \varphi(x)$, součin $f(x) \cdot \varphi(x)$ a podíl $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (v případě, že $\varphi(a) \neq 0$) jsou také spojité v bodě a.*

Věta 6.31 *Je-li funkce $\varphi(x)$ spojitá v bodě a a funkce $f(y)$ v bodě $b = \varphi(a)$, pak složené funkce $F(x) \equiv f[\varphi(x)]$ je spojitá v bodě a.*

Věta 6.32 *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, pak existuje okolí $U(a)$, v němž je $f(x)$ omezená.*

Příklad 6.33 *Konstatní funkce $f(x) = C$ je definována a je spojitá pro libovolnou hodnotu x, protože její přírůstek odpovídající libovolnému přírůstku Δx argumentu je $\Delta C = C - C = 0$, a tedy podmínka $\Delta C \to 0$ (pro $\Delta x \to 0$) je automaticky splněna.*

Příklad 6.34 *Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je definována pro všechny body reálné osy a je v nich spojitá. Skutečně, funkce $y = x$ je spojitá pro libovolné x, neboť*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [(x + \Delta x) - x] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Tedy funkce $x^2 = x \cdot x, x^3 = x^2 \cdot x, \ldots, x^n = x^{n-1} \cdot x$ jsou také spojité.

Příklad 6.35 *Polynom*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$) je spojitá funkce pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Racionální lomená funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$, $b_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, m$) je spojitá pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$.

6.12 Odstranitelná nespojitost

Definice 6.36 *Je-li f nespojitá v bodě $x = a$ a pokud současně existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, říkáme, že tento bod je bodem odstranitelné nespojitosti funkce.*

Tento pojem má význam, neboť v tomto případě může být funkce f redefinována v bodě a (za předpokladu, že je definována v a) a nebo dodefinována v bodě a (jestliže původně nebyla v bodě a definována) tak, že položíme

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x),$$

takže (téměř definovaná!) funkce f je v tomto bodě spojitá.

Příklad 6.37 *Funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 1$. Tato nespojitost je odstranitelná, neboť položíme-li $f(1) = 2$, (nová) funkce f bude spojitá v $x = 1$.

Příklad 6.38 *Funkce $y = \sin \dfrac{1}{x}$ je omezená a má neodstranitelný bod nespojitosti $x = 0$.*

Příklad 6.39 *Funkce $y = (\operatorname{sign} x)^2$ kde*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

má bod odstranitelné nespojitosti $x = 0$.

6.13 Klasifikace nespojitostí

Definice 6.40 *Existují-li pro funkci f v (konečném) bodě a (konečná) čísla $f(a^-)$, $f(a^+)$ a má-li funkce v a přesto bod nespojitosti, říkáme, že tato funkce má bod nespojitosti prvního druhu v bodě a.*

Příklad 6.41 *Funkce*

$$f_1(x) = \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 1, \\ & \\ 1, & x \le 1, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2, & x \ge 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 1, & x^2 < 1, \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$

mají v bodě $x = 1$ bod nespojitosti prvního druhu.

Definice 6.42 *Číslo $\delta = \delta(a) = f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá skok nespojitosti. (Bod $x = a$ se pak nazývá bodem skokové nespojitosti.)*

Poznámka 6.43 *Je-li $x = a$ bodem odstranitelné nespojitosti, pak $\delta(a) = 0$.*

Definice 6.44 *Je-li funkce f definována v okolí bodu a (popřípadě s výjimkou bodu a samotného) a má-li v bodě a bod nespojitosti, který nepatří do třídy nespojitostí prvního druhu, říkáme, že funkce má v a bod nespojitosti druhého druhu.*

Příklad 6.45 *Funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu. Funkce $y = \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu.*

6.14 Funkce spojité na uzavřeném intervalu

V této části uvádíme několik vět o vlastnostech spojitých funkcí. Jsou snadno pochopitelné a intuitivně jasné.

Věta 6.46 *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je na něm omezená.*

Věta 6.47 (Weierstrassova) *Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak na tomto intervalu $[a, b]$ nabývá svého maxima i svého minima tzn., že existují body α a β patřící do $[a, b]$ takové, že*

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$$

pro všechna $x \in [a, b]$.

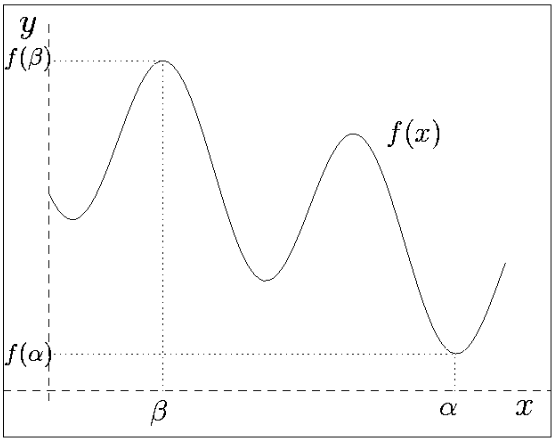
O maximálních a minimálních hodnotách funkce budeme pojednávat v části 7.12. Již dopředu můžeme říci, že v bodě $x = \beta$ nabývá funkce $y = f(x)$ svého (tzv. absolutního) maxima. Píšeme

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Podobně, v bodě $x = \alpha$ nabývá funkce $y = f(x)$ svého (tzv. absolutního) minima. Píšeme

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha).$$

Na náčrtku 6.14.2 je dána geometrická ilustrace Weierstrassovy věty.



Obrázek 6.14.2: Weierstrassova věta

Jistě budete schopni samostatně posoudit, proč z uvedené Weierstrassovy věty vyplývá tvrzení věty následující.

Věta 6.48 *Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$ a součin $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje na otevřeném intervalu (a, b) alespoň jeden bod c, pro nějž $f(c) = 0$.*

Důsledek 6.49 *Funkce $f \in C$ na $[a, b]$ nabývá na intervalu $[a, b]$ všech hodnot mezi hodnotami v koncových bodech.*

Důsledek 6.50 *Každá polynomiální rovnice $P_n(x) = 0$ lichého stupně n, $a_n \neq 0$, má nejméně jedno řešení.*

Příklad 6.51 *Rovnice $\cos x - x = 0$ má kořen ležící na intervalu $(0, \pi)$, protože $f(0) > 0, f(\pi) < 0$ kde $f(x) = \cos x - x$ a $f(x)$ je spojitá funkce.*

Weierstrassova věta platí i v případě funkcí více proměnných (viz část 14.17).

6.15 Poznámka o supremu a infimu funkce

Uzavřenost intervalu $[a, b]$ je důležitým předpokladem pro to, aby na něm spojitá funkce vždy měla maximum a minimum. To je obsahem Weierstrassovy věty 6.47. Jak však charakterizovat v jistém smyslu „největší“ a „nejmenší“ hodnoty spojitých funkcí na otevřených intervalech, pokud jsou tyto „největší“ a „nejmenší“ hodnoty „dosahovány“ na koncích intervalu, tedy v bodech, které nepatří do definičního oboru zadané funkce.

Uvažujme například funkci $y = f^{\clubsuit}(x)$, definovanou na intervalu $[0, 1]$ takto:

$$f^{\clubsuit}(x) = 2x.$$

Jde o funkci spojitou na uzavřeném intervalu a v souladu s Weierstrassovou větou 6.47 máme

$$\max_{x\in[0,1]} f^{\clubsuit}(x) = f^{\clubsuit}(1) = 2$$

a

$$\min_{x\in[0,1]} f^{\clubsuit}(x) = f^{\clubsuit}(0) = 0.$$

Pozměníme nyní definiční interval funkce. Místo uzavřeného intervalu $[0, 1]$ uvažujme otevřený interval $(0, 1)$. Definujme funkci $y = f^{\spadesuit}(x)$, definovanou na otevřeném intervalu $(0, 1)$ takto:

$$f^{\spadesuit}(x) = 2x.$$

Zdánlivě jde o funkci téměř identickou. Jenže nyní již Weierstrassova věta 6.47 neplatí. Odsud samozřejmě ještě nevyplývá, že bude neplatné i její tvrzení. Jenže hledání bodu $x = \beta \in (0, 1)$, takového, aby platilo

$$\max_{x\in(a,b)} f^{\spadesuit}(x) = f(\beta)$$

nebo bodu $x = \alpha \in (0, 1)$, takového, aby platilo

$$\min_{x\in(a,b)} f^{\spadesuit}(x) = f(\alpha)$$

nevede k úspěchu (zdůvodněte si na náčrtku této funkce proč je tomu tak), i když by se zdálo, že je

$$\max_{x\in(a,b)} f^{\spadesuit}(x) = f(1) = 2$$

a

$$\min_{x\in(a,b)} f^{\spadesuit}(x) = f(0) = 0.$$

Nedostatek této úvahy je v tom, že ani bod 1 ani bod 0 nepatří definičnímu oboru funkce $f^{\spadesuit}$, kterým je interval $(0, 1)$ a nikoliv interval $[0, 1]$.
V tomto případě říkáme, že hodnota 2 je *supremem* funkce $f^{\spadesuit}(x)$ na otevřeném intervalu $(0, 1)$ a píšeme

$$\sup_{x\in(0,1)} f^{\spadesuit}(x) = 2.$$

Jinými slovy můžeme říci, že funkce $f^{\spadesuit}(x)$ nedosahuje na otevřeném intervalu $(0,1)$ svého maxima, ale její maximální hodnoty se blíží k hodnotě 2. Podobně bychom vysvětlili pojem *infimum* funkce $f^{\spadesuit}(x)$ na otevřeném intervalu $(0,1)$. V tomto případě píšeme

$$\inf_{x\in(0,1)} f^{\spadesuit}(x) = 0.$$

Funkce $f^{\spadesuit}(x)$ nedosahuje na otevřeném intervalu $(0,1)$ svého minima, ale její minimální hodnoty se blíží k hodnotě 0.
Ještě jednou zdůrazněme, že požadavek spojitosti funkce na *uzavřeném* intervalu $[a,b]$ (zahrnujícím oba krajní body a a b), tak jak to požaduje Weierstrassova věta 6.47 je zásadní.
Uveďme jiný příklad. Není těžké zjistit (například z průběhu grafu funkce $\operatorname{arctg} x$ (viz obr. 2.11.22, str. 27), že

$$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Neexistuje však bod x na intervalu $(-\infty,\infty)$, který chápeme jako otevřený, v němž by funkce $\operatorname{arctg} x$ nabývala hodnoty $\frac{\pi}{2}$. Nedosahuje tedy svého maxima v žádném konečném bodě. Podmínky Weierstrassovy věty 6.47 jsou i v tomto případě porušeny. Podobně lze stanovit, že

$$\inf_{x\in(-\infty,\infty)} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

6.16 Tečna ke křivce

Uvažujme graf spojité funkce $y = f(x)$. Vezměme na tomto grafu bod A s souřadnicí x_0 a jiný bod C se souřadnicí $x_0 + \Delta x$, kde předpokládáme $\Delta x \neq 0$ (viz náčrtek 6.16.3). Předpokládejme dále, že sečna s procházející bodem A a bodem C svírá s kladnou poloosou x úhel β. Tangens úhlu β vyjádříme vzorcem

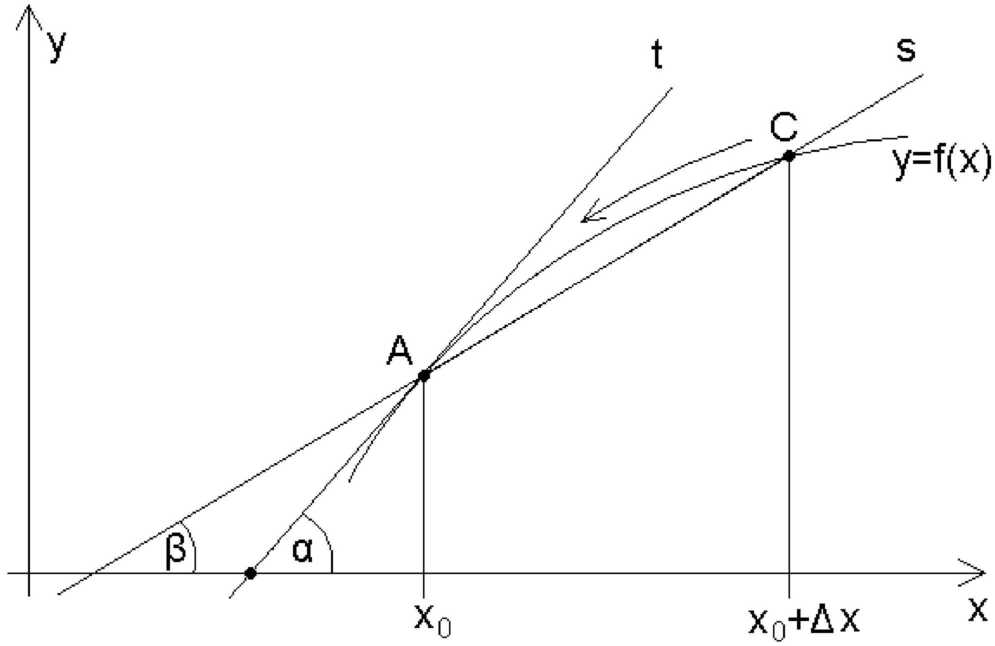
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

Nechť Δx se blíží nule; pak se pro spojitou funkci f hodnota Δy bude také blížit nule. Bod C se bude pohybovat podél grafu funkce a bude se přibližovat k bodu A. Jestliže se v tomto limitním procesu ukáže, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

pak se úhel β bude také blížit k jistému úhlu α. Spolu se změnou β se bude sečna S otáčet kolem bodu A a v limitě se bude přibližovat k přímce t procházející bodem A a svírající úhel α s kladnou poloosou x. To znamená, že T je tečnou ke grafu Γ v bodě A a

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = k.$$



Obrázek 6.16.3: Tečna ke křivce.

Tak jsme ukázali, že jestliže se poměr

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

blíží ke konečné limitě pro $\Delta x \to 0$, pak má graf v bodě A tečnu, jejíž směrnice je rovna této limitě.

Rovnici tečny lze zapsat takto:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{6.16.2}$$

kde

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\ .$$

6.17 Derivace

Definice 6.52 *Derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je definována jako limita*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.17.3}$$

za předpokladu, že existuje a je konečná.

Často jsou užívány i jiné zápisy derivace (6.17.3). Například

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

nebo

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Položíme-li $x = x_0 + \Delta x$ Poslední limita (6.17.3) může být přepsána takto:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Příklad 6.53 *Ukážeme, že pro $n \in \mathbb{N}$ máme $(x^n)' = nx^{n-1}$. Opravdu, užitím binomické Newtonovy věty dostáváme*

$$\begin{aligned}(x^n)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \\ = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\Bigg[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots +& \\ + \binom{n}{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n\Bigg] &= \\ = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] &= \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Následující věta nemá přímý aplikační důsledek. Je však dobré se nad ní zamyslet z následujího důvodu. Ještě než si přečtete její znění zkuste si odpovědět na otázku zda funkce, která je spojitá, má také derivaci. Určitě naleznete řadu příkladů funkcí, kdy toto v některém bodě nebude platit. Například funkce $y = |x|$ je spojitá na celém intervalu $(-\infty, \infty)$, ale derivaci v bodě $x = 0$ nemá. Víte proč? V minulosti byly tyto otázky jakousi výzvou pro mnoho matematiků. Jejich trpělivé úsilí došlo tak daleko, že sestrojili funkce, které jsou spojité všude, v žádném bodě však nemají derivaci. Tyto funkce nejsou konstruovány jednoduchým způsobem. Často se jedná o zadání funkce ve tvaru nekonečné řady. Nebudeme zde žádný takovýto příklad uvádět, protože nám doposud chybí průprava o řadách, kterou dáme v části 8, str. 148. Opačné tvrzení však platí vždy, tj. funkce které má v některém bodě derivaci je v tomto bodě i spojitá. Ukážeme důkaz, který je vlastně jen opakováním definice spojité funkce a definice funkce, která má derivaci.

Věta 6.54 *Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci f', je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Předpokládejme, v souladu s předpokladem věty, že derivace $f'(x_0)$ existuje. Připomeňme si také definici spojitosti (viz Definice 6.22, str. 105) či její modifikace (Definice 6.27, str. 106), jejíž užití pro nás bude výhodnější. Máme vlastně dokázat tuto vlastnost:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Na základě definice derivace platí

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Podle pravidel pro výpočet limit (limita obou níže uvedených výrazů existuje a je konečná) platí

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0).$$

Protože

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,$$

platí

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0.$$

Tím je uvedené tvrzení dokázáno. Ná záver ještě připomeňme, že na základě výkladu v odstavci 6.16 je geometrickým významem derivace v bodě x_0 směrnice tečny procházející bodem $A=(x_0, f(x_0))$.

6.18 Fyzikální význam derivace

Derivace má mnoho různých významů v mnoha odborných disciplínách. Ve fyzive vyjadřuje např. okamžitou rychlost bodu.

Nechť se bod pohybuje po přímce a nechť funkce $s=f(t)$ vyjadřuje závislost jeho vzdálenosti s od počátečního bodu O (bráno s odpovídajícím znaménkem) v čase t. V okamžiku t je bod ve vzdálenosti $s=f(t)$ od O. V jiném časovém okamžiku $t+\Delta t$ je ve vzdálenosti $s+\Delta s\ = f(t+\Delta t)$ od O. Jeho průměrná rychlost během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ je vyjádřena jako

$$v_{pr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\ .$$

Okamžitá (skutečná) rychlost v bodu v okamžiku t může přirozeně být definována jako limita, k níž se v_{pr} blíží, když $\Delta t\to 0$, tj.

$$v(t) = v_{ok}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

6.19 Derivace základních elementárních funkcí

Uveďme tabulku derivací některých funkcí.

$$(C)' = 0,\ \ C \in \mathbb{R}, \tag{6.19.4}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1},\ \ a \in \mathbb{R}, \tag{6.19.5}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a,\ \ a > 0, \tag{6.19.6}$$
$$(e^x)' = e^x\,, \tag{6.19.7}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ \ , x > 0, a > 0, \tag{6.19.8}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\ \ , x > 0, \tag{6.19.9}$$
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}\ \ , x \neq 0, \tag{6.19.10}$$
$$(|x|)' = \mathrm{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \tag{6.19.11}$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{6.19.12}$$
$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{6.19.13}$$
$$(\mathrm{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \tag{6.19.14}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x| < 1, \tag{6.19.15}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x| < 1, \tag{6.19.16}$$
$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \tag{6.19.17}$$
$$(\mathrm{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \tag{6.19.18}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{6.19.19}$$
$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{6.19.20}$$
$$(\mathrm{tgh} x)' = \frac{1}{(\mathrm{cosh} x)^2}, \tag{6.19.21}$$
$$(\mathrm{cotgh} x)' = \frac{-1}{(\mathrm{sinh} x)^2}. \tag{6.19.22}$$

6.20 Derivace zprava a zleva:

Často je nutné užít tzv. derivace zprava a zleva. Tyto definice jsou podobné definici (6.17.3). Definujeme derivaci zprava jako limitu

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ ,$$

a derivaci zleva jako limitu

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

6.21 Základní pravidla pro derivování:

Uvedeme bez důkazu některá základní pravidla pro derivování (předpokládejme, že uvedené derivace existují):

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \tag{6.21.23}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \tag{6.21.24}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g^2(x)} \left(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\right), \tag{6.21.25}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x)[f(x)]^{g(x)-1} f'(x) + [f(x)]^{g(x)} (\ln f(x)) g'(x). \tag{6.21.26}$$

6.22 Derivace složené funkce:

Bez důkazu uvedeme formální pravidlo pro derivaci složené funkce (předpokládáme, že příslušné výrazy jsou definovány a že derivace existují). Je-li

$$y = f[\varphi(x)] ,$$

pak

$$y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

6.23 Diferenciál funkce

Definice 6.55 *Funkce f se nazývá diferencovatelná v bodě x_0, jestliže její přírůstek $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit jako*

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{6.23.27}$$

kde $A = f'(x_0) =$const, $\Delta x = x - x_0$ a α je nějaká funkce s vlastností $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Příklad 6.56 *Funkce $y = x^2$ je diferencovatelná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, protože můžeme položit*

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

a $A = 2x, \alpha(\Delta x) = \Delta x$.

Definice 6.57 *Hlavní – lineární – část přírůstku (6.23.27) tj. výraz $A\Delta x$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě x vzhledem k danému přírůstku Δx a značí se*

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Poznámka 6.58 *Protože pro funkci $y = x$ je $dy = y'\Delta x$, tj. $dx = \Delta x$, zapisujeme často předchozí vztah takto:*

$$dy = f'(x)dx.$$

Ze vztahu (6.23.27) lze odvodit, že platí přibližný vztah $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, jestliže $\Delta x \to 0$ a $f'(x_0) \neq 0$.
Objasněme geometrický význam diferenciálu. Rovnici tečny (6.16.2) lze zapsat jako

$$y - y_0 = \mathrm{tg}\alpha \cdot (x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Položme $x = x_0 + \Delta x$. Pak $y = y_0 + f'(x_0)\Delta x = y_0 + dy(x_0)$. Rovnice tečny má tvar

$$y = y_0 + dy(x_0).$$

Příklad 6.59 *Máme odhadnout množství materiálu potřebného k výrobě krabice ve tvaru krychle, jestliže víme, že její vnitřní hrany jsou 10 cm dlouhé a že tloušťka stěn je 0, 1 cm.*

Řešení. Objem krychle s hranou a je vyjádřen funkcí $V(a) = a^3$. Objem materiálu potřebného na stěny krychle je přibližně vyjádřen přírůstkem této funkce. Protože dle předchozího textu je $\Delta V \approx V'(10) \cdot \Delta a$, kde položíme $\Delta a = 0.1$cm, máme

$$\Delta V(10) = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 = 300 \cdot 0,1 = 30\mathrm{cm}^3.$$

Potřebné množství materiálu je přibližně cm^3.

6.24 Derivace inverzní funkce

Předpokládejme, že inverzní funkcí k funkci

$$y = f(x),$$

je funkce

$$x = g(y),$$

t.j., že platí

$$f[g(y)] \equiv y$$

(na nějakém intervalu I). Derivováním posledního vztahu (za pžedpokladu, že existují příslušné derivace) dostáváme

$$f'[g(y)] \cdot g'(y) = 1$$

a odtud

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad . \tag{6.24.28}$$

Příklad 6.60 *Je-li $y = x + \ln x$, čemu je rovna derivace $x'(y)$?*

Řešení. Vycházíme z předpokladu, že derivace $x'(y)$ existuje. Potom vzorec (6.24.28) dává:

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x(y)}{1 + x(y)} \quad .$$

6.25 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili se základními pojmy matematické analýzy, s pojmy limita a derivace, které spolu uzce souvisí. Na jejich základě byly definovány další pojmy, jako je např. spojitost funkce. Limita a hlavně derivace se velmi často vyskytují, jednak v dalších kapitolách a navazujícívch matematických předmětech, jednak v nejrůznějších aplikacích, jako je třeba fyzika (okamžitou rychlost hmotného bodu určíme jako derivaci dráhy podle času) a nebo další technických předmětech.

Zvládnutí limit a derivaci po teoretické stránce a hlavně po praktické, t.j. početní, stránce, je nezbytným základem pro další studium.

Můžeme využít vhodné počítačové vybavení, ale je třeba dávat pozor na podmínky, které nám zaručují správný chod programu. Musíme mít na zřeteli, že počítač sám není schopen řešit některé úkoly a může se dopouštět chyb. Například u funkce $\ln(-x^2)$, která není definovaná pro žádné reálné x, určí matematický software (například Maple, Matlab, Mathematica) její derivaci. Proto využívání těchto programů předpokládá dobré teoretické znalosti, abychom věděli, co vlastně jednotlivými příkazy program vypočítá a jakou úlohu můžeme zadat, tj. co je počítač vlastně schopen vyřešit.

6.26 Kontrolní příklady ke kapitole 6

1. Určete, zda existují následující limity. V případě kladné odpovědi limitu vyčíslete.

   (a) $\lim_{x\to -1}(4-2x)$

   (b) $\lim_{x\to -2}(2x-|x|)$

   (c) $\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-4}$

   (d) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$

   (e) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

   (f) $\lim_{x\to \pi/2}\operatorname{tg} x$

   (g) $\lim_{x\to 1} f(x)$, je-li
   $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x=1\\ x^2+4 & \text{jinak}\end{cases}$$

   (h) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$

   (i) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x-3}$

   (j) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

   (k) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg} x}$

   (l) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-1}$

   (m) $\lim_{x\to 4^+}\frac{|x-4|}{x-4}$

   (n) $\lim_{x\to \infty}\frac{4-x}{3x-1}$

(o) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-1}$

2. Rozhodněte, zda je daná funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Pokud není funkce v tomto bodě spojitá, určete druh nespojitosti (nespojitost 1. nebo 2. druhu).

   (a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x_0 = 2$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 1 \\ \frac{x-1}{x^2-1} & \text{jinak} \end{cases}, x_0 = 1$

   (c) $f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \pi/2$

3. Určete intervaly, na nichž jsou dané funkce spojité a určete druhy nespojitosti.

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

   (b) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{pro } x < 0 \\ x + 4 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$

4. Vypočtěte hodnotu derivace v bodě x_0, pokud existuje.

   (a) $y = 3x,\ x_0 = 2$

   (b) $y = -\frac{2}{x},\ x_0 = 3$

   (c) $y = \frac{1}{x+1},\ x_0 = 2$

   (d) $y = \sin x,\ x_0 = 0$

5. Najděte rovnici tečny v bodě T, pokud existuje.

   (a) $y = x^2,\ T = [2; 4]$

   (b) $y = \sqrt{x+1},\ T = [3; 2]$

   (c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}},\ T = [1; 1]$

6. Najděte rovnici normály ke křivce v bodě T.

   (a) $y = \sin x,\ T = [0; 0]$

   (b) $y = 1 + (x - 2)^{1/3},\ T = [3; 2]$

7. Pro každou funkci $f(x)$ najděte její derivaci a určete, pro jaké hodnoty x je funkce diferencovatelná.

   (a) $f(x) = 4x + 3$

   (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

8. Pomocí diferenciálu odhadněte následující výrazy. Srovnejte s výsledky získanými pomocí kalkulačky.

(a) $(1,01)^5$

(b) $(1,001)^{10}$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.6.

Kapitola 7

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné (část 2)

7.1 Cíl kapitoly

V předchozí části jsme se seznámili s pojmem derivace funkce, která je určena jako limita podílu přírůstku funkce a přírůstku argumentu. V této části vyložíme, co nazýváme derivací druhého řádu, třetího řádu a obecně co nazýváme derivací n-tého řádu. Souhrnně hovoříme o derivacích vyšších řádů. Podobně budou zavedeny také diferenciály vyšších řádů. Uvedeme také vzorce pro numerické derivování a ukážeme také, jak lze nalézat derivace k inverzním funkcím.

Dále ukážeme, jak lze derivací využít k výpočtu limit tzv. neurčitých výrazů. To jsou případy, kdy přímý výpočet limity vede k výrazu typu „nula děleno nulou“ a nebo „nekonečno děleno nekonečnem“. Uvidíme, jak znamenitou pomůckou je v těchto případech tzv. „l'Hospitalovo pravidlo“.

Dále budeme demonstrovat, jak lze pojem limity a pojem derivace využít při nalézání extrémů funkcí a při studiu jejich průběhu a při konstrukci jejich grafů. Postup konstrukce grafu využívá některých typických vlastností křivek, které zjišťujeme právě metodami vyšší matematiky. Uvedeme postupy, jak určit intervaly, kde je funkce rostoucí a kde je klesající, v jakých bodech má lokální minimum a lokální maximum, jak se dají stanovit asymptoty grafu funkce. V souhrnu spolu nám tyto informace určují průběh funkce a pomohou nám sestrojit kvalitní graf funkce.

Závěr kapitoly je věnován ukázkám problematiky numerického hledání kořenů rovnic a nástinu vypočtu limit a derivací v případě vektorových funkcí a komplexních funkcí jedné reálné proměnné.

7.2 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Derivaci 2. řádu definujeme jako derivaci prvního řádu

$$f''(x) = [f'(x)]',$$

za předpokladu, že existuje.
Analogicky definujeme derivaci n-tého řádu ($n = 2, 3, \dots$):

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Má-li funkce $y = f(x)$ na některém intervalu I spojitou derivaci n-tého řádu, potom má i derivace nižších řádu a píšeme

$$f \in C^{(n)}(I).$$

Příklad 7.1 *Najděme derivace vyšších řádů funkce $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Řešení. Podle základních vzorců nalézáme $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ atd. až $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je

$$y^{(\alpha)} = \alpha(\alpha-1)\dots 1x^0 = \alpha!$$

a pro další derivace platí

$$y^{(\alpha+1)} = y^{(\alpha+2)} = \dots = 0.$$

Příklad 7.2 *Najděme derivace vyšších řádů funkce $y = 2^x$.*

Řešení. Postupně dostáváme $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x(\ln 2)^2$ až, nakonec $y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$, $n = 1, 2 \dots$.
Pro hledání vyšších derivací součinu dvou funkcí lze často využít tzv. **Leibnizův vzorec**: Je-li $f(x) = u(x)v(x)$, pak pro derivaci n-tého řádu funkce f ($n = 1, 2, \dots$) platí

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}u^{(l)}v^{(n-l)}.$$

Diferenciály vyšších řádů: Diferenciály vyšších řádů definujeme podobným způsobem jako derivace vyšších řádů. Je-li $y = f(x)$ a $dy = f'(x)dx$, potom

$$d^2y = d(dy), \dots, d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Příklad 7.3 *Nechť $y = f(x)$. Vypočtěte d^2y.*

Řešení.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' = f''(x)(dx)^2 + f'(x)(dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

V tomto výpočtu je $(dx)' = (\Delta x)' = 0$. Hodnotu Δx považujeme za konstantní veličinu nezávislou na proměnné x - viz komentář k Definici 6.25 na str. 105

V obecném případě pokládáme

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

7.3 Numerické derivování

Nejjednodušší vzorce pro numerické derivování

Předpokládejme, že v nějakém bodě x má funkce f derivaci

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Potom v některém malém okolí bodu x platí přibližný vztah

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Vyvstává otázka: jaká je chyba (tj. jaký je rozdíl mezi členy na pravé a na levé straně) této přibližné rovnosti? Abychom získali kvantitativní odhady této chyby, sám fakt, že existuje $f'(x)$, je nedostatečný. Proto obvykle při analýze chyb přibližných metod numerické derivace požadujeme, aby měla daná funkce derivaci řádu vyššího než počítaná derivace. Nechť $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kde $h > 0$ je krok. Položme $f_i = f(x_i)$, $f_i' = f'(x_i)$, atd. Předpokládejme, že $f \in C^2([x_0, x_1], \mathbb{R})$. Potom lze dokázat, že existuje bod ξ takový, že

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1. \tag{7.3.1}$$

Je-li $f \in C^3([x_{-1}, x_1], \mathbb{R})$, pak lze dokázat, že existuje bod ξ^* takový, že

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(\xi^*), \quad x_{-1} < \xi^* < x_1. \tag{7.3.2}$$

Pokud $f \in C^{(4)}[x_{-1}, x_1]$, pak lze dokázat, že existuje bod ξ^{**} takový, že

$$f_0'' = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^4}{12} \cdot f^{(4)}(\xi^{**}), \quad x_{-1} < \xi^{**} < x_1. \tag{7.3.3}$$

Přesné hodnoty ξ, ξ^* nebo ξ^{**} určit nejdou, v každém jednotlivém případě zavisí na kokrétním typu numericky derivované funkce.

Vztahy (7.3.1) - (7.3.3) se nazývají *vzorce pro numerické derivování se zbytkem* a vztahy

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \quad f_0'' \approx \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

jednoduše *vzorce pro numerické derivování.* Chyby těchto vzorců jsou

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)|,$$

(chyba je prvního řádu vzhledem k h (nebo je řádu h));

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|,$$

(říkáme, že chyba zde a v následujícím vztahu je druhého řádu vzhledem k h (neboli je řádu h^2)),

$$\left| f_0'' - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f^{(4)}(x)|.$$

7.4 Derivování s programem Maple

Derivování pomocí programu Maple se provádí pomocí příkazu

"diff".

Prvním argumentem tohoto příkazu je výraz, který má být zderivován, druhým argumentem je proměnná, vzhledem k níž budeme derivovat.

Příklad 7.4 *Najděte derivaci funkce*

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x.$$

pomocí Maple.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v Maple:

```
diff(sin(x)*tan(x),x);
```

Výsledek vypsaný programem Maple je tvaru:

$$\cos(x)\tan(x)\sin(x)(1 + tan(x)^2)$$

Příklad 7.5 *Najděte derivaci funkce*

$$x^{x^x}.$$

pomocí programu Maple.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v Maple:

```
diff(x^(x^x),x);
```

Výsledek vypsaný programem Maple je tvaru:

$$x^{(x^x)}\left(x^x\left(\ln(x)+1\right)+\frac{x^x}{x}\right)$$

7.5 Inverzní trigonometrické funkce a jejich derivace

- funkce $y = \arcsin x$ (arkus sinus) je inverzní k funkci $y = \sin x$; platí:

  $$\arcsin(\sin x) \equiv x, \sin(\arcsin x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1].$$

  Odvodíme vzorec pro derivaci funkce $y = \arcsin x$:

  $$y = \arcsin x \Longrightarrow x = \sin y;$$

  podle vzorce (6.24.28) dostáváme

  $$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ,$$

  a nakonec

  $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- funkce $y = \arccos x$ (arkus kosinus) je inverzní k funkci $y = \cos x$; platí

$$\arccos(\cos x) \equiv x, \cos(\arccos x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1].$$

Podobně jako výše můžeme odvodit derivaci

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \operatorname{arctg} x$ (arkus tangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$;
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \ ,$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

- $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$;
$\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) \equiv x, \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

7.6 Derivace hyperbolických funkcí

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$

7.7 Derivace inverzních hyperbolických funkcí

- $y = (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $y = (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$,
- $y = (\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$,
- $y = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$

Dokažme první vzorec: $y = \operatorname{argsinh} x \Longrightarrow x = \sinh y$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

7.8 Klasifikace funkcí

1. **Základní elementární funkce**

   Definice 7.6 *Třída základních elementárních funkcí zahrnuje následující funkce:*

   (a) mocninná funkce $y = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}$;

   (b) exponenciální funkce $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$; *logaritmická funkce* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a > 1$;

   (c) trigonometrické funkce $(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)$ *a inverzní trigonometrické funkce* $(\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x)$.

2. **Elementární funkce**

   Definice 7.7 *Funkce, které vzniknou ze základních elementárních funkcí a konstant pomocí konečného počtu aritmetických operací a skládání funkcí se nazývají elementární funkce.*

   Např.
   $$y = \arcsin \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-e^x}}$$
   je elementární funkce.

3. **Algebraické funkce**

   Definice 7.8 *Algebraická funkce je funkce* $y = y(x)$ *daná algebraickou rovnicí*
   $$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$
   kde $P_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *jsou polynomy.*

   Speciální případy:
   $$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
   (pro $P_1(x) \equiv -1, P_j(x) \equiv 0, j > 1$) nebo
   $$y = \frac{-P_0(x)}{P_1(x)}$$
   (pro $P_j(x) \equiv 0, j > 1$).

4. **Transcendentní funkce**

   Definice 7.9 *Každá funkce, která nepatří do třídy algebraických funkcí, se nazývá transcendentní.*

7.9 Některé věty o diferencovatelných funkcích

Podobně, jako jsme v části 6.14 na straně 108 věnovali pozornost některým typickým vlastnostem spojitých funkcí, uvedeme nyní několik vlastností funkcí, které mají derivaci. Názvy vět historicky souvisí s těmi matematiky, kteří dané vlastnosti poprvé prozkoumali. Všechny věty mají zřetelnou a výraznou geometrickou interpretaci. Pokuste se proto sami příslušné vztahy znázornit geometricky. Níže kvůli jednoduchosti předpokládáme, že $a < b$. Není to ale striktní požadavek, může platit i opačná nerovnost.

Věta 7.10 (Fermatova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) v bodě ξ *nabývá* $f(x)$ *své nejvyšší (nebo nejnižší) hodnoty*
c) $\exists\, f'(\xi)$
pak $f'(\xi) = 0$.

Věta 7.11 (Rolleova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) $f(x) \in C^1$ *na* (a, b),
c) $f(a) = f(b)$
pak $\exists \xi \in (a, b)$ *takové, že* $f'(\xi) = 0$.

Pokud se váme nepovedlo rozluštit geometrický význam této věty, podívejte se na přiložený náčrtek 7.9.1. Uvedené věty nebudeme dokazovat. Uvedeme ještě poslední větu, která je důsledkem předchozí Rolleovy věty, ale je častěji používaná při přibližných výpočtech.

Věta 7.12 (Lagrangeova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) $f(x) \in C^1$ *na* (a, b)
pak $\exists \xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

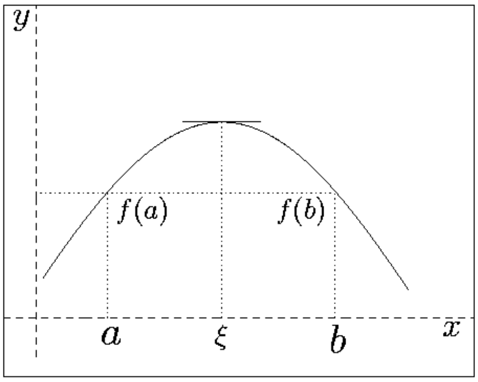
Vysvětlení geometrického významu Lagrangeovy věty je o něco složitější než v předchozí větě. Náčrtek 7.9.2 vám ve správné orientaci pomůže.
Často je Lagrangeova věta přepisována v tomto tvaru:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

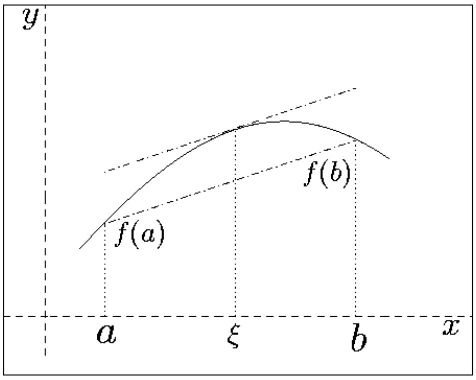
Pokud například položíme $b = x_0 + \Delta$, $a = x_0$, pak je podle posledního vzorce přírůstek funkce $f(x)$ v bodě x_0 roven

$$\Delta f(x_0) f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta,$$

kde ξ je číslo, nacházející se mezi body x_0 a $x_0 + \Delta$. Jeho přesnou hodnotu neznáme. Také neděláme žádný předpoklad o veličině přírůstku, který může být jak kladný, tak i záporný. Pokud $\Delta > 0$, pak $x_0 < x_0 + \Delta$ a $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta)$. V případě, že $\Delta < 0$ je $x_0 + \Delta < x_0$ a $\xi \in (x_0 + \Delta, x_0)$.



Obrázek 7.9.1: Geometrický význam Rolleovy věty



Obrázek 7.9.2: Geometrický význam Lagrangeovy věty

7.10 L'Hospitalovo pravidlo

Nyní bez důkazu uvedeme formulaci jednoho z nejdůležitějších pravidel při výpočtu limit. Toto pravidlo je užitečné zejména při počítání těch limit, ve kterých dochází se vyskytují neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Věta 7.13 (L'Hospitalovo pravidlo) *Jestliže*

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} f(x) = \lim_{x\to x_0\,(\infty)} \varphi(x) = 0\,(\infty),$$

a existuje limita

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,,$$

pak platí

$$\lim_{x\to x_0\,(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0\,(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,.$$

Toto pravidlo je jedním z nejdůležitějších pravidel diferenciálního počtu a má mnoho analogií, užitečných i při výpočtu limit posloupností. Při jeho formulaci jsme souhrnně uvedli všechny možnosti, které pravidlo zahrnuje. Tzn., že buď

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = +\infty$$

nebo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = -\infty$$

nebo

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0,$$

atd. Tím však výčet všech možností nekončí. Můžeme totiž uvažovat i jednostranné limity, tedy případy, kdy $x \to x_0^+$ nebo $x \to x_0^-$.

Ilustrujme nyní L'Hospitalovo pravidlo na příkladu.

Příklad 7.14 *Najděte limitu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Řešení. Jde o limitu typu $\frac{0}{0}$. Použití L'Hospitalova pravidla dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Příklad 7.15 *Najděte limitu*

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Řešení. Jde o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$. Použití L'Hospitalova pravidla dává

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Zkuste nyní pomocí uvedeného pravidla vypočítat všechny limity, které jsme uvedli v části 6.9, na str. 104.

7.11 Testování monotónnosti funkce

Věta 7.16 (Nutné podmínky monotónnosti funkce) *Jestliže* $\exists\, f'(x)$ *na* (a, b) *a*

1) $f(x)$ *roste na* $(a, b) \implies f'(x) \geq 0$ *na* (a, b),
2) $f(x)$ *klesá na* $(a, b) \implies f'(x) \leq 0$ *na* (a, b),
3) $f(x)$ *je rovno konstantě na* $(a, b) \implies f'(x) = 0$ *na* (a, b).

Věta 7.17 (Dostatečné podmínky pro monotónnost) *Jestliže* $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$, $f'(x) \in C^1$ *na* (a, b) *a*

1) $f'(x) > 0$ *na* $(a, b) \implies f(x)$ *roste na* $[a, b]$,
2) $f'(x) < 0$ *na* $(a, b) \implies f(x)$ *klesá na* $[a, b]$,
3) $f'(x) = 0$ *na* $(a, b) \implies f(x) \equiv \mathrm{k}$ *na* $[a, b]$.

7.12 Extrémy funkcí

Nyní využijeme získané poznatky pro nalezení extrémů funkcí, které jsou na uvažovaných intervalech spojité a také zde mají spojité derivace. Při hledání souvislostí s předchozími částmi textu podtrhujeme zejména skutečnost, že existence extrémů spojitých funkcí na uzavřených intervalech je garantována Weierstrassovou větou (viz 6.19, str. 103).

Definice 7.18 *Bod* x_0 *se nazývá bodem lokálního maxima (lokálního minima) funkce* $f(x)$ *jestliže* $f(x_0) \geq f(x)$, $x \in \mathcal{O}(x_0)$ $(f(x_0) \leq f(x),\ x \in \mathcal{O}(x_0))$. *Nahradíme-li neostré nerovnosti nerovnostmi ostrými, hovoříme o bodu ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima).*

Definice 7.19 *Body, v nichž funkce nabývá svého maxima nebo minima se souhrnně označují jako body extrému. Hodnota funkce v těchto bodech se nazývá extrém.*

Věta 7.20 (Nutná podmínka pro existenci extrému) *Jestliže funkce* $f(x)$ *má extrém v bodě* x_0, *pak je její derivace v tomto bodě (pokud existuje) rovna nule, nebo derivace v tomto bodě neexistuje.*

7.13 Postačující podmínky existence extrémů

Předchozí věta byla větou nutnou. Negarantovala tedy existenci extrému. Uvedeme nyní tři podmínky garantující existenci extrému. Ve formulaci věty vždy uvažujeme některé malé okolí bodu x_0.

Věta 7.21

A) Je-li derivace $f'(x)$ kladná pro $x < x_0$ a záporná pro $x > x_0$, pak je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima. Je-li derivace $f'(x)$ záporná pro $x < x_0$ a kladná pro $x > x_0$, pak je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima.

B) Je-li $f'(x_0) = 0$ a navíc

- *$f''(x_0) > 0$, pak je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima,*
- *$f''(x_0) < 0$, pak je bod x_0 bodem ostrého lokálního maxima.*

C) Je-li $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0$, číslo n je sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$ (nebo (< 0), pak je bod x_0 bodem ostrého lokálního minima (maxima).

7.14 Konvexnost a konkávnost křivky. Inflexní body.

Definice 7.22 *Říkáme, že oblouk křivky je konvexní, jestliže leží celý nad tečnou, vedenou kterýmkoli bodem oblouku. Oblouk křivky je konkávní, jestliže leží celý pod tečnou, vedenou kterýmkoli bodem oblouku.*

Definice 7.23 *Bod křivky, který odděluje její konvexní oblouk od konkávního se nazývá inflexní bod.*

V následující větě předpokládáme, že nezávislá proměnná x patří některému intervalu.

Věta 7.24 *Je-li $f''(x) < 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konkávní; je-li $f''(x) > 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konvexní.*

Věta 7.25 (Nutná podmínka existence inflexního bodu) *Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$a existuje-li druhá derivace v tomto bodě, pak je $f''(x_0) = 0$.*

Věta 7.26 (Postačující podmínky existence inflexního bodu) *A) Jestliže $f''(x)$ mění znaménko, když x prochází x_0, pak je bod x_0 inflexním bodem.*
B) Jesltiže $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak je bod x_0 inflexním bodem.
C) Jestliže $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a číslo n je liché, pak je bod x_0 inflexním bodem.

7.15 Asymptoty křivky

Uveďme jednoduché vzorce pro stanovení vertikálních asymptot grafu funkce $y = f(x)$ a pro stanovení asymptot se směrnicí (s náklonem).
A) Jestliže

$$\lim_{x \to x_0 \ (x_0^+, x_0^-)} f(x) = \pm\infty,$$

(stačí, aby platila jedna z možností), pak má křivka $y = f(x)$ vertikální asymptotu rovnici $x = x_0$.

B) Jestliže existují dvě konečné limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

a

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - Kx) = q,$$

pak má křivka $y = f(x)$ asymptotu se směrnicí danou rovnicí $y = kx + q$. Zde rozlišujeme dva případy - případ $x \to +\infty$ a případ $x \to -\infty$. V každém z nich může mít graf funkce jinou asymptotu, případně asymptota v jednom směru nemusí existovat, atd.

7.16 Obecné schéma pro vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce je nutno zejména vyšetřit:

I. (a) Definiční obor D_f funkce $f(x)$.
(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.
(c) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a vertikální asymptoty.
(d) Průsečíky se souřadnými osami.
(e) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá).
(f) Periodičnost funkce.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

Příklad 7.27 *Sestrojte graf funkce* $y = 3x^5 - 5x^3 + 2$.

Řešení. Položme $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$. Najdeme první a druhou derivaci:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1),$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1) = 30x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1).$$

První derivaci položíme rovnu nule a určíme kořeny, tj. stacionární body. Dostaneme

$$x_{1,2} = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

Extrém tedy může nastat v bodech $(-1; 4), (0; 2), (1; 0)$. Rozhodneme o existenci extrému pomocí druhé derivace. Protože $f''(-1) = -30 < 0 \Rightarrow$ nastává v bodě $(-1; 4)$ ostré lokální maximum funkce f. Dále máme $f''(0) = 0$. Proto nemůžeme o existenci extrému rozhodnout na základě druhé derivace. Pro bod $x = 1$ máme $f''(1) = 30 > 0 \Rightarrow$ a v bodě $(1; 0)$ je ostré lokální minimum. Ukažme, že bod $(0; 2)$ je inflexním bodem. Skutečně

$$f'''(x) = 180x^2 - 30 \quad \text{a} \qquad f'''(0) = -30.$$

Derivace třetího řádu (tedy lichá) je nenulová.
Hledejme další inflexní body. Druhá derivace je rovna nule v následujících případech:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bod x_2 jsme již analyzovali, pro oba zbývající je (jak se snadno můžeme přesvědčit) třetí derivace nenulová a proto se také jedná o inflexní body.
Určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti. Tyto intervaly od sebe oddělují inflexní body. Proto stačí rozhodnout o znaménku druhé derivace v daném intervalu. Dostáváme:

$$f'' < 0, \quad \forall x \in \left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

a funkce f je zde konkávní,

$$f'' > 0, \quad \forall x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

a funkce f je zde konvexní,

$$f'' < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a funkce f je zde konkávní a, nakonec,

$$f'' < 0, \quad \forall x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$$

a funkce f je zde konvexní.
Funkce f nemá žádné asymptoty. Její graf je na obrázku 7.16.3.

7.17 Některé numerické metody řešení nelineárních rovnic a soustav rovnic

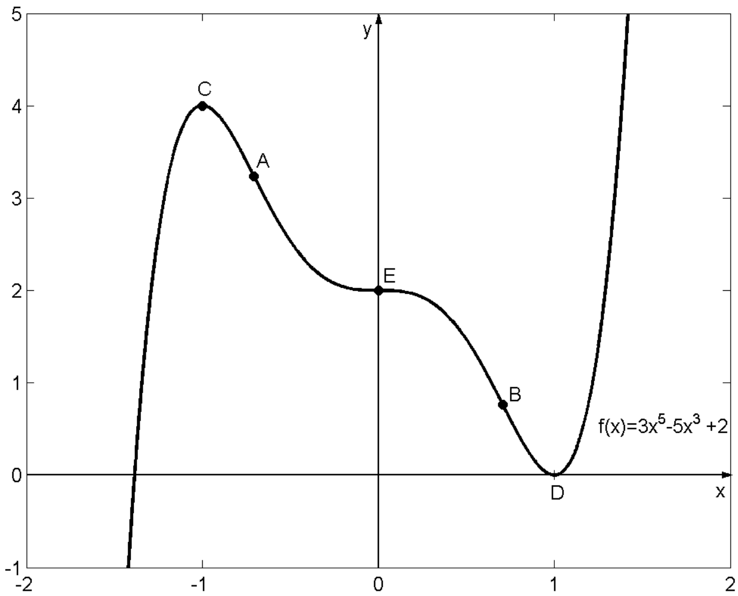
7.17.1 Metoda půlení (Metoda rozdělování úsečky na dva stejné díly)

Uvažujme rovnici

$$f(x) = 0,$$

kde funkce $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$



Obrázek 7.16.3: Graf funkce $f(x)$.

Abychom našli kořen ležící v intervalu $[a, b]$, rozdělíme interval na polovinu. Jestliže $f((a+b)/2) = 0$, pak $\xi = (a+b)/2$ je kořenem rovnice. Jestliže

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$

vybereme ten z intervalů $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$, v jehož koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka. Tento nově vzniklý interval $[a_1, b_1]$ znovu rozpůlíme a zopakujeme postup, až nakonec během procesu buďto získáme přesný kořen nebo nekonečnou posloupnost vnořených intervalů

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

takovou, že

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \; n = 1, 2, \ldots \tag{7.17.4}$$

a

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Pokud levé koncové body

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

tvoří monotónní neklesající omezenou posloupnost a pravé koncové body

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

monotónní nerostoucí posloupnost, pak existuje společná limita

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Přibližujeme-li se limitě v (7.17.4) pro $n \to \infty$, dostáváme $[f(\xi)]^2 \le 0$, tedy $f(\xi) = 0$, což znamená, že ξ je kořenem rovnice. Je zřejmé, že

$$0 \le \xi - a_n \le \frac{1}{2^n}(b-a).$$

7.17.2 Metoda proporciálních částí

Předpokládejme, že $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Potom je místo půlení intervalu $[a, b]$ přirozenější rozdělit interval v poměru

$$f(a) : f(b) \ .$$

Tím dostáváme odpovídající hodnotu kořene

$$x_1 = a + h_1,$$

kde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a)+f(b)} \cdot (b-a) = \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a).$$

Aplikujeme-li tento postup na interval $[a, x_1]$ nebo $[x_1, b]$ v jejichž koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka, dostáváme druhou aproximacei kořene x_2, atd. Geometricky je metoda proporcionálních částí ekvivalentní nahrazení křivky

$$y = f(x)$$

tětivou procházející body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Skutečně, rovnice tětivy AB je

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} \ .$$

Položíme-li $x = x_1$ a $y = 0$, dostáváme

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a).$$

Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \le x \le b$ (případ $f''(x) < 0$ se redukuje na náš případ, pokud napíšeme rovnici jako: $-f(x) = 0$). Pak bude křivka $y = f(x)$ *konkávní* a tedy bude ležet pod tečnou AB. Mohou nastat dva případy: $f(a) > 0$ a $f(a) < 0$.
V prvním případě je koncový bod a pevný a postupné aproximace

$$x_0 = b,$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \cdot (x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří omezenou posloupnost a

$$a < \xi < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0.$$

Ve druhém případě je koncový bod b pevný a postupné aproximace

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

tvoří omezenou rostoucí posloupnost a

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi < b.$$

Lze dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \text{and} \quad f(\xi) = 0.$$

7.17.3 Newtonova metoda (Metoda tečen)

Necht' existuje kořen rovnice $f(x) = 0$. Newtonova metoda je ekvivalentní nahrazování malých částí oblouku křivky $y = f(x)$ tečnou vedenou bodem křivky. Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \le x \le b$ a $f(b) > 0$. Vyberme např. $x_0 = b$, pro nějž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Ved'me tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $B_0(x_0, f(x_0))$. Pro první aproximaci x_1 kořene ξ vezměme úsek vyt'atý na ose x touto tečnou. Bodem $B_1(x_1, f(x_1))$ znovu vedeme tečnu, jejíž x-ová souřadnice průsečíku dává druhou aproximaci x_2 kořene ξ atd. Je zřejmé, že rovnice tečny v bodě $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$ je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Položíme-li $y = 0$, $x = x_{n+1}$, dostáváme vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,. \tag{7.17.5}$$

Všimněme si, že v našem případě pokládáme $x_0 = a$ a tedy $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$. Pokud bychom vedli tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $A(a, f(a))$, dostali bychom bod x_1', který leží vně intervalu $[a, b]$ a metoda by selhala.

Věta 7.28 *Jestliže $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x)$, $f''(x)$ jsou nenulové a zachovávají znaménko na $a \le x \le b$, pak lze z počáteční aproximace $x_0 \in [a, b]$, pro niž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ užitím Newtonovy metody (7.17.5) vypočítat samotný kořen ξ rovnice $f(x) = 0$ s libovolnou přesností.*

Pro přesnost lze teoreticky odvodit vzorec

$$\xi - x_n| \le C \cdot (x_n - x_{n-1})^2,$$

ve kter0m je kde C je konstanta (její hodnota není v teorii přesně vymezena).

7.17.4 Iterační metoda

Uvažujme rovnici

$$f(x) = 0, \tag{7.17.6}$$

kde $f(x)$ je spojitá funkce. Úlohou je určit reálné kořeny rovnice(7.17.6). Předpokládejme, že rovnice (7.17.6) je ekvivalentní nové rovnici

$$x = \varphi(x). \tag{7.17.7}$$

Způsobů, jak vybrat funkci φ je mnoho. Často například volíme

$$\varphi(x) := x + \alpha f(x),$$

kde α je vhodná konstanta. Nechť je číslo x_0 počáteční iterací některého kořene rovnice (7.17.7). Dosadíme ji do pravé strany (7.17.7)a dostaneme číslo

$$x_1 = \varphi(x_0). \tag{7.17.8}$$

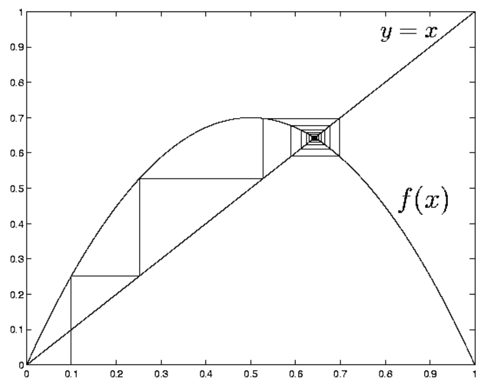
Nyní opět dosadíme x_1 do pravé strany rovnice (7.17.7) a dostaneme nové číslo $x_2 = \varphi(x_1)$. Opakováním tohoto procesu dostáváme posloupnost čísel

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Je-li tato posloupnost konvergentní, pak limita

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$

je kořenem (7.17.6).



Obrázek 7.17.4: Konvergující iterační proces

Věta 7.29 *Nechť funkce φ je definována a diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ a hodnoty $\varphi(x) \in [a, b]$ pro každé $x \in [a, b]$. Předpokládejme navíc, že existuje číslo q takové, že*

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

pro $x \in (a, b)$. Pak iterační proces

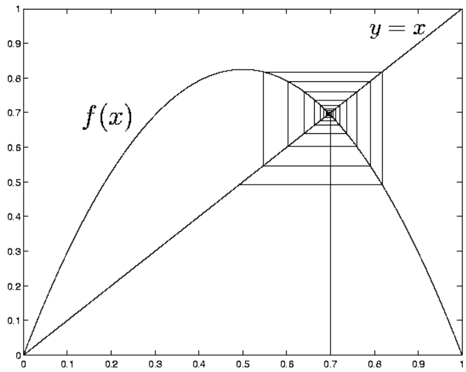
$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

konverguje, bez ohledu na počáteční hodnotu $x_0 \in [a, b]$; limitní hodnota $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ je jediným kořenem rovnice

$$x = \varphi(x)$$

na intervalu $[a, b]$.

Poznámka 7.30 *Iterační proces může divergovat:*



Obrázek 7.17.5: Divergující iterační proces

7.17.5 Odhad chyby iterační metody

Pro iterační metodu máme

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Dá se dokázat, že platí nerovnost

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Příklad 7.31 *Najděte reálné kořeny rovnice*

$$x - \sin x = 0,25$$

na tři platné číslice.

Řešení. Zapišme rovnici (7.31) ve tvaru

$$x = \sin x + 0,25.$$

Grafickým rozborem zjišťujeme, že rovnice má v intervalu $[1,1; 1,3]$ jeden reálný kořen ξ, přibližně rovný číslu 1, 2. Položme $x_0 = 1,2$ a

$$\varphi(x) = \sin x + 0,25.$$

Protože $\varphi'(x) = \cos x$ a $|\varphi'(x)| \leq\approx 0,62 = q$, $x \in (0,9; 1,5)$, pak

$$x_n = \sin x_{n-1} + 0,25, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Tyto odhady leží v intervalu $(0,9; 1,5)$ a $x_n \to \xi$ pro $n \to \infty$.
Kontruujme aproximace x_n, $n = 1, 2, \ldots$, až dvě sousední aproximace x_{n-1}, x_n budou vyhovovat požadavkům na chybu

$$\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 0,51 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \approx 0,0025.$$

Máme

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin 1,2 + 0,25 = 1,182, \\ x_2 &= 1,175, \\ x_3 &= 1,173, \\ x_4 &= 1,172, \\ x_5 &= 1,172. \end{aligned}$$

Tedy $\xi = 1,17 \pm 0,005$.

7.17.6 Řešení rovnic pomocí programu Maple

Příklad 7.32 *Najděte reálný kořen rovnice*

$$x - \sin x = 0,25$$

pomocí programu Maple (viz Příklad 7.31).

Řešení. Napišme odpovídající příkaz pro Maple:

```
s:=solve({x=sin(x)+0.25},{x});
```

Výsledek vypsaný programem Maple má tvar:

```
s:={x=1.171229653}
```

Příklad 7.33 *Najděte kořeny polynomické rovnice*

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$$

pomocí Maple.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz pro Maple:

```
s:=solve({x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4},{x});
```

Výsledek vypsaný programem Maple má tvar:

```
s:={x=1},{x=-1},{x=I},{x=-I},{x=-2},{x=-2}
```

Skutečně, rovnice může být zapsána ve tvaru:

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 2)^2 = 0.$$

Vyřešme tento příklad pomocí substituce:

```
poly:=x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4;
```

Maple dává:

$$poly := x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4$$

Potom příkaz

```
solve(poly=0,x);
```

dává tento výsledek:

```
1, -1, I, -I, -2, -2
```

Příklad 7.34 *Najděte kořeny polynomické rovnice*

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

pomocí Maple.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^3-6*x+2},{x});
```

dává jako výsledek nejasná transcendentní čísla. Pak je možno použít příkaz

```
s:=fsolve({x^3-6*x+2},{x});
```

Tak dostáváme

```
s:={x=-2.601679132},{x=.3398768866},{x=2.261802245}
```

Příklad 7.35 *Najděte kořeny polynomické rovnice*

$$x^4 + 4x + 1 = 0$$

pomocí Maple.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^4+4*x+1},{x});
```

odkazuje na kořeny téže rovnice

$$s := \{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + 4\_Z + 1)\}$$

Příkaz

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x});
```

dává pouze reálné kořeny

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575}
```

Všechna řešení této polynomiální rovnice dostaneme pomocí příkazu

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x}, complex);
```

Dostáváme

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575},
{x=.8721753570-1.381031598*I},{x=.8721753570+1.381031598*I}
```

7.18 Vektorová funkce skalárního argumentu

7.18.1 Vektorová funkce. Hodograf.

Z vektorové algebry víme, že vektor $\vec{A}$, jehož průměty na osy jsou po řadě rovny x, y a z, lze zapsat jako

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

kde $\vec{i}, \vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory souřadných os. Jsou-li průměty x, y a z konstanty, říkáme, že vektor $\vec{A}$ je *konstantní*. Nyní předpokládejme, že průměty vektoru jsou funkce parametru t pohybujícího se v rozmezí daného intervalu:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Pak říkáme, že vektor $\vec{A}$ sám je *variabilní:* každé hodnotě t parametru odpovídá jistá (vektorová) hodnota $\vec{A}$:

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 7.36 *Jestliže každé hodnotě parametru t z daného intervalu odpovídá jistý vektor $\vec{A}(t)$, nazýváme $\vec{A}(t)$* vektorovou funkcí skalárního argumentu *t.*

Je pohodlné položit počátek vektoru $\vec{A}(t)$ do počátku souřadné soustavy; pak při změně hodnoty t koncový bod vektoru $\vec{A}(t)$ (se souřadnicemi $x(t), y(t), z(t)$) opíše křivku L, pro kterou vztahy

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

slouží jako parametrické rovnice.
Vektor $\vec{A}(t)$ není nic jiného než *radius vektor* $\vec{r}$ pohybujícího se bodu M křivky L. Tuto křivku lze specifikovat pomocí jediné *vektorové rovnice*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 7.37 *Křivka L popsaná koncovým bodem proměnného vektoru $\vec{A}(t)$ začínajícího v počátku se nazývá* hodograf *vektorové funkce $\vec{r} = A(t)$. Počátek se pak nazývá* pólem hodografu.

7.18.2 Limita a spojitost vektorové funkce

Definice 7.38 *Říkáme, že vektor $\vec{B}$ je* limitou vektorové funkce *$\vec{A}(t)$ as $t \to t_0$, zapisujeme*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{A}(t) = B,$$

jestliže pro všechny hodnoty t ležící dostatečně blízko t_0 je modul rozdílu vektorů $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ libovolně malý.

Je-li

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

a

$$\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

pak

$$|\vec{A}(t) - \vec{B}| = \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 + [z(t) - c]^2}.$$

Je zřejmé, že podmínka, aby se $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ blížilo k nule pro $t \to t_0$ má za důsledek $x(t) \to a$, $y(t) \to b$, $z(t) \to c$. Obrácené tvrzení platí samozřejmě také. Takže lze stručně prohlásit, že *průměty limit vektorové funkce $\vec{A}(t)$ jsou rovny limitám jejich průmětů.*

Definice 7.39 *Říkáme, že vektor $\vec{A}(t)$ je* spojitý *pro danou hodnotu t parametru, jestliže je definován v okolí bodu t a jestliže*

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta\vec{A}(t)| = 0.$$

Necht' je rozklad vektoru $\vec{A}(t)$ na složky podle souřadných os

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak

$$\vec{A}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}$$

a, podle pravidel vektorové algebry,

$$\Delta\vec{A}(t) = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\ ,$$

kde $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ atd. Protože

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

podmínka $|\Delta A(t)| \to 0$ implikuje, že $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Obrácené tvrzení je také zřejmé: Jestliže $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ jde k nule, $|\Delta A(t)|$ jde také k nule. To znamená, že spojitost vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je ekvivalentní spojitosti jejích průmětů $x(t), y(t), z(t)$.

7.18.3 Derivace vektorové funkce

Zkonstruujme poměr

$$\frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}\,.$$

Definice 7.40 *Derivace vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je limita (pokud existuje)*

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \vec{A}'(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{\Delta t}\,.$$

Podle definice limity je derivace vektorové funkce také *vektor.*
Je-li modul vektorové funkce $\vec{A}(t)$ konstanta (zatímco směr se může měnit), její derivace $\vec{A}'(t)$ je *vektor kolmý k původnímu vektoru* $\vec{A}(t)$. Opravdu, v tomto případě leží hodograf na sféře, a tedy jeho derivace $\vec{A}'(t)$, tečna k hodografu, je kolmá k vektoru průvodiči $\vec{A}(t)$. Tedy *derivace vektoru s konstantním modulem je k danému vektoru kolmá.*
Nyní prakticky určíme derivaci $\vec{A}'(t)$ dané vektorové funkce $\vec{A}(t)$. Necht' je vektorová funkce $\vec{A}(t)$ určena svým rozkladem

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak máme

$$\frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Při limitním přechodu pro $\Delta t \to 0$ dostáváme

$$\vec{A}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Z toho vyplývá, že

$$|\vec{A}'(t)| = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}\,.$$

7.18.4 Základní pravidla pro derivování vektorové funkce

Využijeme-li vyjádření derivace $\vec{A}'(t)$, lze lehce ukázat, že všechna základní pravidla o derivování pro saklární funkce lze téměř beze změny přenést na vektorové funkce:

1. $$[\vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t) + \vec{A}_2'(t);$$
2. $$[f(t)\vec{A}(t)]' = f'(t)\vec{A}_(t) + f(t)\vec{A}'(t)$$
   kde $f(t)$ je skalární funkce.

Pravidla pro derivování skalárního a vektorového součinu $\vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}_2(t)$ a $\vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t)$ dvou vektorových funkcí jsou také zcela analogické odpovídajícím pravidlům pro součin skalárních funkcí:

1. $$[\vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t) \cdot \vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t) \cdot \vec{A}_2'(t);$$
2. $$[\vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t) \times \vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t) \times \vec{A}_2'(t).$$

7.18.5 Aplikace v mechanice

Necht' t je čas pohybu a necht' hodograf vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ je trajektorie bodu M. Vzdálenost bodu M od pevného počátečního bodu budeme označovat s a počítáme ji podle trajektorie a bereme se znamínkem $+$ nebo $-$ v závislosti na tom, zda se bod M od počátečního bodu pohybuje v kladném nebo záporném směru. Poloha bodu M je plně určena veličinou s, což je *křivková souřadnice* bodu M. Rovnice $s = s(t)$ vyjadřuje *zákon pohybu podél trajektorie.*

Podle definice je *rychlost v daném bodě M v daném časovém okamžiku t dána derivací vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ podle času:*

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}'(t).$$

Následně *vektor rychlosti pohyblivého bodu je tečný vektor k trajektorii v odpovídajícím bodě ve směru pohybu. Modul rychlosti* je vyjádřen vztahem

$$|v| = |\vec{A}'(t)| = \frac{ds}{dt},$$

tedy, je roven *derivaci křivkové souřadnice s vzhledem k t.*

Je-li pohyb přímočarý, skalární veličina

$$\frac{ds}{dt}$$

plně určuje rychlost. Tuto veličinu nazýváme rychlostí přímočarého pohybu v daném bodě.

Vektor

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

se nazývá *zrychlení* pohybu.

7.19 Komplexní funkce reálné proměnné

7.19.1 Definice komplexní funkce

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce skalárního argumentu, jejíž průmět na osu z je identicky roven nule pro všechny hodnoty parametru t. Pak

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{7.19.9}$$

a křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ leží celá v rovině Oxy. V tomto případě je vhodné uvažovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

jako geometrický obraz komplexního čísla $z = x + iy$ a mluvit, ve shodě s tímto, místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t.

Definice 7.41 *Je-li každé hodnotě reálného parametru t přiřazeno komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{7.19.10}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce *reálného argumentu t.*

Parametr t se pohybuje uvnitř intervalu. *Hodograf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je podle definice křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy hodograf vektorové funkce (7.19.9) a komplexní funkce (7.19.10) jsou totožné. Definice limity a spojitosti komplexní funkce jsou zcela analogické odpovídajícím definicím pro vektorové funkce. Všimněte si, že spojitost komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je ekvivalentní spojitosti její reálné a imaginární části $x = x(t)$ and $y = y(t)$. Hodograf spojité funkce $z(t)$ vykreslený pro parametr t v intervalu (t_1, t_2) je spojitá čára spojující body $z(t_1)$ a $z(t_2)$ v komplexní rovině.

Příklad 7.42 *Pro funkci*

$$z(t) = t + it^2, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. Hodografem je parabola $y = x^2$. Pro t nabývající hodnot od $-\infty$ do $+\infty$ opíše pohyblivý bod paraboly křivku tak, že horní (nekonečná) oblast omezená parabolou zůstává vždy vlevo.

7.19.2 Derivace komplexní funkce reálné proměnné

Derivace komplexní funkce $z(t)$ je definována běžným způsobem, tj. jako podíl přírůstku funkce $\Delta z = z(t + \Delta) - z(t)$ a přírůstku nezávisle proměnné Δt:

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\,.$$

Tedy derivace $z'(t)$ je komplexní funkcí téhož argumentu. Geometricky lze derivaci interpretovat tak, že vektor odpovídající komplexnímu číslu $z'(t_0)$ je rovnoběžný s tečnou k hodografu funkce $z(t)$ v bodě hodografu, který odpovídá hodnotě parametru $t = t_0$. Pro danou komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ dostáváme vztah pro derivování

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Tento vztah naznačuje, že komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ může být derivována jednoduše jako lineární kombinace, v níž i je považováno za běžnou konstantu.

7.20 Shrnutí

Seznámili jsme se s derivacemi vyšších řádů a s jejich použitím. Ukázali jsme si použití derivací pro výpočet některých typů limit. „L'Hospitalovo pravidlo" můžeme použít pouze v případě, kdy určujeme limitu vedoucí na neurčitý výraz.

Naučili jsme se jak studovat průběh funkce. Body, v nichž se mohou nacházet extrémy funkce, určujeme pomocí první derivace. Zda se jedná o extrém a o jaký, zdali minimum či maximum, rozhodujeme vetšinou podle derivací vyšších řádů. Limity jsme použili pro stanovení asymptot. Vertikálních i s náklonem. Funkce je rostoucí čí klesající podle toho, zda je první derivace kladná či záporná. Konvexnost a konkávnost křivky závisí na znaménku druhé derivace. V souhrnu získáváme všechny podstatné udaje pro konstrukci grafu fukce.

Opět můžeme využít vhodného programového vybavení a ulehčit si práci. Při určování derivací vyšších řádů je důležité provádět i algebraické upravy. Pokud provedeme vhodné úpravy, můžeme si výrazně ulehčit další výpočet.

7.21 Kontrolní příklady ke kapitole 7

1. Najděte první a druhou derivaci dané funkce
   (a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$
   (b) $y = \sin^2 x$
   (c) $y = \frac{1-\cos 2x}{x^2+2x}$
2. Určete třetí derivaci.
   (a) $y = \frac{1}{1-x}$
   (b) $y = \sin ax$
3. Určete intervaly monotónnosti daných funkcí.
   (a) $f(x) = x^2 + 1$
   (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

(c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

4. Najděte stacionární body a extrémy daných funkcí.

   (a) $f(x) = 2^{-2x^2}$
   (b) $f(x) = \log_{10}(\sin x),\ 0 < x < \pi$
   (c) $f(x) = x^{2x}$

5. Určete intervaly konvexnosti (konkávnosti) daných funkcí.

   (a) $f(x) = x^3 + 1$
   (b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 8x - 6$
   (c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

6. Vyšetřete průběh daných funkcí.

   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
   (b) $f(x) = -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$
   (c) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
   (d) $f(x) = x \sin x$
   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$
   (f) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$
   (g) $f(x) = x + \sin x$
   (h) $f(x) = \frac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$
   (i) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$

7. Danou numerickou metodou nalezněte kořen funkce $f(x) = x^3 - x - 1$

   (a) Metodou půlení
   (b) Metodou tečen
   (c) Iterační metodou

8. Derivujte následující komplexní funkce reálné proměnné

   (a) $z(t) = t^2 - 2 + i(t^3 - 2t)$
   (b) $z(t) = \sin(t) + i\cos(t)$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.7.

Kapitola 8

Nekonečné číselné řady

8.1 Cíl kapitoly

V inženýrských vědách existuje celá řada příkladů, kde jsou zkoumané vztahy prezentovány pomocí součtu konečného nebo nekonečného počtu členů či čísel. Cílem této kapitoly je definovat pojem nekonečné číselné řady a vysvětlit, co rozumíme součtem řady. Řady mohou mít konečný součet - hovoříme pak o řadách konvergentních. Nemusí mít ale žádný součet nebo součet může být roven nekonečnu. Pak hovoříme v obou těchto případech o řadách divergentních. I moderní počítačové metody se mohou v případě hledání součtů řad mýlit. Příkladem, ilustrujícím toto tvrzení může být tzv. harmonická řada v této kapitole uvažovaná. Její součet je roven nekonečnu a řada je tedy divergentní. Přesto programy hledající součet této řady selžou a oznámí zadavateli, že řada má součet konečný. Příčina je v tom, že je splněna tzv. nutná podmínka konvergence řady, která úzce souvisí s faktem, že ve výpočtech začne hrát roli tzv. počítačová nula - přičítání velmi malých čísel je zanedbáno a k již zjištěnému „součtu“ je v dalších krocích stále přičítána nula. Tím je zabráněno zvyšování hodnoty součtu řady. Cílem kapitoly je také uvedení kritérií pomocí kterých konvergenci či divergenci řad posuzujeme. Nejmohutnějším uvedený výsledkem v tomto směru je tzv. integrální kriterium. V kapitole se zabýváme také mocninnými řadami. V tomto směru jsou nejdůležitější Taylorova a Maclaurinova řada. Jejich význam spočívá mj. v tom, že s požadovanou přesností můžeme uvažované funkce nahradit polynomy, které jsou často při výpočtech vhodnější. V neposlední řadě je cílem kapitoly uvést některé konkrétní rozklady důležitých funkcí do řad a ukázat, jak je možné využít program Maple při práci s řadami.

8.2 Číselné řady

Definice 8.1 *Výraz*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad u \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots$$

nazýváme číselnou řadou; čísla $u_1, u_2, \ldots$ jsou nazývána členy řady.

Označme

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \; .$$

Výraz u_n je nazýván n-tým členem nebo též **obecným členem** (obecným prvkem) řady. Je-li dán vztah $u_n = f(n)$, pak lze okamžitě zapsat libovolný člen řady. Například, je=li $u_n = \frac{1}{2^n}$, pak má řada tvar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \; .$$

Je=li $u_n = \frac{1}{n!}$, potom je řada dána takto:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \; .$$

Definice 8.2 *Součet prvních n-členů řady:*

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

nazýváme n-tým částečným součtem řady.

Uveďme několik částečných součtů:

$$\begin{array}{lcl} s_1 & = & u_1, \\ s_2 & = & u_1 + u_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n & = & u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \; . \end{array}$$

Definice 8.3 *Má-li posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ dané řady konečnou limitu pro $n \to \infty$, tj., je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak říkáme, že řada konverguje a její limita s je nazývána součtem řady. Nemá-li posloupnost $\{s_n\}$ konečnou limitu, pak říkáme, že řada je divergentní (v tomto případě buď $\{s_n\} \to \infty$ nebo posloupnost $\{s_n\}$ nemá ani konečnou ani nekonečnou limitu; v obou případech příslušná řada nemá součet.)*

Příklad 8.4 *Proveďte diskusi nekonečné geometrickou řady:*

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \; .$$

Řešení. Součet prvních n členů nekonečné geometrickou řady je

$$s_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\ .$$

Je-li $|q| < 1$, pak $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Proto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}\ .$$

Nekonečná geometrická řada s $|q| < 1$ konverguje a její součet je

$$s = \frac{a}{1-q}\ .$$

Je-li $q > 1$, pak $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty\,,$$

tj., řada diverguje.
Položme nyní $q = 1$. Odpovídající n-tý částečný součet řady

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

je $s_n = na$ a konverguje k nekonečnu: $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Je-li $q = -1$, pak má řada tvar

$$a - a + a - a + \cdots \qquad (a \neq 0).$$

Její částečné součty jsou:

$$\begin{array}{ccc} s_1 & = & a, \\ s_2 & = & 0, \\ s_3 & = & a, \\ s_4 & = & 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots, \end{array}$$

tj., s_n nemá žádnou limitu. Tato řada je divergentní.
Samostatně ukažte, že v případě $q < -1$ je uvažovaná řada také divergentní. Na základě výše uvedené diskuse příkladu 8.4 můžeme získané výsledky formulovat jako větu.

Věta 8.5 *Nekonečná geometrická řada je konvergentní v případě, že $|q| < 1$ a divergentní v případě, že $|q| \geq 1$.*

Konvergence řady je obyčejně vyšetřována bez konkrétního nalezení jejího součtu, neboť v obecném případě není nalezení součtu jednoduchou záležitostí. Přitom jsou užívána různá kritéria (postačující podmínky)pro zjištění konvergence.

8.3 Nutná podmínka konvergence číselné řady

Věta 8.6 *Je-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergentní, pak její n-tý člen musí konvergovat k nule, tj.,* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Důkaz. Uvažujme částečné součty

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

Pak

$$s_n - s_{n-1} = u_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} u_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Příklad 8.7 *Na základě nutné podmínky konvergence rozhodněte o konvergenci či divergenci řady*

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100n+1} + \cdots . \tag{8.3.1}$$

Řešení. Pro limitu obecného členu řady (8.3.1) máme

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0.$$

Řada je proto divergentní.

Příklad 8.8 *Upozorněme na to, že fakt konvergence obecného členu řady k nule když* $n \to \infty$ *není v obecném případě postačující podmínkou konvergence řady. Ukažme, že například tzv. harmonická řada:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{8.3.2}$$

je divergentní, přestože limita obecného členu

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Řešení. Skutečně, pro částečné součty s_{2^n} harmonické řady (8.3.2), kde $n \in \mathbb{N}$ máme:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \\ &\qquad \left(\frac{1}{2^{n-1}-1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \\ &\qquad \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty.$$

8.4 Vlastnosti konvergentních řad

a) Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergentní a její součet je roven S, pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ také konvergentní a její součet je roven λS.

b) Jsou-li řady $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ konvergentní, pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ také konvergentní a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k.$$

c) Jestliže ke konvergentní řadě přidáme nebo od ní odebereme konečný počet členů, zůstane konvergentní.

8.5 Řady s kladnými členy

Definice 8.9 *Řadu $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ nazýváme řadou s kladnými členy, je-li $p_i > 0$.*

Věta 8.10 (Porovnávací věta) *Uvažujme dvě řady s kladnými členy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k$$

takové, že $p_k \leq q_k, k = 1, 2, \ldots$. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ konvergentní, pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ také konvergentní. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ divergentní, pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ také divergentní. Jestliže

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = c \in (0, \infty),$$

pak jsou obě řady současně konvergentní nebo divergentní.

Příklad 8.11 *Pomocí porovnávacího kriteria ukažte, že řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{8.5.3}$$

je divergentní.

Řešení. Protože můžeme odhadnout každý člen uvažované řady pomocí nerovnosti

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k},$$

která platí pro $k \geq 1$, a protože je harmonická řada (8.3.2) divergentní, diverguje i řada (8.5.3).

Věta 8.12 (D' Alembertovo podílové kritérium) *Nechť je dána řada s kladnými členy* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$*. Jestliže*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ *a* $\rho > 1$ $(\rho < 1)$*, pak je řada divergentní (konvergentní);*

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$ *pro každé* $n \geq m \in \mathbb{N}$*, pak je řada konvergentní;*

c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *pro každé* $n \geq m \in \mathbb{N}$*, pak je řada divergentní.*

Věta 8.13 (Cauchyovo odmocninové kritérium) *Předpokládejme, že je dána řada s kladnými členy* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$*. Jestliže*

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ *a* $\rho > 1$ $(\rho < 1)$*, pak je řada divergentní (konvergentní);*

b) $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$ *pro každé* $n \geq m \in \mathbb{N}$*, pak je řada konvergentní;*

c) $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ *pro každé* $n \geq m \in \mathbb{N}$*, pak je řada divergentní.*

Nejmocnějším nástrojem pro zjišťování konvergence řad s kladnými členy je tzv. integrální kriterium. V tomto kriteriu testujeme konvergenci či divergenci řady na základě toho zda je jistý určitý integrál konvergentní či divergentní. Určitý integrál je probírán až v Kapitole 11 a další pojmy o nevlastních integrálech jsou z kapitoly 12. Z hlediska kompaktnosti látky je však integrální kriterium zařazeno sem. Vraťte se proto k tomuto kriteriu po prostudování uvedených kapitol znova.

Věta 8.14 (Integrální kritérium) *Nechť jsou členy řady* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k, (u_k > 0)$ *hodnotami spojité kladné a monotónně klesají funkce* $f(x)$ *definované na* $[1, +\infty)$ *pro celočíselné hodnoty argumentu* x :

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots.$$

Pak jsou řada $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *a nevlastní integrál* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *současně konvergentní nebo divergentní.*

Příklad 8.15 *Rozhodněte o konvergenci harmonické řady (8.3.2).*

Řešení.

1. Užitím D'Alembertova kritéria dostáváme: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \rho$ a konvergence řady není vyjasněna. Kromě toho,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n+1} \not< q < 1$$

a tato nerovnost neplatí pro každé $n \geq m \in \mathbb{N}$.

2. Užitím Cauchyova kritéria dostáváme:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$
Nechť $z = n^{\frac{1}{n}}$. Potom $\ln z = \frac{1}{n}\ln n$ a $\lim_{n\to\infty}\ln z = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Proto $\rho = 1$ a konvergence není vyjasněna.

3. Použijme integrální kritérium. Položme $f(x) = \frac{1}{x}$. Potom
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \ln|x||_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\ln|x| = +\infty.$$
Harmonická řada je tedy divergentní.

8.6 Řady s libovolnými členy

8.6.1 Alternující řady

Definice 8.16 *Alternující řada má tvar*
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots,$$
kde $u_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Věta 8.17 (Leibnitzova) *Je-li*
$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 > u_6 > \ldots$$
a
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$
pak je řada konvergentní. Absolutní hodnota jejího součtu je menší než u_1*, a pro absolutní hodnotu zbytku* r_n *platí:* $|r_n| < u_{n+1}$.

Označme
$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots,$$
$$s_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots (-1)^{n+1}u_n,$$
$$r_n = (-1)^{n+2}u_{n+1} + (-1)^{n+3}u_{n+2} + (-1)^{n+4}u_{n+2} + \ldots.$$

Příklad 8.18 *Řada*
$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$
je podle Leibnitzovy věty konvergentní. Najděte přibližně hodnotu jejího součtu s.

Řešení. Hodnota součtu s je přibližně rovna
$$s \approx s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$
a
$$|r_n| < \frac{1}{n+1}.$$

8.6.2 Absolutní konvergence

Uvažujme nyní řady $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se členy libovoných znamének.

Věta 8.19 *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konvergentní, pak je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *také konvergentní.*

Definice 8.20 *Jsou-li obě řady* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergentní, pak řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *nazýváme* absolutně konvergentní. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konvergentní a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *je divergentní, pak řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *nazýváme* podmíněně konvergentní.

8.7 Mocninné řady

Definice 8.21 *Mocninnou řadou nazýváme řadu tvaru*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots ,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* x *je nezávislá proměnná.*

Pro každou konkrétní hodnotu $x = x^* \in \mathbb{R}$ se uvedená řada stává číselnou řadou.

Definice 8.22 *Číslo* R *takové, že mocninná řada je konvergentní pro každé* x *vyhovující nerovnosti* $|x - x_0| < R$ *a divergující pro každé* x *vyhovující nerovnosti* $|x - x_0| > R$ *nazýváme poloměrem konvergence. Interval* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *nazýváme intervalem konvergence.*

Pro nalezení poloměru konvergence jsou užitečné následující vzorce:
D'Alembertův -

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| , \tag{8.7.4}$$

a Cauchyův - Hadamardův -

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8.7.5}$$

Příklad 8.23 *Najděte poloměr konvergence mocninné řady*

$$1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \ldots .$$

Řešení. Pro tuto řadu máme $x_0 = 0$. Pro výpočet poloměru konvergence použijeme vzorec (8.7.4). Dostáváme

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n-1)!}{n!} \right| = 0.$$

Příklad 8.24 *Najděte poloměr konvergence mocninné řady*

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots + x^{2n} + \ldots .$$

Řešení. Pro tuto řadu dostáváme $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, \dots$ a $x_0 = 0,$. Pro výpočet poloměru konvergence použijeme vzorec (8.7.5). Dostáváme

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

Příklad 8.25 *Najděte poloměr konvergence mocninné řady*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Řešení. Zde máme $x_0 = 0$, a podle vorce (8.7.5) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \infty.$

8.8 Některé vlastnosti mocninných řad

Předpokládejme, že mocninná řada má tvar

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots ,$$

tj., že v obecném tvaru mocninné řady je $x_0 = 0$. Předpokládejme, že existuje součet

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad x \in (-R, R).$$

Věta 8.26 *Mocninná řada může být derivována (člen po členu) nebo integrována (člen po členu) ve svém konvergenčním intervalu (a to dokonce nekonečněmnohokrát); přitom poloměr konvergence každé nové řady je stejný jako výchozí poloměr konvergence. Např. platí:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = S'(x), \quad x \in (-R, R),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \int_0^x S(t)\,dt, \quad x \in (-R, R).$$

Příklad 8.27 *Najděte součet řady (existuje-li):*

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 + \dots$$

Řešení. Označme

$$\Sigma(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 + \dots$$

a najděme součet integrované řady,tj.,

$$S(x) \equiv \int_0^x \Sigma(t)\,dt = -\,(\,1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots).$$

Je snadné najít součet poslední řady -

$$S(x) = \frac{-1}{1+x}\,,\ \ x \in (-1,1),$$

neboť jde o součet členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = -x$. Proto

$$\Sigma(x) = S'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

Ukažme na další zajímavou vlastnost:

$$-\int_0^x S(t)\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

Protože poslední řada konverguje v bodě $x = 1$ (jako řada s alternujícími členy) pak platí

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

8.9 Taylorovy polynomy

Uvažme následující problém: Jaké podmínky zaručují, že funkce $f(x)$ může být přibližně zapsána jako polynom? Předpokládejme, že $f(x) \in C^{(n)}$, kde $n \in \mathbb{N}$, v okolí $\mathcal{O}\ (x_0)$. Pokusme se přibližně nahradit tuto funkci $f(x)$ polynomem

$$f(x) \doteq a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

kde $a_0, a_1, \dots . a_n$ jsou nějaká čísla. Pokusíme se je určit.
Lehce nahlédneme, že (pro $x = x_0$) $a_0 = f(x_0)$. Derivujme tento polynom. Můžeme očekávat, že bude platit přibližná rovnost

$$f'(x) \doteq a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Dosazením $x = x_0$ vidíme, že lze položit $a_1 = f'(x_0)$. Analogicky očekáváme, že platí přibližný vztah

$$f''(x) \doteq 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

a, jako výše, určíme $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Pokračujeme-li tímto způsobem, dostáváme po n-té derivaci

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,,\ \ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dosazením těchto výrazů do původního přibližného vztahu dostáváme

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Koeficienty

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}\,,\ k = 0,1,2,\dots$$

se nazývají *Taylorovy koeficienty* a součty (polynomy)

$$T_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ k = 0,1,2,\dots$$

Taylorovy polynomy.

8.10 Taylorův vzorec

Napišme

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{8.10.6}$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom a $R_n(x)$ je zbytek (tj. rozdíl $f(x) - T_n(x)$). Následující věta ukazuje, jaký tvar má zbytek $R_n(x)$ a jaké podmínky musí platit pro to, abychom mohli funkci $f(x)$ vyjádřit ve tvaru (8.10.6).

Věta 8.28 (Lagrangeova věta) *Je-li $f(x) \in C^{(n+1)}$ na $\mathcal{O}\ (x_0)$ pak*

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, kde ξ je číslo ležící mezi x_0 a x.

8.11 Taylorova řada (Taylorův rozvoj)

V této části budeme diskutovat následující úlohu: Jaké podmínky budou postačující pro to, aby bylo možné funkci $f(x)$ vyjádřit ve tvaru součtu mocninné řady? Předpokládejme $f(x) \in C^\infty$ na nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0)$. Jestliže bude platit vztah

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots\,,$$

pak (pro $x = x_0$) : dostaneme vztah $a_0 = f(x_0)$. Derivováním této řady dostáváme

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

a podobně: $a_1 = f'(x_0)$. Postupujme dále zcela analogicky:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

a $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$. V obecném případě po n-násobném derivování máme

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dosazením získaných hodnot do výchozí (předpokládané) rovnosti dostáváme takzvanou **Taylorovu řadu**, odpovídající funkci $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) \propto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots . \end{aligned}$$

Koeficienty $a_i = \frac{f^i(x_0)}{i!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ jsou nazývány **Taylorovými koeficienty** a částečné součty

$$\begin{aligned} T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

nazýváme **Taylorovými polynomy.**

8.12 Rozklad funkcí do Taylorových a Maclaurinových řad

Úvodem poznamenejme, že Taylorova řada ve které $x_0 = 0$ je tradičně nazývána Maclaurinovou řadou.

Věta 8.29 *Funkce $f(x)$ může být rozložena do Taylorovy řady na některém okolí $\mathcal{O}(x_0)$, jestliže $|f^{(i)}(x)| \leq M$, kde $i = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in \mathcal{O}(x_0)$ a M je společnou horní hranicí pro všechny výše uvedené výrazy.*

8.13 Některé Maclaurinovy řady

8.13.1 Maclaurinova řada exponenciální funkce

Nechť $f(x) := e^x$ a $x_0 = 0$. Potom $f^{(i)}(x) = e^x$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Předpokládejme, že $\mathcal{O}(0) = (-N, N)$. Pak

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^x x^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} e^N < e^N.$$

Snadno vidíme, že
$$|f^{(i)}(x)| < e^N \equiv M.$$
Proto v souladu s Větou 8.29
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$
Velikost číslo N nemá vliv na předchozí úvahy, je tedy $R = \infty$.

8.13.2 Maclaurinova řada trigonometrických funkcí

Uvažujme trigonometrickou funkci $f(x) := \sin x$. Její hodnota v bodě $x = 0$ a hodnoty příslušných derivací v tomto bodě jsou:
$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x, & f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x, & f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x, & f'''(0) = -1, \\ f^{IV}(x) = \sin x, & f^{IV}(0) = 0, \end{array}$$
atd. Hodnoty derivací tvoří periodickou posloupnost
$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots ,$$
proto
$$|f^{(n)}(0)| = (\sin x)^{(n)}\big|_{x=0} \le 1, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$
Všechny podmínky Věty 8.29 platí. Řada má tvar
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots ,$$
a poloměr konvergence $R = +\infty$.
Stejným způsobem můžeme vytvořit Maclaurinovu řadu funkce $\cos x$:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$$
kde $R = +\infty$.

8.13.3 Některé užitečné Maclaurinovy řady konkrétních funkcí

Podobně jako v předešlé části můžeme obdržet následující Maclaurinovy řady:
$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots ,$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots ,$$
$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots ,$$
které mají poloměr konvergence $R = 1$.

8.14 Řady a program Maple

S pomocí programu Maple lze najít několik prvních členů rozvojů daných výrazů do řad.

Příklad 8.30 *Najděme několik prvních členů Maclaurinova rozvoje funkce*

$$y = \ln(1+x)$$

pomocí programu Maple.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz programu Maple:

```
series(ln(1+x), x=0);
```

Dostaneme tento výsledek:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^6).$$

Člen $O(\,)$ je indikací řádu, který je již zanedbán.

Příklad 8.31 *Napišme několik prvních členů rozvoje do Taylorovy řady funkce*

$$y = \ln(1+x)$$

v okolí bodu $x = 1$ užitím programu Maple.

Řešení. Užijeme příkaz programu Maple:

```
series(ln(1+x), x=1);
```

Výsledek má tvar:

$$\ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 + \frac{1}{160}(x-1)^5 + O((x-1)^6).$$

Příklad 8.32 *Najděme tzv. asymptotický rozklad pro $n \to \infty$ funkce*

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{n^2-3}.$$

pomocí programu Maple.

Řešení. Odpovídající příkazy programu Maple jsou

```
f:=n*(n+1)/(n*n-3);
```

a

```
asympt(f,n);
```

Pak program Maple dává:

$$f := \frac{n(n+1)}{n^2-3}$$

a výsledný rozklad má tvar

$$1 + \frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2} + 3\frac{1}{n^3} + 9\frac{1}{n^4} + 9\frac{1}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

8.15 Shrnutí

V této kapitole jsme se setkali s řadou základních pojmů teorie řad. Nejdůležitějším z nich je pojem součtu řady. Její definice je jednoznačná a užívá přitom částečných součtů. Při zkoumání řad na konvergenci je podstatnou záležitostí platnost tzv. nutné podmínky konvergence. Postačujícími podmínkami konvergence číselných řad s kladnými členy jsou například uvedená kritéria, ze kterých je nejvýznačnější kritérium integrální. V kapitole byly diskutovány také alternující řady. O jejich konvergenci hovoří Leibnitzovo kritérium. Lze-li toto kriterium použít, pak také můžeme nacházet součet takovéto řady s libovolnou přesností. Obecnější řady jsou řady mocninné. Důležitým pojmem je zde pojem poloměru konvergence mocninné řady. Pro jeho nalezení byly uvedeny dva vztahy - D'Alembertův a Cauchy-Hadamardův. Typickou vlastností konvergentních mocninných řad je možnost jejich derivování či integrování (člen po členu). Přitom výsledné řady mají stejný poloměr konvergence jako řada původní. Mezi mocninnými řadami jsou nejdůležitější tzv. Taylorovy a Maclaurinovy řady. Tyto řady umožňují rozvinout známé funkce (exponenciální, trigonometrické apod.) do mocninných řad. Částečné součty těchto rozvojů jsou užitečnou náhražkou původních funkcí a umožňují např. při tvorbě programů jejich jednoduché zakomponování do výpočtových algoritmů. Užitečnou pomůckou při rozkladech funkcí do mocninných řad je vhodné programové vybavení na kterém lze ilustrovát příslušné příkazy pro rozvoj funkcí do řad.

8.16 Kontrolní příklady ke kapitole 8

1. Rozhodněte o konvergenci následujících řad
   (a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$
   (b) $1 + \frac{|\sin 2|}{3} + \frac{|\sin 4|}{9} + \frac{|\sin 8|}{27} + \ldots$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$
   (e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \ln(\ln(n))$
2. Určete interval konvergence řady:
   (a) $x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \cdots + n^k x^n + \ldots, \; k > 0$
   (b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$
3. Najděte Taylorův vzorec v bodě x_0 daných funkcí.
   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, \; x_0 = 0$
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 12, \; x_0 = 1$
   (c) $f(x) = \sin(2x), \; x_0 = 0$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.8.

Kapitola 9

Integrální počet funkcí jedné proměnné (část 1)

9.1 Cíl kapitoly

Integrace je inverzní operací k operaci derivování. Cílem této části je zvládnutí základních iteračních technik. Nejprve je pomocí primitivní funkce vysvětlen pojem tzv. neurčitého integrálu. Podobně jako jsme u derivací v Kapitole 6 hovořili o základních vlastnostech derivací a uvedli jsme též tabulku derivací některých základních funkcí, uvedeme i u integrálů jejich základní vlastnosti a tabulku základních integrálů, t.j. tabulku integrálů elementárních funkcí. Tato tabulka je vlastně jakousi opačnou tabulkou k tabulce derivací.

Tabulkové integrály zahrnují velmi uzkou třídu funkcí, které umíme integrovat. Proto se seznámíme se základními integračními metodami. Jde o metodu per partes, která vychází z věty o derivaci součinu, a o substituční metodu. Obě metody se velmi často používají při výpočtu integrálů. Nejde ale o jediné možné integrační postupy. Vždy velmi závisí na konkrétním tvaru podintegrální funkce. Podle toho je třeba volit metodu integrace. Proto v další Kapitole 10 uvádíme také i některá doporučení jak u konkrétních tvarů funkcí při integraci postupovat.

Problém integrace dané funkce, tj. problém najít k dané funkci odpovídající primitivní funkci není problémem zdaleka triviálním. Potíž je v tom, že neurčitými integrály jsou často vyjadřovány funkce, které nejsou ani elementární, ani nejsou zadány pomocí tabulek. Proto je úloha o nalezení primitivní funkce úlohou obtížnější než úloha nalézt derivaci dané funkce.

9.2 Primitivní funkce (antiderivace) a neurčitý integrál

Definice 9.1 *Primitivní funkce (antiderivace) dané funkce $f(x)$ na daném intervalu je libovolná diferencovatelná funkce $F(x)$, jejíž derivací je daná funkce, tedy jestliže platí:*

$$F'(x) = f(x).$$

Věta 9.2 *Jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, pak $F(x)+C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je k této funkci také primitivní.*

Definice 9.3 *Soubor všech primitivních funkcí dané funkce $f(x)$ se nazývá* **neurčitý integrál** *$f(x)$ a označuje se symbolem*

$$\int f(x)dx,$$

tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Poznámka 9.4 *Dá se ukázat, že neurčitý integrál funkce, která je na daném intervalu spojitá nebo zde má konečný počet nespojitostí prvního druhu, na tomto intervalu existuje. Funkci $f(x)$ ve výrazu $\int f(x)dx$ nazýváme integrand. Symboly integrace, tj. symbol $\int$ a symbol dx chápeme jako jeden symbol, neboť se vždy vyskytují společně, tedy $\int\ dx$.*

9.3 Základní tabulka integrálů

Uveďme nyní některé základní integrály. Poznamenejme, že touto tabulkou nejsou zdaleka vyčerpány všechny funkce, ke kterým umíme primitivní funkce najít. Existují celé knihy obsahující tabulky integrálů a programy výrazně ulehčující hledání primitivních funkcí.

$$\int 0dx = C, \tag{9.3.1}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \tag{9.3.2}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, \tag{9.3.3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{9.3.4}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{9.3.5}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \tag{9.3.6}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \tag{9.3.7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C, \tag{9.3.8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \tag{9.3.9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \tag{9.3.10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C, \end{cases} \tag{9.3.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C, \tag{9.3.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \operatorname{arcsinh} x + C, \tag{9.3.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \operatorname{arccosh} x + C, \tag{9.3.14}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, \\ \operatorname{arctgh} x + C,\ |x| < 1 \\ \operatorname{arccotgh} x + C,\ |x| > 1, \end{cases} \tag{9.3.15}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \tag{9.3.16}$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C, \tag{9.3.17}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \operatorname{tgh} x + C, \tag{9.3.18}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\, dx = -\operatorname{cotgh} x + C. \tag{9.3.19}$$

9.4 Některé vlastnosti integrálů

Platnost několika následujících vztahů lze prověřit přímo užitím vlastností derivace a neurčitého integrálu. Tyto vztahy jsou při výpočtech často používány.

$$\int df(x) = f(x) + C, \tag{9.4.20}$$

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx, \tag{9.4.21}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \tag{9.4.22}$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \tag{9.4.23}$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \tag{9.4.24}$$

Poznámka 9.5 *Ne ke každé dané spojité funkci umíme najít neurčitý integrál jako nějakou konkrétní funkci a to přesto, že dle Poznámky 9.4 tento integrál existuje. Například neumíme vyjádřit pomocí elementárních funkcí integrály* $\int e^{\pm x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$.

9.5 Substituční integrační metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 9.6 *Jestliže*

$$\int f(u)du = F(u) + C \tag{9.5.25}$$

a $u = \varphi(x) \in C^1$, *pak*

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C. \tag{9.5.26}$$

Základem úspěchu při aplikacích Věty 9.6 je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schematicky veden od vzorce (9.5.26) ke vzorci (9.5.25).

Příklad 9.7 *Najděte pomocí substituční metody integrál*

$$\int e^{x^2} \cdot x\, dx$$

Řešení.

$$\int e^{x^2} \cdot x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Jednoduchou aplikací Věty 9.6 lze odvodit následující větu:

Věta 9.8 *Jestliže $\varphi(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Následující dva vztahy jsou speciálními případy Věty 9.6, jestliže po řadě pokládáme

$$f(u) = \frac{1}{u} \quad \text{a} \quad f(u) = u^\alpha :$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C,$$

$$\int \varphi'(x)\varphi^\alpha(x)\,dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$$

9.6 Integrace po částech (per partes)

Ze vztahu pro nalezení diferenciálu $d(uv) = u\,dv + v\,du$, tj. $u\,dv = d(uv) - v\,du$ vyplývá *vzorec pro metodu integrace per partes:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{9.6.27}$$

Název metody skutečně vystihuje velmi přesně její podstatu. Část původního integrálu se užitím vzorce (9.6.27) zintegrovala, zbývající část na integraci čeká. Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenost pro výběr funkcí u a v. Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím máme na mysli dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int v\,du$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 9.9 *Vypočtěme integrál*

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx$$

metodou per partes.

Řešení. Položme $u = x$ a $v = e^x$. Potom

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x dx, v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

9.7 Shrnutí

Uvedli jsme si pojem integrálu a ukázali jeho základní vlastnosti včetně zakladních, elementárních, tabulkových intregrálů. Jde o integrály stejných funkcí, které jsme si uváděli při derivacích, kde jsme měli prakticky stejné vzorce jen jejich pořadí při použití bylo opačné. Je třeba si jen uvědomit, že derivace integrálu je identitou. Tím dostáváme i souvisloti mezi derivováním a integrováním. Jde o navzájem inverzní operace. Probrali jsme dvě nejčastěji používané metody integrace. Použitím vhodného počítačového vybavení můžeme získat některé typy integrálů. Vždy záleží na typu podintegrální funkce a na použitém programu, zda výsledek bude použitelný.

9.8 Kontrolní příklady ke kapitole 9

1. Určete integrál na základě znalostí o derivacích funkcí.
   (a) $\int x dx$
   (b) $\int x^5 dx$
   (c) $\int (\cos x - \sin x) dx$
   (d) $\int (\sqrt{x} - \sin 2x) dx$
2. Integrujte:
   (a) $\int (x+1)^7 dx$
   (b) $\int (x-6)^{1/5} dx$
   (c) $\int (3x+1)^{4/5} dx$
   (d) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx$
   (e) $\int \sin x \cos^2 x dx$
   (f) $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$
3. Integrujte metodou per partes:
   (a) $\int x \sin x dx$
   (b) $\int x \cos x dx$
   (c) $\int x e^{2x} dx$
   (d) $\int x \ln (x+1) dx$
   (e) $\int \cos ax \cos bx dx$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.9.

Kapitola 10

Integrální počet funkcí jedné proměnné (část 2)

10.1 Cíl kapitoly

V předchozí Kapitole 9 byly vyloženy dvě základní integrační metody. S jejich pomocí budeme nyní integrovat některé typy funcí. Nejprve se budeme zabývat integrací racionálních funkcí. Jde o funkce, které se často vyskytují v aplikacích. Při jejich integraci využijeme i rozkladu na parciální zlomky, o kterém jsme mluvili v první kapitole. Jde také o třídu funkcí, které umíme integrovat až do konce, tj. umíme najít výsledek ve tvaru konkrétních funkcí.

Dalším typem často se vyskytujících funkcí jsou některé iracionální funkce a trigonometrické funkce. V tomto případě dáme některá doporučení jak při jejich integrování postupovat.

10.2 Integrace podílu dvou mnohočlenů (racionální lomené funkce)

Každá racionální lomená funkce je tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy. Z vět 2.28, str. 34 a 2.29, str. 34 vyplývá, že podíl dvou polynomů lze vždy vyjádřit jako součet polynomu a čtyř typů parciálních zlomků. Vzhledem k tomu, ža integrace polynomu je jednoduchou záležitostí, bude úloha o integraci podílu dvou polynomů vyřešena, budeme-li schopni najít integrál každého z těchto čtyř typů parciálních zlomků.

I. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_1(x) = \frac{A}{x-a}, \quad \text{kde } A \neq 0.$$

Integrace tohoto zlomku je jednoduchá. Ihned dostáváme:

$$\int Z_1(x)\,dx = A \ln|x-a| + C.$$

II. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}\ , \text{ kde } A \neq 0 \text{ a } n > 1.$$

Integrace:

$$\int Z_2(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x-a, \\ dt = dx \end{array}\right] = A\int \frac{1}{t^n}\,dt = = \frac{At^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

III. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_3(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ , \text{ kde } M \neq 0\ , p^2-4q < 0.$$

Postup integrace je následující:

$$\int Z_3(x)\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \left[A = N - \frac{Mp}{2}\right] =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)}\,dx + A\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$$

$$= \left[B = q - \frac{p^2}{4}\right] = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{A}{B}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2 + 1}\,dx.$$

V posledním integrálu zavedeme substituci

$$t = \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}}$$

a tedy

$$\frac{A}{B} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{A}{B}\sqrt{B} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{B}} + C.$$

IV. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_4(x) = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\ , \ M \neq 0,\ \ p^2 - 4q < 0,\ \ n > 1.$$

Pro integrování tohoto zlomku se používá tzv. *rekurentní formule*, jejíž platnost lze ověřit přímým derivovaním:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx.$$

Tedy

$$\int Z_4(x)\, dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\, dx + \int \frac{N - \dfrac{Mp}{2}}{\left[\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{2}\right]^n}\, dx.$$

První integrál vypočteme jako integrál typu

$$\frac{M}{2} \int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\, dx,$$

kde $f(x) = x^2 + px + q$. Druhý integrál, ve kterém je $q - \dfrac{p^2}{2} > 0$, vypočteme postupně užitím rekurentní formule po substituci $x + \dfrac{p}{2} = t$. Nakonec po $(n-1)-$násobném použití přecházíme k integraci zlomku typu $Z_3(x)$.

Příklad 10.1 *Určete integrál*

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Řešení. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) dx =$$

$$-\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$$

Příklad 10.2 *Určete integrál*

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$$

Řešení. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}\right) dx =$$

$$3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C.$$

Příklad 10.3 *Určete integrál*

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$$

Řešení. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} + \frac{5}{32(x+3)}\right) dx =$$

$$-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

Příklad 10.4 *Určete integrál*

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2}dx.$$

Řešení. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{1}{x^5-x^2}dx = \int \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{x^2+x+1}\right) dx =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Příklad 10.5 *Určete integrál*

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx.$$

Řešení. Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-3x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{((x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$$

Daný integrál je možné určit i pomocí substituce $x^2+1=t$.

10.3 Integrace některých iracionálních funkcí

Zde uvedeme seznam některých užitečných doporučení pro výpočet integrálů některých iracionálních funkcí. Racionální funkci označujeme $R(\cdot)$ a definujeme ji jako funkci, kterou obdržíme z jejích argumentů operacemi sčítání, odečítání, násobení a dělení.

A) V případě integrálů tvaru

$$\int R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}}\right) dx,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ je vhodné zavést substituci $x = t^\alpha$, kde α je nejnižší společný násobek celých čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Tím integrál převedeme na některý z případů popsaných v části 10.2.

B) V případě integrálů tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_2 \in \mathbb{N}$ je vhodné zavést substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, kde α je nejmenší společný násobek čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Tím integrál opět převedeme na některý z případů popsaných v části 10.2.

C) Binomickým integrálem nazýváme integrál tvaru

$$\int x^m (ax^n+b)^p\, dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Doporučujeme postupovat následovně:

- Je-li $p \in \mathbb{Z}$, pak používáme stejná doporučení jako v **A)**.

- Je-li $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $ax^n + b = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p. Dále používáme postup popsaný v **A)**.
- Je-li $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $a + \dfrac{b}{x^n} = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p. Dále používáme postup popsaný v **A)**.

D)

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx, \;\; a \neq 0.$$

Používáme tzv. *Eulerovy substituce:*

- Je-li $a > 0$, užíváme substituci
$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}\,.$$
- Je-li $c > 0$, užíváme substituci
$$t \cdot x = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}\,.$$
- Je-li $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, pak
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha|\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$
a užijeme substituci
$$t^2 = a \cdot \frac{x-\beta}{x-\alpha}\;.$$

E) Pro integrál typu

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

lze použít následující postup:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}}\, dx\;.$$

Tento integrál lze převést na některý z tabelovaných integrálů:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\, dx, \;\; \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

F) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\, dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a\sin t, \;\; x = a\cos t.$$

G) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\, dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a\mathrm{tg}\, t,\ \ x = a \sinh t,\ \ x = \mathrm{cotg}\, t.$$

H) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\, dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = \frac{a}{\cos t}\ \ ,\ \ x = a \sin t,\ \ x = \cosh t.$$

10.4 Integrace trigonometrických funkcí

Budeme se zabývat integrováním funkcí typu

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx\ ,$$

kde R je racionální funkcí uvedených argumentů. Uveďme několik doporučení, jak při integraci postupovat.

A) Lze užít tzv. *univerzální substituci:*

$$t = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}\ \ .$$

Pak

$$x = 2\mathrm{arctg}\, t,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

a

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ \ .$$

Odtud plyne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \ .$$

Analogicky vypočteme

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}\ \ .$$

Těmito substitucemi (dosazenými za dx, $\sin x$ a $\cos x$) převedeme výchozí integrál na integraci podílu dvou mnohočlenů.

B) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem ke $\cos x$, tj. je-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \sin x.$$

C) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k $\sin x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \cos x.$$

D) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k funkcím $\sin x$ i $\cos x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Pak

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad ,$$

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad .$$

Příklad 10.6 *Určete integrál*

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$$

Řešení. Podintegrální funkce je racionální funkcí sinu a cosinu. Použijeme univerzální substituci $\tan \frac{x}{2} = t$. Potom

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = 2\int \frac{dt}{2(t^2+4t+4)} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Dosazením původní hodnoty dostaneme

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 2} + C.$$

Příklad 10.7 *Najděte integrál*

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x}.$$

Řešení. Použijeme substituci $t=\tan(x/2)$.

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} - \frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{(at)^2+b^2} =$$

$$\frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}+C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\cdot\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

Příklad 10.8 *Najděte integrál*

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)dx}{\sin^2 x+\sin^4 x}.$$

Řešení. Protože podintegrální funkce je lichá vzhledem ke $\cos x$, použijeme doporučenou substituci $t=\sin x$. Potom $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-t^2,\ \cos x dx = dt$.

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)dx}{\sin^2 x+\sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x+\sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} =$$

$$\int \left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt = t-\frac{2}{t}-6\arctan t+C.$$

Po dosazení původní proměnné dostaneme

$$\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)dx}{\sin^2 x+\sin^4 x} = \sin x-\frac{2}{\sin x}-6\arctan(\sin x)+C.$$

Příklad 10.9 *Určete integrál*

$$\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}$$

Řešení. Protože podintegrální funkce je lichá vzhledem k funkci $\sin x$, použijeme substituci $\cos x = t$. Potom

$$\sin^2 x = 1-t^2, \cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1 = 2t^2-1, dt = -\sin x dx.$$

Dosadíme a dostaneme

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$\frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2}}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C$$

Dosazením původní proměnné dostaneme konečný výsledek

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

Příklad 10.10 *Určete integrál*

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}.$$

Řešení. Protože podintegální funkce je sudá vzhledem k sinu i kosinu, použijeme substituci $\tan x = t$. Potom

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \operatorname{arctan} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Dosadíme

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Dosazením původní proměnné dostaneme konečný výsledek

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan x + 1 - \sqrt{2}}{\tan x + 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

10.5 Shrnutí

Seznámili jsme se s nejčastěji používanými metodami integrace funkcí, které nepatří mezi tabulkové. Jejich vhodné použití bude záviset vždy na tvaru podintegrální funkce a na zkušenostech, které získáme. Podle tvaru podintegrální funkce můžeme odhadnout, která metoda bude nejvhodnější. Správné rozhodnutí předpokládá, že máme dostatečnou praxi a jsme schopni odhadnout směr dalších úprav a postup práce.

Někdy nam tvar podintegrální funkce přímo napoví, kterou metodu je vhodné použít, např. při integraci racionálních výrazů. Častěji se však budeme setkávat s případy, kdy rozhodnutí bude záviset na nás a na našich zkušenostech. Potřebné zkušenosti je možno získat pouze při praktickém využívání teoretických poznatků uvedených v této kapitole. Jinými slovy, je třeba vypočítat dostatečný počet příkladů.

10.6 Kontrolní příklady ke kapitole 10

1. Integrujte.
   (a) $\int 2^{-x} dx$
   (b) $\int 10^{5x} dx$
   (c) $\int 2^{\cos x} \sin x dx$
   (d) $\int \sin^2 x dx$
   (e) $\int \cos^3 x dx$
   (f) $\int \cos^2 4x \sin^2 4x dx$
   (g) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$
   (h) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} dx$
2. Pomocí některé goniometrické substituce integrujte .
   (a) $\int \sqrt{1-x^2} dx$
   (b) $\int (a^2-x^2)^{-5/2} dx$
   (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
   (d) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2-a^2)^3}$
   (e) $\int \sqrt{a^2x^2+1} dx$
3. Integrujte následující racionální lomené funkce
   (a) $\int \frac{2x-1}{x^2-1} dx$
   (b) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+1} dx$
   (c) $\int \frac{x^4+x^3+2x^2+x+2}{(x^2+1)^3} dx$
   (d) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.10.

Kapitola 11

Integrální počet funkcí jedné proměnné (část 3)

11.1 Cíl kapitoly

V této kapitole je podán zjednodušený výklad určitého (Riemannova) integrálu a některé jeho vybrané vlastnosti.

Vyjdeme z praktického příkladu výpočtu plochy, které je ohraničena nějakou křivkou. Ukážeme, že tato plocha je hodnotou limity některého výrazu, který hledanou plochu přibližně aproximuje. Od tohoto příkladu je již přímá cesta k pojmu určitého integrálu. Po jeho definici uvedeme jeho základní vlastnosti. Seznámíme se s způsobem odhadu určitého integrálu a také jak je možné derivovat integrál, pokud je horní mez proměnná. Uvedeme si nejdůležitější vzorec integrálního počtu, známý jako Newton-Leibnizova věta (viz 11.7), který budeme používat pro výpočet určitého integrálu.

Ukážeme, jaký tvar bude mít substituční metoda pro určité integrály a jak se používá metoda "per partes" pro výpočet určitého integrálu.

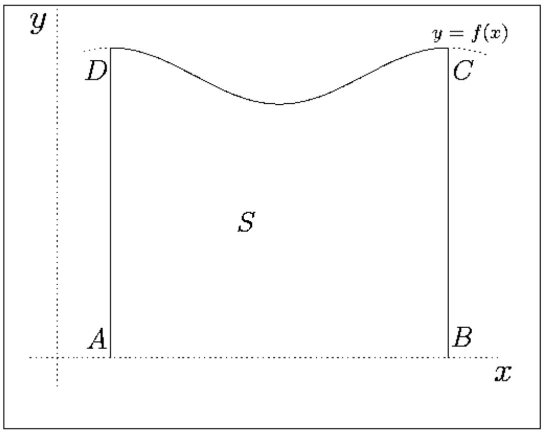
V praxi, zvláště technické, se často vyskytují příklady funkcí, které lze jen obtížně integrovat ale přesto potřebujeme znát hodnotu určitého integrálu. Proto uvedeme i některé metody numerické integrace funkcí.

11.2 Výpočet plochy obrazce omezeného křivkou

Zabývejme se úlohou, jak vypočítat plochu P_S obrazce S na obrázku 11.2.1 ohraničeného úsečkami spojujícími body AB, BC, AD a částí spojité křivky $y = f(x)$ spojující body C a D.
Rozdělme libovolně základnu obrazce S (tj. interval $[a, b]$ užitím libovolného konečného počtu dělících bodů) na n subintervalů

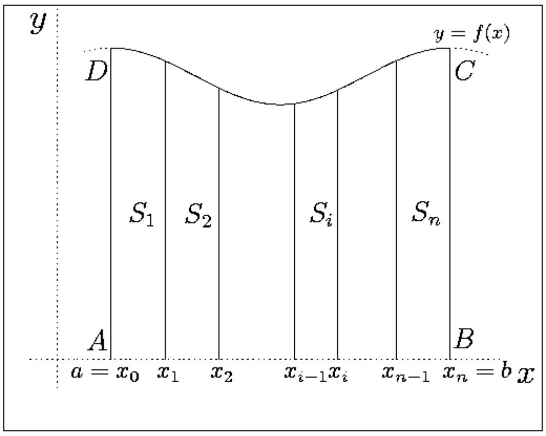
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Veďme přímky rovnoběžné s osou y dělicími body intervalu $[a, b]$. Tím se daný obrazec S rozdělil na n obrazců S_1, S_2, $\ldots S_n$,



Obrázek 11.2.1: Určitý integrál - plocha obrazce 1

tj. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ (viz. obrázek 11.2.2).



Obrázek 11.2.2: Určitý integrál - plocha obrazce 2

V každém subintervalu vybereme libovolným způsobem bod. Označíme-li tyto body $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, můžeme psát

$$x_0 \le \xi_0 \le x_1, \quad x_1 \le \xi_1 \le x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} \le \xi_{n-1} \le x_n.$$

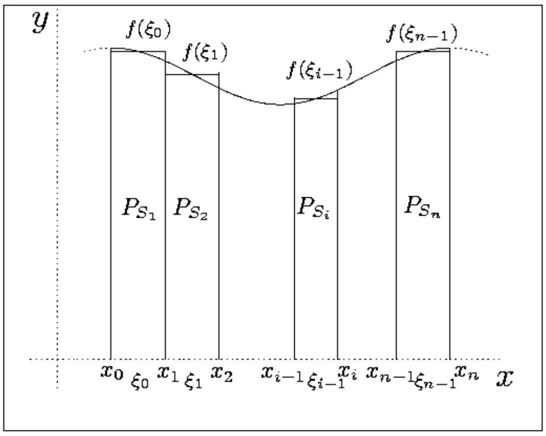
Pak platí, že plocha P_S je rovna součtu ploch P_{S_i} jednotlivých oblastí S_i , $i = 1, \ldots, n$. Plochu P_{S_i} můžeme přibližně vyjádřit vztahem

$$P_{S_i} \approx f(\xi_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_{i-1}) \cdot \Delta x_{i-1},$$

kde $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$. Proto

$$P_S = \sum_{i=0}^{n-1} P_{S_i} \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Situace je načrtnuta na obrázku 11.2.3.



Obrázek 11.2.3: Určitý integrál - plocha obrazce 3

Pokud zvětšujeme do nekonečna počet dělících bodů a tzv. norma dělení, tj. číslo

$$\Delta = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$$

přitom konverguje k nule, pak je plocha obrazce S určena vztahem

$$P_S = \lim_{n\to\infty,\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{11.2.1}$$

(ve kterém předpokládáme, že limita existuje).

11.3 Určitý integrál

Definujeme pro danou funkci $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ tzv. n-tý integrální součet:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kde veličiny ξ_i, x_i, a Δx_i mají stejný význam jako v předchozím odstavci a $x_0 = a$, $x_n = b$.

Definice 11.1 *Určitý integrál (tzv. Riemannův) na $[a, b]$ je limita integrálních součtů I_n, když $n \to \infty$ a norma dělení Δ se přitom blíží nule (za předpokladu, že tato limita existuje).*

Určitý integrál značíme $\int_a^b f(x)dx$ a uvedenou definici píšeme takto:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty,\Delta\to 0} I_n. \tag{11.3.2}$$

Geometrický význam určitého integrálu je nyní zřejmý z předcházející podkapitoly 11.2, protože limity (11.2.1) a (11.3.2) jsou stejné.

Věta 11.2 (O existenci určitého integrálu) *: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak $\int_a^b f(x)dx$ existuje.*

Ukončeme tuto část konstatováním, že se vžil název *integrovatelná funkce* pro funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $[a, b]$ takovou, že existuje integrál $\int_a^b f(x)dx$. Integrál může existovat nejenom pro spojité funkce a nejenom na uzavřeném intervalu. Některé poznatky o těchto případech uvádíme v Kapitole 12.

11.4 Vlastnosti určitého integrálu

Z definice určitého integrálu lze odvodit řadu jeho vlastností. Platí například (všechny použité funkce budeme považovat za integrovatelné):

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{11.4.3}$$

$$\int_a^b dx = b - a, \tag{11.4.4}$$

$$\int_a^b 0\,dx = 0, \tag{11.4.5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{11.4.6}$$

je-li $c \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{11.4.7}$$

(interval integrace $[a, b]$ lze rozdělit na dvě části),

$$\forall k \in \mathbb{R} : \quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{11.4.8}$$

(konstantu lze vytknout před integrál),
je-li $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.4.9}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \text{kde } a < b, \tag{11.4.10}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt, \tag{11.4.11}$$

(vnitřní proměnná v určitém integrálu může být označena libovolně)

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.4.12}$$

je-li $S(x)$ funkce sudá a $L(x)$ funkce lichá, pak

$$\text{a)} \int_{-a}^a S(x)\,dx = 2\int_0^a S(x)\,dx; \quad \text{b)} \int_{-a}^a L(x)\,dx = 0. \tag{11.4.13}$$

11.5 Odhad určitého integrálu. Věta o střední hodnotě.

Věta 11.3 *Je-li na $[a,b]$ funkce $f(x)$ integrovatelná a ohraničená zdola a zhora konstantami m, M, tj. $m \le f(x) \le M$ na $[a,b]$, pak*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

nebo

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Následující věta je často nazývána větou o střední hodnotě.

Věta 11.4 (Věta o střední hodnotě) *Je-li $f(x) \in C$ ne $[a,b]$, pak existuje bod $\xi \in [a,b]$ takový, že platí:*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

11.6 Derivace integrálu vzhledem k horní mezi

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá. Definujeme novou funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jako určitý integrál s proměnnou horní mezí. (Diskuse o označení: Je-li $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, pak x probíhá hodnoty od a do x, což nedává smysl.) Snadno lze dokázat následující výsledek, který říká, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Věta 11.5 *Derivace integrálu vzhledem k horní mezi je rovna integrandu, tj.*

$$F'(x) = f(x).$$

Důsledek 11.6 *Ke každé spojité funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce.*

11.7 Newton-Leibnizova věta (Základní vzorec integrálního počtu)

Věta 11.7 *Hodnota určitého integrálu je rovna rozdílu hodnot libovolné antiderivace* $\Phi(x)$ *integrandu odpovídajících horní a dolní mezi integrálu:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{11.7.14}$$

Příklad 11.8 *Najděte* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Řešení. Řešení: Protože pro $x > 0$ je

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

dosadíme ve vzorci (11.7.14) $\Phi(x) = \ln x$. Pak platí:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln |x||_1^2 = \ln 2.$$

11.8 Integrace per partes pro učité integrály

Napíšeme-li vztah pro integraci per partes pro neurčité integrály a provedeme-li v něm integraci obou stran na intervalu $[a, b]$, potom obdržíme vztah metody integrace per partes pro učité integrály:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

11.9 Metoda substituce pro určité integrály

Věta 11.9 *Nechť je funkce* $f(x)$ *spojitá na* $[a, b]$. *Je-li* $\varphi(t)$ *spojitě diferencovatelná na* $[\alpha, \beta], a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a, b]$ *pro každé* $t \in [\alpha, \beta]$ *a* $\varphi(t)$ *je monotónní, pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Příklad 11.10 *Najděte integrál*

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Řešení. Použijeme substituční metodu:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[x = e^t,\ t \in [0, 1]\right] = \int_0^1 \frac{t}{e^t} e^t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

11.10 Numerické integrování

11.10.1 Úvod

V praxi zřídkakdy dokážeme najít přesnou hodnotu určitého integrálu. Například integrál

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V následujícím odstavci popíšeme některé metody pro přibližný numerický výpočet určitých integrálů. Zavedeme pojem *kvadratického vzorce.* Necht' je dán určitý integrál

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

funkce f, která je spojitá na intervalu $[a, b]$. Přibližná rovnost

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot f(x_j),$$

kde q_j jsou jistá čísla a x_j jsou určité body intervalu $[a, b]$ (které jsou voleny tak, aby bylo přibližné rovnosti docíleno), se nazývá *kvadratická formule* definovaná *váhami* q_j a *uzly* x_j.

11.10.2 Obdélníkové pravidlo

Předpokládejme, že $f \in C^2[-h/2, h/2]$, $h > 0$. Lze očekávat, že bude platit přibližný vztah

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \approx h \cdot f_0, \tag{11.10.15}$$

kde $f_0 = f(0)$ (viz náčrtek 11.10.4). Přibližný vztah 11.10.15 říká, že plochu oblasti ohraničené shora grafem funkce f lze aproximovat plochou vepsaného obdélníka, jehož výška je rovna hodnotě funkce f v polovině základny lichoběžníka. Dále hledáme zbytek, tedy chybu formule (11.10.15). Lze dokázat tzv. *obdélníkové pravidlo se zbytkem:*

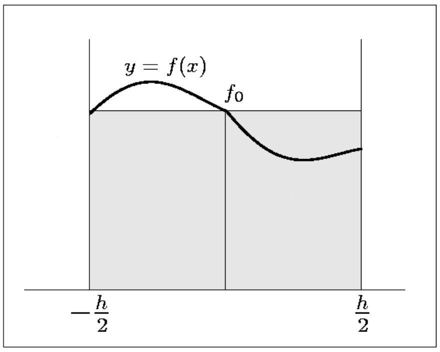
$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi)\ ,$$

kde o poloze bodu ξ lze říci pouze, že to je nějaký bod z intervalu $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, tj. $\xi \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$.

11.10.3 Lichoběžníkové pravidlo

Necht' $f \in C^2[0, h]$. Položíme

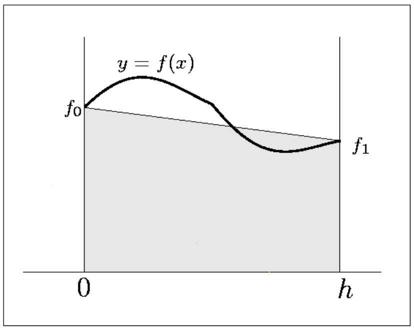
$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}\ ,$$



Obrázek 11.10.4: Obdélníkové pravidlo

kde $f_0 = f(0)$ a $f_1 = f(h)$, tj. integrál je přibližně nahrazen plochou vepsaného lichoběžníka (viz náčrtek 11.10.5). Tzv. *lichoběžníkové pravidlo se zbytkem* má tvar

$$\int_0^h f(x)\,dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [0, h].$$



Obrázek 11.10.5: Lichoběžníkové pravidlo

11.10.4 Simpsonovo pravidlo (parabolické pravidlo)

Předpokládejme, že $f \in C^4[-h, h]$. Aproximujeme integrál

$$\int_{-h}^h f(x)\,dx$$

plochou obrazce ohraničeného shora parabolou procházející body $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1), kde $f_i = f(ih)$ (viz náčrtek 11.10.6). Tato parabola má rovnici

$$y = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2,$$

což lze lehce ověřit, položíme-li x rovno $-h$, 0 a h. Tak snadno spočteme, že

$$\int_{-h}^{h} y(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot(f_{-1}+4f_0+f_1).$$

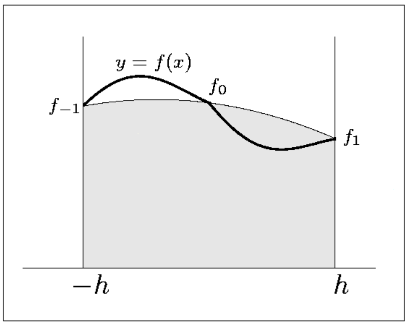
Tedy tzv. *Simpsonovo pravidlo*, které se také nazývá *parabolické pravidlo*, má tvar

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot(f_{-1}+4f_0+f_1).$$

Lze dokázat tzv. *Simpsonovo pravidlo se zbytkem:*

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot(f_{-1}+4f_0+f_1) - \frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(\xi),$$

kde $\xi \in [-h,h]$. Výše uvedené kvadratické vzorce se nazývají *kanonické.*



Obrázek 11.10.6: Simpsonovo pravidlo

11.10.5 Složené kvadratické formule

Je-li v praxi třeba určit přibližnou hodnotu integrálu, je daný interval $[a,b]$ rozdělen na N shodných subintervalů. Na každý z nich aplikujeme kanonickou kvadratickou formuli (tím míníme obdelníkové, lichoběžníkové nabo parabolické pravidlo) a výsledky sečteme. Kvadratické formule zkonstruované takto na intervalu $[a,b]$ se nazývají *složené.* Aplikujeme-li obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo, je pohodlné brát intervaly délky h, v případě Simpsonova pravidla délky $2h$.

Podívejme se podrobněji na použití obdélníkového pravidla. Nechť $f \in C^2$. Označíme intervaly $[x_i, x_{i+1}]$, kde $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\dots,N-1$, $x_N = b$, $h = (b-a)/N$. Ve shodě s obdélníkovým pravidlem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx hf_{i+1/2}, \tag{11.10.16}$$

kde $f_{i+1/2} = f(a + (i + 1/2)h)$ je hodnota f ve středu subintervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Navíc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je nějaký bod. Sečteme-li všechny aproximace (11.10.16) dostáváme *složené obdélníkové pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{N-1/2}\right).$$

Lze dokázat tzv. *složené obdélníkové pravidlo se zbytkem:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{N-1/2}\right) + h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi),$$

kde $\xi \in [a, b]$.
Za podmínky, že $f \in C^2[a, b]$, můžeme zapsat *složené lichoběžníkové pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

a odpovídající *složené lichoběžníkové pravidlo se zbytkem:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right) - h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\xi),$$

kde $f_i = f(a + ih)$, $h = (b - a)/N$, a $\xi \in [a, b]$.

Nechť nyní $h = (b - a)/2N$ a $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Simpsonovo kanonické pravidlo můžeme přepsat ve spojení se subintervaly $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ délky $2h$:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right).$$

Sečtením obou stran vztahu přes i od 0 do $N-1$ dostáváme *složené Simpsonovo pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right).$$

Odpovídající *složené Simpsonovo pravidlo se zbytkem,* které získáme sečtením rovností v subintervalech $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ za podmínky, že $f \in C^4$, lze zapsat takto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right) - h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(\xi),$$

kde $f_i = f(a + ih)$, $h = (b - a)/(2N)$, a $\xi \in [a, b]$.

11.10.6 Odhad chyb kvadratických formulí

Pro stručnost zavedeme označení

$$I_h^{\mathrm{obd}} = h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f_{i+1/2},$$

je-li integrál přibližně počítán složeným obdélníkovým pravidlem,

$$I_h^{\mathrm{lich}} = h \cdot \left(\frac{f_0 + f_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i \right),$$

kde $h = (b-a)/N$ a $f_\mu = f(a + \mu h)$, je-li integrál přibližně počítán složeným lichoběžníkovým pravidlem, a

$$I_h^{\mathrm{Simp}} = \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2N} + 4 \sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f_{2i} \right),$$

kde $h = (b-a)/(2N)$ a $f_i = f(a + ih)$, je-li integrál přibližně počítán složeným Simpsonovým pravidlem.

Z vyjádření zbytků vidíme, že obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo jsou přesné pro polynomy prvního stupně, zatímco Simpsonovo pravidlo je přesné pro polynomy třetího stupně. První dvě pravidla mají přesnost druhého řádu vzhledem k h, zatímco Simpsonovo pravidlo má přesnost čtvrtého řádu. Proto pro funkce třídy C^4 pro malá h dává Simpsonovo pravidlo zpravidla vyšší přesnost než předešlé dvě metody.

Chyba složeného obdélníkového pravidla a složeného Simpsonova pravidla splňuje nerovnosti

$$|I - I_h^{\mathrm{obd}}| \leq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|,$$

$$|I - I_h^{\mathrm{Simp}}| \leq h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Podobné nerovnosti existují pro lichoběžníkové pravidlo. Dolní odhady jsou také užitečné. Především dolní odhad pro složené obdélníkové pravidlo je

$$|I - I_h^{\mathrm{obd}}| \geq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \min_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Příklad 11.11 *Analyzujme chyby kvadratických formulí pro integrál*

$$I = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx,$$

který nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, ale v aplikacích se často využívá.

Řešení. Máme

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \;\; f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}, \;\; f''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2},$$

$$f'''(x) = (-8x^3 + 12x)\mathrm{e}^{-x^2}, \;\; f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)\mathrm{e}^{-x^2},$$

a

$$\mathrm{e}^{-1/4} \leq |f''(x)| \leq 2, \;\; |f^{(4)}(x)| \leq 12$$

pro $x \in [0, 1/2]$.

Tedy pro $h = 0.05$ dostáváme

$$0.4 \cdot 10^{-4} \leq |I - I_h^{\text{obd}}| \leq 0.11 \cdot 10^{-3}$$

a

$$|I - I_h^{\text{Simp}}| \leq 0.21 \cdot 10^{-6}.$$

Horní odhad chyby Simpsonova pravidla je výrazně nižší než dolní odhad chyby obdélníkového pravidla.

11.11 Shrnutí

Seznámili jsme se s dalším důležitým matematickým aparátem - s určitým integrálem. Jeho použití je velmi rozmanité a některé aplikace uvedeme v další Kapitole 12. Nejdůležitějším v této části byl samotný pojem určitého integrálu a hned poté Newtovona-Leibnizova věta, která vyjadřuje určitý integrál pomocí primitivní funkce a krajních bodů.

Numerické metody integrace používáme všude tam, kde nejsme schopni efektivně určit analytický tvar integrálu. Při splnění uvedených podmínek získáme dostatečně přesnou aproximaci výsledku. Obecně platí, že přesnější je složené Simpsonovo pravidlo.

11.12 Kontrolní příklady ke kapitole 11

1. Vyčíslete následující určité integrály:

   (a) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$

   (c) $\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$

   (d) $\int_{-2}^0 x^3\mathrm{d}x$

2. Vypočtěte následující integrály. Nakreslete obrazce, jejichž obsahy danými integrály počítáte.

   (a) $\int_1^4 (x + 2)\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^{2} |x-1| \mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$

3. Pro dané integrály najděte hodnotu z, pro niž platí: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(z)(b-a)$. (Poznámka: Je-li $f(x)$ spojitá, pak vhodné z existuje.)

   (a) $\int_{1}^{3} (x+1) \mathrm{d}x$

   (b) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$

4. Integrujte pomocí substituce:

   (a) $\int_{-1}^{1} (x+3)^4 \mathrm{d}x$

   (b) $\int_{0}^{3} (x-2)^{4/3} \mathrm{d}x$

   (c) $\int_{-2}^{2} (4-x)^{1/3} \mathrm{d}x$

   (d) $\int_{3}^{4} 4x\sqrt{x^2-9} \mathrm{d}x$

   (e) $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{x^3+1} \mathrm{d}x$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.11.

Kapitola 12

Integrální počet funkcí jedné proměnné (část 4)

12.1 Cíl kapitoly

Prvním cílem této kapitoly je ukázat co to jsou tzv. nevlastní integrály a jaké máme možnosti jejich výpočtu. Půjde pouze o první seznámení s touto problematikou. Přitom budeme rozlišovat mezi dvěma skupinami integrálů. Za prvé půjde o integrály funkce na nekonečném intervalu a za druhé o integrály z funkcí, která nabývá v některém bodě nekonečné hodnoty.

Dále uvedeme některé aplikace určitého integrálu, jako je výpočet obsahu rovinného obrazce, určení délky oblouku křivky, výpočet objemu tělesa a speciálně výpočet objemu rotačního tělesa a výpočet obsahu rotační plochy.

12.2 Nevlastní integrály

V této části se budeme věnovat dvěma typům určitých integrálů. Budou to jednak integrály, ve kterých jedna nebo obě meze jsou nekonečné a jednak integrály, ve kterých je integrand nespojitou funkcí. Takovým integrálům říkáme nevlastní.

12.2.1 Nevlastní integrály vlivem intervalu

Uvažujme určitý integrál s proměnnou horní mezí

$$I(l) = \int_a^l f(x)\,dx.$$

Nechť l roste nade všechny meze. Potom existují dvě možnosti, totiž buď má $I(l)$ konečnou (tzv. vlastní) limitu pro $l \to +\infty$ nebo nikoli.

Definice 12.1 *Nevlastní integrál*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

funkce $f(x)$ na intervalu $[a, \infty)$ definujeme jako limitu integrálu

$$\int_a^l f(x)\,dx$$

pro $l \to \infty$, za předpokladu, že tato limita existuje (a je konečná), tj.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_a^l f(x)\,dx.$$

V takovém případě, říkáme, že nevlastní integrál konverguje; v opačném případě říkáme, že diverguje (limita je nekonečná nebo vůbec neexistuje).

Příklad 12.2 *Najděte* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$

Řešení. Podle definice nalézáme:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{l\to\infty} \left[e^{-x}\right]\Big|_0^l = \lim_{l\to\infty} \left[-e^{-l} + e^0\right] = 0 + 1 = 1.$$

Daný nevlastní integrál tedy konverguje.

Příklad 12.3 *Zjistěte zda existuje* $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Řešení.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{l\to\infty} \ln|x|\big|_1^l = \lim_{l\to\infty} [\ln|l| - \ln 1] = \infty.$$

Nevlastní integrál diverguje.
Další případy nevlastních integrálů definujeme podobně:

1. dolní mez je nekonečná:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^a f(x)\,dx;$$

2. obě meze jsou nekonečné:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^a f(x)\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,dx;$$

3. v posledním případě je často uvažován případ, kdy jak l,tak i p konvergují k nekonečnu stejnou rychlostí, tj. případ $l = p$. V literatuře je tento případ nazýván hlavní hodnotou a označován *V.p.* (z francouzštiny: "Valeur principale" - hlavní hodnota). Definujeme tedy ve smyslu hlavní hodnoty:

$$\text{V.}p. \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^l f(x)\,dx.$$

12.2.2 Nevlastní integrály vlivem funkce

Definice 12.4 *Nevlastní integrál*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

funkce $f(x)$ spojité na intervalu $x \in [a,b)$ a neomezené pro $x \to b$ je limita integrálu

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pro $\varepsilon \to 0^+$ pokud tato limita existuje (a je konečná), tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

V takovém případě říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Podobně, pokud je funkce $f(x)$ spojitá na $[a,b]$ a neomezená v levém koncovém bodě $x = a$, pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Pokud jsou body nespojitosti v bodech $x = a$ a $x = b$, pak pro libovolně vybraný bod $c \in (a,b)$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Poznamenejme, že podobně jako v předchozí části můžeme definovat hlavní hodnotu integrálu.

Příklad 12.5 *Najděte* $\displaystyle\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Řešení. Podle definice je

$$\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\delta^{10} = 2\sqrt{10}\,.$$

Tedy nevlastní integrál konverguje.

Příklad 12.6 *Zjistěte zda existuje* $\int_0^{10} \frac{dx}{x}$.

Řešení. Řešení: Podle definice je

$$\int_0^{10} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^{10} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0^+} \ln|x|\Big|_\delta^{10} = +\infty.$$

To znamená, že nevlastní integrál diverguje.

12.3 Aplikace určitého integrálu

V této části jsou uvedeny některé možnosti využití určitého integrálu. Vzorce jsou uvedeny většinou bez důkazů.

12.3.1 Obsah rovinného obrazce

Jak bylo uvedeno v částech 11.2 a 11.3 je plocha obrazce S omezeného křivkou $y = f(x) \in C$ dána vztahem

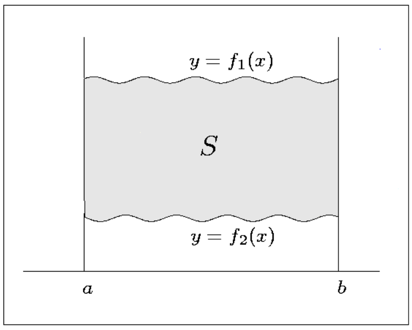
$$P_S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Je-li křivka $y = f(x)$ dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t) \in C^1, y = \xi(t) \in C, \alpha \leq t \leq \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \phi'(t) > 0$ na $[\alpha, \beta]$ pak

$$P_S = \int_\alpha^\beta \xi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Plocha obrazce S mezi dvěma křivkami $y = f_1(x) \in C$ a $y = f_2(x) \in C$ (viz náčrtek 12.3.1) je vyjádřena vztahem

$$P_S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

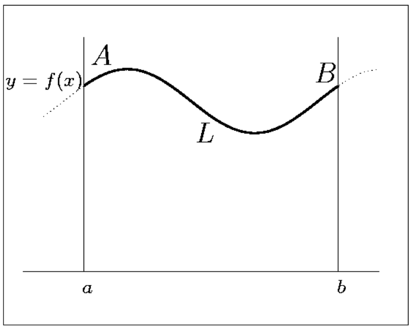


Obrázek 12.3.1: Plocha obrazce mezi dvěma křivkami

12.3.2 Délka oblouku

Je-li křivka dána vztahem $y = f(x) \in C^1$, pak je její délka mezi body A a B (viz náčrtek 12.3.2)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$



Obrázek 12.3.2: Délka oblouku

V případě parametrického zadání křivky, tj. je-li $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t) \in C^1, \alpha \le t \le \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi'(t) > 0$ na $[\alpha, \beta]$, platí

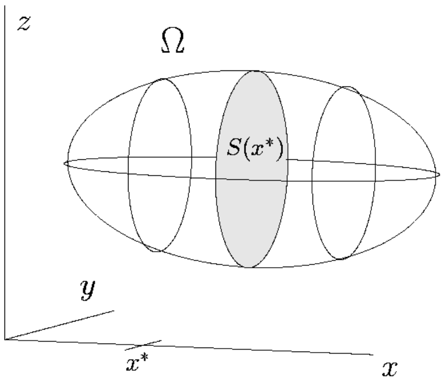
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{12.3.1}$$

Příklad 12.7 *Půlkružnice je dána parametrickými rovnicemi* $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$. *Najděte její délku.*

Řešení. Podle (12.3.1) je

$$L = \int_0^\pi \sqrt{[\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2}\, dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

12.3.3 Objem tělesa

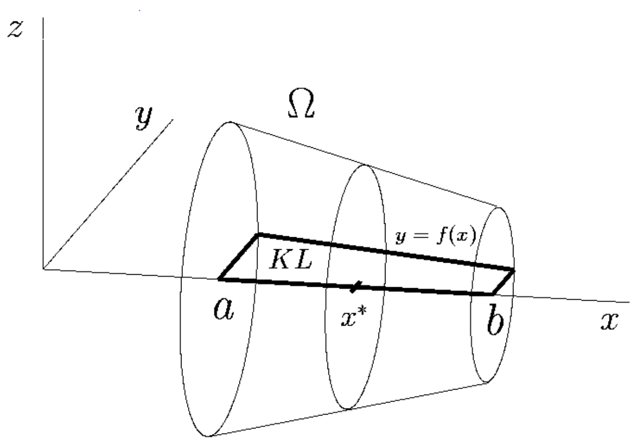


Obrázek 12.3.3: Objem tělesa

Naší úlohou je najít objem V_Ω prostorového tělesa Ω znázorněného na obrázku 12.3.3. Toto těleso se nachází mezi dvěma rovinami o rovnicích $x = a$ a $x = b$. Budeme předpokládat, že plocha řezu tělesa Ω rovinou $x = x^*$ je známa a je určena spojitou funkcí $P = S(x^*)$, pro každé $x^* \in [a, b]$. Pak

$$V_\Omega = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{12.3.2}$$

12.3.4 Objem rotačního tělesa



Obrázek 12.3.4: Objem rotačního tělesa

Vzniklo-li těleso Ω rotací křivostranného lichoběžníka KL omezeného křivkou $y = f(x)$ kolem osy x (viz. obrázek 12.3.4), je plocha řezu tělesa Ω rovinou $x = x^*$ plochou kruhu o poloměru $r = f(x^*)$, tedy $S(x^*) = \pi f^2(x^*)$. Pak dle vzorce (12.3.2) platí

$$V_\Omega = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Je-li křivka $y = f(x)$ zadána parametricky, tj. $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi'(t) > 0$ na $[\alpha, \beta]$, pak

$$V_\Omega = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt.$$

12.3.5 Obsah rotační plochy

Je-li $y = f(x) \in C^1$, pak je plošný obsah Q_Ω rotační plochy, která je pláštěm tělesa Ω z obrázku 12.3.4 určen vztahem

$$Q_\Omega = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

V parametrickém případě, když $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t) \in C^1, t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi'(t) > 0$ na $[\alpha, \beta]$ platí:

$$Q_\Omega = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

12.4 Integrace s programem Maple

12.4.1 Analytická integrace s programem Maple

Důležitou částí programu Maple je možnost analytické integrace. Ta se provádí pomocí příkazu `"int"`, jehož syntaxe je podobná jako syntaxe příkazu `"diff"`.

Příklad 12.8 *Najděte integrál*

$$\int x^2\, dx.$$

pomocí Maple.

Řešení. Napišme odovídající příkaz v programu Maple:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek vypsaný programem Mample je tvaru:

$$\frac{1}{3}x^3.$$

Příklad 12.9 *Najděte integrál*

$$\int x\mathrm{e}^x\, dx.$$

pomocí Maple (viz Příklad 9.9).

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v Maple:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek, vypsaný programem Maple, je tvaru:

$$x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

Všimněme si, že ve výsledku vypsaném programem integrační konstanta chybí.

12.4.2 Určité integrály s programem Maple

Příklad 12.10 *Najděte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^{3/2}}\,dt$$

pomocí programu Maple.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz programu Maple:

```
int(exp(-t)/(1+t^(3/2)),t=0..infinity);
```

Výsledek vypsaný programem Maple je příliš neohrabaný. V tomto případě — protože výsledkem je konstanta — lze použít příkazu `"evalf"` pro nalezení numerické aproximace:

```
evalf(%);
```

Nyní Maple dává numerický výsledek:

$$.613073060.$$

12.5 Shrnutí

Ukázali jsme si způsoby výpočtu nevlastních integrálů a to jak v případě, kdy jde o integrál přes neohraničený interval, tak i v případě, že jde o integrál z neohraničené funkce. V obou případech jsme zformulovali podmínky konvergence.

Použití výpočetní techniky pro výpočet nevlastních integrálů je omezeno možnostmí programového vybavení.

Uvedené aplikace určitého integrálu jsou pouze zlomkem jeho použití. Další aplikace budou uvedeny v navazujících matematických i technických předmětech.

Při praktickém užití určitého integrálu jsme využily všech znalostí a dovedností, které jsme získali u neurčitého integrálu. Platí, že pro efektivní využívání teoretických znalostí je třeba mít určitou praktickou zkušenost.

12.6 Kontrolní příklady ke kapitole 12

1. Vypočtěte nevlastní integrály
   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$
   (b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$
   (c) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\, x\mathrm{d}x\,, \quad a>0$
   (d) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\, \sin bx\mathrm{d}x\,, \quad a>0$
2. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkami:

(a) parabolou $y^2 = x$, přímkou $x = 3$ a přímkou $y = 0$.

(b) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x$, $y = 2x$.

(c) $x = \cos y + 2$, $y = 2\pi$, $y = 0$, $x = 0$.

Výsledky jsou uvedeny v části 15.12.

Kapitola 13

Diferenciální počet funkcí více proměnných (část 1)

13.1 Cíl kapitoly

Už dříve jsme se seznámili s vlastnostni funkce jedné proměnné. Velmi často se v aplikacích setkáváme s funkcemi, které závisí na dvou a více proměnných. V této kapitole začneme podrobněji studovat vlastnosti takových funkcí. Cílem této kapitoly je vyložit pojem limity funkce a spojitosti funkce v případě, že funkce závisí na více než jedné nezávislé proměnné.

Začneme zavedením limity funkce více proměnných. Ukážeme, jak se počítají limity funkcí více proměnných. Pomocí pojmu limity budeme definovat spojitost funkce. Limita se stane také výchozím aparátem pro určení parciální derivace funkce. Vyložíme také geometrický význam parciálních derivací.

Zavedeme si pojem gradientu funkce jako vektoru, jehož složky jsou parciální derivace podle jednotlivých proměnných.

Stále se budeme opírat o znalosti derivování funkcí jedné proměnné. Ukážeme, že parciální derivace funkce více proměnných je derivace funkce, kdy se jedna proměnná zůstává proměnnou a ostatní pokládáme za parametry. Tím je dána i souvislost mezi parciálními derivacemi funkce více proměnných a derivacemi funkce jedné proměnné.

13.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

13.2.1 Funkce definované v $\mathbb{R}^n$

Definice 13.1 *Veličina y se nazývá funkcí proměnných*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

definovanou na množině $D \subset \mathbb{R}^n$, jestliže je každému bodu množiny D přiřazena určitá hodnota proměnné y.

Označujeme:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nebo stručně:

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá definičním oborem funkce f. Jestliže $D \subset \mathbb{R}^2$, užíváme často zkrácený zápis $z = f(x, y)$. Jestliže $D \subset \mathbb{R}^3$, pak často zapisujeme funkci vztahem $u = f(x, y, z)$. Jako příklady funkce více proměnných mohou sloužit funkce

$$y = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n$$

a

$$y = \exp \frac{x_1}{x_2} + x_3 x_4.$$

Je-li $z = f(x, y)$ funkce dvou nezávisle proměnných x a y, jejím grafem nazýváme množinu bodů, jejichž x-ovými a y-ovými souřadnicemi jsou hodnoty x a y a třetí souřadnice je odpovídající hodnota z, tj. množina bodů $(x, y, f(x, y))$. Grafem funkce definované na některé oblasti roviny je obvykle plocha.

Příklad 13.2 *Jaké plochy jsou dány vztahy*

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = x^2 + y^2.$$

Řešení. První z ploch je horní polokoulí (viz. Obrázek 13.2.1). Plocha daná druhým vztahem je rotační paraboloid (viz. Obrázek 13.2.2).

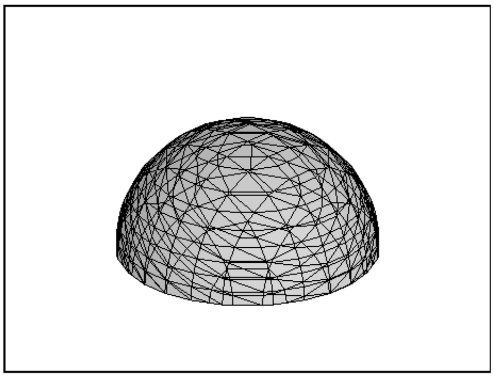
13.2.2 Limita funkce více proměnných

Definice 13.3 *Říkáme, že funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ limitu rovnou číslu A, jestliže je definována v okolí x^0 s výjimkou nejvýše bodu x^0 samotného a jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že*

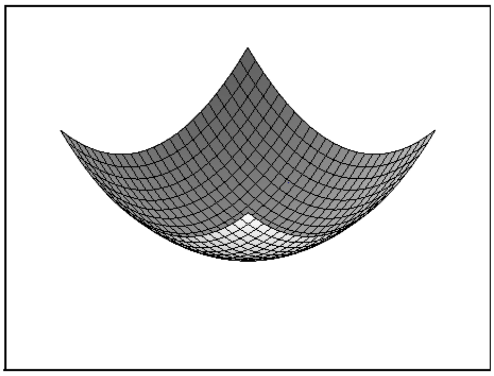
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pro všechna $x \neq x^0$ splňující nerovnost

$$|x_i - x_i^0| < \delta, \;\; i = 1, 2, \dots, n.$$



Obrázek 13.2.1: Horní polokoule



Obrázek 13.2.2: Rotační paraboloid

Z této definice vyplývá, že pokud limita A existuje, pak je jediná. Taková limita se nazývá **vlastní**. Jestliže $A = \infty$ (pokuste se modifikovat výše uvedenou definici pro tento případ), pak se limita nazývá **nevlastní**. Pro označení limity užíváme následující zápis

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = A$$

nebo

$$\lim_{\substack{x_i \to x_i^0 \\ i=1,2,\dots,n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

Příklad 13.4 *Najděte* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ *kde*

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\ .$$

Řešení. Sestavíme tuto pomocnou nerovnost:

$$(x^3+y^3)^2 = x^6+2x^3y^3+y^6 < 2(x^6+y^6) < 2(x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6) = 4(x^2+y^2)^3.$$

Tedy

$$|x^3+y^3| < 2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

a

$$|f(x,y)| < 2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Nyní je zřejmé, že

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Příklad 13.5 *Existuje*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varphi(x,y)$$

pro

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ?$$

Řešení. a) Nechť $y = x$. Pak

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varphi(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = 0$$

Tedy jestliže A existuje, pak $A = 0$.
b) Nechť $y = 2x$. Pak

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varphi(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}\,.$$

Tedy jestliže A existuje, pak $A = -\dfrac{3}{5}$. Dostáváme spor.
Vidíme, že funkce $\varphi(x,y)$ nemá limitu v bodě $(0,0)$.
Uvedeme některá užitečná pravidla pro výpočet limity (předpokládáme existenci vlastních limit $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \Phi$):

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = F \pm \Phi$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = F\cdot\Phi$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{F}{\Phi}$

jestliže $\varphi(x) \neq 0$ a $\Phi \neq 0$.

13.2.3 Spojitost funkce

Definice 13.6 *Říkáme, že funkce* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je spojitá v bodě* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$*, jestliže je definována v okolí bodu* x^0 *včetně bodu* x^0 *samotného a jestliže*

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$$

Příklad 13.7 *Je funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \textit{jestlie} \quad x^2+y^2 > 0, \\ 0 & \textit{jestlie} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

spojitá v bodě $(0,0)$?

Řešení. Funkce je spojitá, protože podle Příkladu 13.4

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0 = f(x,y).$$

Podmínka spojitosti funkce f v bodě x^0 může být přepsána ve tvaru:

$$\lim_{h \to 0} f(x^0 + h) = f(x^0),$$

kde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.
Přírůstek (nebo **absolutní přírůstek**) funkce f v bodě x^0 odpovídající přírůstku h vektorového argumentu je definován následovně:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + h) - f(x^0).$$

Můžeme tedy přepsat definici spojitosti f v bodě x^0 pomocí přírůstků:
Funkce je spojitá v x^0, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \Delta f(x^0) = 0$$

kde

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Obvyklá pravidla pro počítání se spojitými funkcemi nadále platí, např. součet, rozdíl, součin a podíl dvou funkcí $f(x)$ a $\varphi(x)$ je spojitý v bodě x^0, pokud jsou zde spojité funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ (pro podíl navíc požadujeme, aby $\varphi(x)$ a $\varphi(x^0) \neq 0$).

13.2.4 Parciální derivace

Definice 13.8 *Parciální derivace* $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *vzhledem k nezávisle proměnné* x_j *v bodě* $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *je definována jako limita*

$$f'_{x_j}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x_1, x_2 \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2 \ldots, x_n) \right],$$

kde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, za předpokladu, že tato limita existuje.*

Pro parciální derivace používáme následující značení:

$$f'_{x_j},\ \frac{\partial f}{\partial x_j},\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_j},\ \ j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Poznámka 13.9 *Parciální derivace f'_{x_j} není nic jiného než derivace funkce $f(x_1, x_2 \dots, x_n)$, na niž pohlížíme jako na funkci proměnné pouze x_j pro pevná $x_1, x_2 \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$.*

Příklad 13.10 *Je-li $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^5 x_3^7$, jaká je hodnota $f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)$?*

Řešení. Snadno nalézáme

$$f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 x_2^5 x_3^6.$$

13.2.5 Geometrický význam parciální derivace

Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ geometricky představuje množinu bodů $(x, y, f(x, y))$, kde $(x, y) \in D_f$, tedy plochu v třídimenzionálním prostoru, v němž jsou zavedeny pravoúhlé kartézské souřadnice (x, y, z). Derivace $f'_x(x_0, y_0)$ (za předpokladu, že existuje) je rovna směrnici tečny ke křivce vzniklé řezem plochy $z = f(x, z)$ rovinou $y = y_0$. Analogicky interpretujeme význam parciální derivace $f'_y(x, y)$.

13.2.6 Rovnice tečné roviny k ploše

Necht' je dána funkce $z = f(x, y) \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, kde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená oblast. Předpokládejme, že $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Množina bodů $(x, y, f(x, y))$, kde $(x, y) \in \mathcal{D}$. generuje plochu S. Uvažujme řezy plochy S rovnami $y = y_0$ a $x = x_0$. Veďme tečny bodem $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ k rovinným křivkám vzniklým v řezech. Rovina T procházející těmito přímkami, které se protínají v bodě M_0, se nazývá tečná rovina k ploše S v bodě M_0, bod M_0 se nazývá bodem dotyku roviny T a plochy S.
Tečna vedená bodem M_0 k řezu plochy S rovinou $y = y_0$ je určena rovnicemi

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0),\ \ y = y_0.$$

Tečna vedená bodem M_0 k řezu plochy S rovinou $x = x_0$ je určena rovnicemi

$$z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),\ \ x = x_0.$$

Rovnici tečné roviny T procházející body $M_0(x_0, y_0, z_0)$ lze vyjádřit jako

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

kde A a B jsou vhodné konstanty. Protože obě tečny musí v této rovině ležet, dostáváme $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$ a rovnice T bude mít tvar

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{13.2.1}$$

13.2.7 Gradient

Vektor
$$\operatorname{grad}\omega(x) = \big(\omega'_{x_1}(x), \omega'_{x_2}(x), \dots, \omega'_{x_n}(x)\big)$$
se nazývá gradientem funkce ω v bodě x. Kromě označení $\operatorname{grad}\omega(x)$ používáme i $\nabla\omega(x)$ (čteme „nabla“).

Věta 13.11 *Gradient funkce*
$$F(x, y, z) \equiv z - f(x, y)$$
je kolmý k tečné rovině vedené bodem (x, y, z) plochy $z = f(x, y)$.

Důkaz. Rovnice tečné roviny v bodě (x_0, y_0) plochy $(x, y, f(x, y))$, kde $z = f(x, y)$, a $z_0 = f(x_0, y_0)$ je:
$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
a tečné vektory T_x, T_y mají souřadnice:
$$T_x = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)), \;\; T_y = \big(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\big).$$
Gradient
$$\nabla F = \big(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1\big).$$
Pak snadno ověříme, že skalární součiny
$$(T_x, \nabla F) = 0, \;\; (T_y, \nabla F) = 0$$
a následně
$$\nabla F \;\perp T_x, \;\; \nabla F \;\perp T_y.$$
Důkaz zakončíme poznámkou, že tečné vektory T_x, T_y určují tečnou rovinu $z = f(x, y)$ procházející bodem (x_0, y_0, z_0). Proto je gradient ∇F kolmý k tečné rovině.

Věta 13.12 *Derivace funkce $f(x)$ ve směru jednotkového vektoru ω je rovna průmětu gradientu f v tomto bodě do daného směru:*
$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = (\operatorname{grad} f, \omega) = \operatorname{grad}_\omega f.$$

Důkaz. Zřejmě platí
$$(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f| \cdot |\omega| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = \operatorname{grad}_\omega f.$$

Věta 13.13 *Směrová derivace funkce f je maximální, jestliže gradient f je rovnoběžný a souhlasně orientovaný s ω.*

Důkaz. Protože maximální hodnoty je dosaženo, jestliže
$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f|,$$
tj. jestliže $\cos(\operatorname{grad} f, \omega) = 1$, pak zjevně $\operatorname{grad} f \parallel \omega$.

13.3 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili s dalšími základními pojmy matematické analýzy, s pojmy funkce více proměnných, limity funkce více proměnných a parciální derivace, které spolu úzce souvisí. Pomocí nich byly definovány další pojmy, jako je např. spojitost funkce.

Zvláště parciální derivace se často vyskytují v navazujících matematických předmětech a v nejrůznějších aplikacích, jako je třeba fyzika a telekomunikace, kde přenos signálu může být popsán tzv. telegrafní rovnicí, která je diferenciální rovnicí obsahující parciální derivace, tedy rovnicí, ve které se kromě neznámé funkce vyskytují i její parciální derivace.

13.4 Kontrolní příklady ke kapitole 13

1. Vypočtěte limitu následujících funkcí
   (a) $\lim_{x\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3}$
   (b) $\lim_{x\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
2. Určete body, v nichž nejsou následující funkce spojité
   (a) $f(x,y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$
   (b) $f(x,y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$
3. Vypočtěte parciální derivace funkcí:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$
   (b) $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.13.

Kapitola 14

Diferenciální počet funkcí více proměnných - (část 2)

14.1 Cíl kapitoly

U funkce jedné proměnné jsme si definovali nejdříve první derivaci a pomocí ní druhou derivaci jako derivaci první derivace, třetí derivaci jako derivaci druhé derivace, atd. Obdobně budeme postupovat i nyní. Druhá parciální derivace bude definována jako parciální derivace první parciální derivace.

Ukážeme, že za určitých podmínek nebudou tzv. smíšené parciální derivace záviset na pořadí derivování.

Zavedeme pojem diferencovatelné funkce a totálního diferenciálu. Obdobně jako u funkcí jedné proměnné zavedeme i diferenciály vyšších řádů.

Ukážeme některé základní vlastnosti parciálních derivací vyšších řádů. Budeme definovat směrovou derivaci a Taylorův polynom pro funkci více proměnných.

Zvláštní pozornost budeme věnovat výpočtu lokálních extrémů funkce více proměnných, určení minimální a maximální hodnoty funkce na dané uzavřené oblasti a stanovení tzv. vázaných extrémů.

14.2 Parciální derivace vyšších řádů

Derivace f'_{x_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ se nazývají také parciální derivace prvního řádu (první parciální derivace) funkce f. Výrazy

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

(nebo $f''_{x_i x_j}$) se nazývají parciální derivace druhého řádu (druhé parciální derivace funkce f). Pro $i = j$ je označujeme jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(nebo $f''_{x_i^2}$). Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů, např. obecně derivaci m-tého řádu podle proměnné x_k

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k}}\, f_{m\text{-krát}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$$

nebo derivaci 5-tého řádu podle proměnných x, z, y, y, z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x}\,.$$

14.3 Nezávislost smíšených derivací na pořadí derivování

Parciální derivace $f''_{x_i x_j}, f'''_{x_i^2 x_j}$, $i \neq j$ apod., t.j. derivace ve kterých derivování probíhá nejméně vzhledem ke dvěma různým proměnným, se nazývají smíšené parciální derivace.

Věta 14.1 *Nechť je funkce $z = f(x, y)$ definována na otevřené množině G roviny xy a nechť zde existují parciální derivace f'_x, f'_y. Jestliže má funkce f spojité parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} v bodě $(x_0, y_0) \in G$, jsou si v tomto bodě tyto derivace rovny.*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)\,.$$

Příklad 14.2 *Ilustrujte Větu 14.1 v případě funkce funkci $z = x^3y^2$, je-li vektor $K =$* $(1, 1)$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že pro funkci z platí:

$$z = x^3y^2, z'_x = 3x^2y^2, z'_y = 2x^3y, z''_{xy} = 6x^2y = z''_{yx}.$$

Věta 14.3 *Jestliže všechny parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (příslušné danému vektoru $K = (k_1, \ldots, k_n)$ s celočíselnými souřadnicemi, které vyjadřují maximální řády parciálních derivací vzhledem k proměnným $x_1, x_2, \ldots, x_n$) do řádu $k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1$ existují na některé otevřené oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ a všechny parciální derivace řádu $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ jsou spojité na G, pak lze libovolně změnit pořadí derivování v libovolné z těchto derivací bez vlivu na konečný výsledek.*

Příklad 14.4 *Ilustrujte Větu 14.3, je-li vektor $K = (1, 2, 2)$.*

Řešení. Vypišme jen několik možností:

$$\frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}.$$

14.4 Diferencovatelná funkce. Totální diferenciál.

Definice 14.5 *Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je diferencovatelná v daném bodě $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jestliže její celkový přírůstek (nebo stručně přírůstek) lze zapsat ve tvaru*

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2 + \cdots + f'_{x_n}(x)h_n + \varepsilon(h)\|h\|, \quad (14.4.1)$$

kde

$$\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

a $\varepsilon(h)$ je taková funkce, že $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Říkáme, že funkce diferencovatelná v každém bodě určité oblasti je diferencovatelná na této oblasti.

Definice 14.6 *Hlavní část celkového přírůstku se nazývá* **totální diferenciál** *(nebo stručně* **diferenciál***) funkce, tj.*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x)h_i. \quad (14.4.2)$$

Snadno lze ověřit, že $dx_i = h_i$. Připomeňme, že $dx = \Delta x = (x+h) - x = h$, $dx_i = \Delta x_i = (x_i + h_i) - x_i = h_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Totální diferenciál můžeme v tomto případě zapsat takto:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x)dx_i.$$

Příklad 14.7 *Nechť $z = 3axy - x^3 - y^3$, kde $a \in \mathbb{R}$. Najděte dz v bodě $z_0 = (1, 2)$.*

Řešení. Dle vzorce (14.4.2) nacházíme

$$dz = (3ay - 3x^2)dx + (3ax - 3y^2)dy.$$

V bodě z_0 máme

$$dz(1, 2) = (6a - 3)dx + (3a - 12)dy.$$

Příklad 14.8 *Nalezněte diferenciál funkce $z = x^y$, $x > 0$.*

Řešení. Užitím vzorce (14.4.2) dostáváme

$$dz = (yx^{y-1})dx + (x^y \ln x)dy.$$

Bez důkazu uvedeme další pravidla pro výpočet diferenciálů:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = du \cdot v + v \cdot du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - udv), \text{ jestlie } v \neq 0.$$

Následující příklad ukazuje, že existence parciálních derivací není dostatečným předpokladem diferencovatelnosti funkce.

Příklad 14.9 *Je funkce*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

diferencovatelná v bodě $(0, 0)$*?*

Řešení. Vypočteme parciální derivace

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \cdot (|xy|)'_x = \frac{|y|\mathrm{sign}x}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|y|}\mathrm{sign}x}{2\sqrt{|x|}} \text{ pro } xy \neq 0$$

a

$$f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{|x|}\mathrm{sign}y}{2\sqrt{|y|}} \text{ pro } xy \neq 0.$$

Tyto vztahy nejsou vhodné pro výpočet hodnot $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$, neboť nejsou v bodě $(0, 0)$ definovány. Pro výpočet těchto hodnot musíme postupovat podle definice:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(h, 0) - f(0, 0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0$$

a podobným způsobem dostáváme

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Nyní vypočteme

$$\Delta f(x, y)|_{(0,0)} = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \varepsilon(h_1, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

a

$$\Delta f(0, 0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \sqrt{|h_1 h_2|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Je vidět, že můžeme položit

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Bohužel limita

$$\lim_{h_1\to 0, h_2\to 0} \varepsilon(h_1, h_2)$$

neexistuje, neboť např. pro $h_1 = h_2$:

$$\lim_{h_1\to 0} \varepsilon(h_1, h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a pro $h_1 = 2h_2$:

$$\lim_{h_1\to 0} \varepsilon(h_1, h_1/2) = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Tedy funkce $f(x, y)$ není diferencovatelná.

14.5 Diferenciály vyšších řádů

Definice 14.10 *Druhý diferenciál (diferenciál druhého řádu) funkce $f(x)$ (kde přdpokládáme, že $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$) odpovídající nezávislým přírůstkům (diferenciálům)*

$$dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$$

je definován jako diferenciál z diferenciálu, tedy

$$d^2 f = d(df).$$

Obecně je diferenciál l-tého řádu (l-tý diferenciál) funkce f pro nezávislé diferenciály $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ definován indukcí pomocí rekurentní formule

$$d^l f = d(d^{l-1} f),\ l = 2, 3, \ldots\ .$$

Pro nezávisle proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ máme $dx_j = \Delta x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Diferenciály dx_j budeme také nazývat nezávislé diferenciály, abychom zdůraznili, že jsou nezávislé na $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nezávislost veličin dx_j se formálně ukazuje v průběhu derivování: derivujeme-li vzhledem k $x_1, x_2, \ldots, x_n$, považujeme ostatní nezávisle proměnné za konstanty, tj. $d(dx_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 14.11 *Vypočtěme druhý diferenciál*

$$d^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Řešení. Podle definice dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(df(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right) dx_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d(dx_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i. \end{aligned}$$

Proto např.

$$d^2f(x,y) = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Práci s diferenciály si můžeme usnadnit. Zaveďme proto pomocný operátor

$$D_n = \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_n}dx_n,$$

se kterým zacházíme podle předpisu

$$D_n f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\ .$$

Pak lze ověřit, že pro diferenciály vyšších řádů platí

$$d^k f = (D_n)^k f.$$

Zvažujme například situaci, kdy $n = 2$, $k = 2$. Potom

$$(D_2)^2 = \left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2}dx_2\right)^2 = \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_2^2}(dx_2)^2.$$

Užijme nalezený operátor D_2 k výpočtu diferenciálu:

$$d^2f(x,y) = D_2^2 f(x,y) = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2.$$

V obecném případě dostáváme pro $n = 2$ (podle binomické věty)

$$\begin{aligned}(D_2)^k &= \left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2}dx_2\right)^k = \\ &= \frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^k}(dx_1)^k + \binom{k}{1}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2}(dx_1)^{k-1}dx_2 + \\ &+ \binom{k}{2}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-2}\partial x_2^2}(dx_1)^{k-2}dx_2^2 + \cdots + \binom{k}{p}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-p}\partial x_2^p}(dx_1)^{k-p}dx_2^p + \cdots + \\ &+ \binom{k}{k-1}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1\partial x_2^{k-1}}dx_1(dx_2)^{k-1} + \frac{\partial^k\cdot}{\partial x_2^k}(dx_2)^k\ .\end{aligned}$$

14.6 Interpretace totálního diferenciálu funkce dvou proměnných

Snadno lze ověřit, že z rovnice tečné roviny k ploše (viz Kapitola 13.2.6, vztah (13.2.1)) vyplývá (souřadnice z_T udává hodnotu souřadnice z na tečné rovině)

$$\Delta z_T = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

kde $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$ a $\Delta y = y - y_0$. Protože x a y jsou nezávisle proměnné, poslední rovnici lze napsat ve tvaru

$$\Delta z_T = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

a nebo v následujícím tvaru (který udává také stručný tvar rovnice tečné roviny)

$$\Delta z_T = dz, \tag{14.6.3}$$

kde

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

(zde je souřadnice z hodnotou funkce $f(x, y)$).

Věta 14.12 *Totální diferenciál funkce $z = f(z, y)$ je roven přírůstku Δz_T na tečné rovině vedené ke grafu funkce odpovídajícím bodem.*

14.7 Aplikace totálního diferenciálu na přibližné výpočty

Připomeňme Definici 14.5 diferencovatelné funkce (viz vztah (14.4.1)):

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x)h_i + \varepsilon(h) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$$

nebo, stručněji

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon(\Delta x)||\Delta x||,$$

kde $\Delta x = h$, tj. $\Delta x_1 = h_1$, $\Delta x_2 = h_2, \ldots$, $\Delta x_n = h_n$, $\Delta x_i = (x_i + h_i) - x_i$,

$$||\Delta x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$$

a $\lim\limits_{\Delta \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Odtud vyplývá:

$$\Delta f(x) \approx df(x) \text{ jestliže } \Delta x \to 0 \quad \text{a} \quad df(x) \neq 0 \text{ když } \Delta x \neq 0.$$

Tento přibližný vzorec může být dokázán vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Příklad 14.13 *Napišme přibližný vzorec pro výpočet hodnot funkce*

$$z = \ln(xy + 2y^2 - 2x).$$

Řešení. Řešení: Postupně nacházíme: $z(1,1)=0$,

$$z'_x(x,y)=\frac{y-2}{xy+2y^2-2x}\ ,\quad z'_x(1,1)=-1,$$

$$z'_y(x,y)=\frac{x+4y}{xy+2y^2-2x}\ ,\quad z'_y(1,1)=5.$$

Tedy v okolí bodu $(1,1)$

$$\ln(xy+2y^2-2x)\approx-(x-1)+5(y-1).$$

Například pro volbu $x=y=1,1$ dostáváme

$$\ln(1,1^2+2\cdot 1,1^2-2,2)\approx-0,1+5\cdot 0,1=0,4.$$

Tento výsledek je v dobré shodě se skutečnou hodnotou: přesnější hodnota je

$$\ln(1,1^2+2\cdot 1,1^2-2,2)=\ln 1,43\approx 0,357.$$

14.8 Derivace složené funkce

Věta 14.14 *Nechť je funkce $u=f(x,y,z)$ diferencovatelná v bodě $(x,y,z)\in G$ (G je otevřená oblast v $\mathbb{R}^3$) a nechť funkce*

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ z=\chi(t) \tag{14.8.4}$$

závislé na skalárním argumentu t mají derivace vzhledem k t. Pak derivaci složené funkce vzhledem k t (předpokládáme, že se t mění na nějakém intervalu a že všechny výrazy jsou definované)

$$u=F(t)=f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$$

(tedy derivace f podél křivky určené vlastnostmi (14.8.4)) lze vyjádřit vzorcem

$$F'(t)=f'_x(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\varphi'(t)+f'_y(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\psi'(t)+f'_z(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\chi'(t).$$

Analogicky pokud např. $z=f(u,v)$, kde $u=\varphi(x,y)$ a $v=\psi(x,y)$, pak parciální derivace funkce

$$z=F(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$$

jsou vyjádřeny vztahy

$$z'_x=F'_x=f'_u(\varphi(x,y),\psi(x,y))\cdot\varphi'_x(x,y)+f'_v(\varphi(x,y),\psi(x,y))\cdot\psi'_x(x,y),$$

$$z'_y=F'_y=f'_u(\varphi(x,y),\psi(x,y))\cdot\varphi'_y(x,y)+f'_v(\varphi(x,y),\psi(x,y))\cdot\psi'_y(x,y).$$

Výše uvedená pravidla lze aplikovat na funkce libovolného počtu nezávisle proměnných a libovolného počtu přechodných argumentů. Všimněme si rozdílu mezi derivacemi

$$\frac{dz}{dx}\quad\text{a}\quad\frac{\partial z}{\partial x}\ .$$

Zatímco první je totální derivace, tj. obyčejná derivace z jako funkce x, druhá je (explicitní) parciální derivace z vzhledem k argumentu x vystupujícímu v původním vyjádření funkce, tj. vypočtená za předpokladu, že všechny ostatní argumenty, ač závislé na x ve složené funkci, jsou v tomto procesu derivování považovány za konstanty.

Příklad 14.15 *Uvažujme funkci*
$$z = e^u \sin v\ ,$$
kde pokládáme $u = xy$ *a* $v = x + y$. *Najděte* z'_x *a* z'_y.

Řešení. Postupně nalézáme:

$$z'_x = e^{xy} y \sin(x + y) + e^{xy} \cos(x + y) = e^{xy}[y \sin(x + y) + \cos(x + y)],$$

$$z'_y = e^{xy} x \sin(x + y) + e^{xy} \cos(x + y) = e^{xy}[x \sin(x + y) + \cos(x + y)].$$

Příklad 14.16 *Nechť*
$$z = x^3 e^{u^2},$$
kde u *je funkce proměnné* x, *tj.* $u = \varphi(x)$. *Najděte* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *je-li* u *nezávislou veličinou a* $\dfrac{dz}{dx}$ *je-li* u *je funkce proměnné* x, *tj.* $u = \varphi(x)$.

Řešení.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2 e^{u^2}$$
a
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{u^2} + x^3 e^{u^2} 2u \cdot \varphi'(x)$$
nebo
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{\varphi^2(x)} + 2x^3 e^{\varphi^2(x)} \cdot \varphi(x)\varphi'(x).$$

14.9 Směrová derivace

Definice 14.17 *Nechť* $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ *je* **jednotkový** *vektor. (Směrová) derivace funkce* f *v bodě* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ve směru vektoru* $\vec{\omega}$ *(podél* $\vec{\omega}$*) je limita*

$$f'_{\vec{\omega}}(x) = \frac{\partial f}{\partial \vec{\omega}}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{\omega}) - f(x)}{t}$$

(za předpokladu, že existuje).

Věta 14.18 *Je-li funkce* f *diferencovatelná v bodě*

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

pak existuje její derivace ve směru libovolného jednotkového vektoru

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

a lze ji vyjádřit vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\omega}}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot \omega_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \cdot \omega_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \cdot \omega_n. \tag{14.9.5}$$

Poznámka 14.19 *Směrové derivace jsou zobecněním parciálních derivací. Skutečně, ze vztahu* (14.9.5) *dostáváme, že parciální derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \; i = 1, 2, \dots, n,$$

jsou směrové derivace podle vektorů

$$(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Geometrický význam směrové derivace. Je-li $z = f(x, y)$, pak je směrová derovace $f'_{\vec{\omega}}(P)$ rovna tangentu úhlu sevřeného tečnou k řezu plochy $z = f(x, y)$ rovinou kolmou k rovině xy a procházející vektorem $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, přiloženým k bodu P.
Je-li nutné vypočítat směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $\vec{\omega}^*$, který není jednotkový, nejprve vektor $\vec{\omega}^*$ dělíme jeho délkou, tj. definujeme jednotkový vektor

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\omega}^*}{\|\vec{\omega}^*\|}.$$

Pak počítáme směrovou derivaci podle vektoru $\vec{\omega}$.

Příklad 14.20 *Najděte derivaci funkce $u = xy^2z^3$ v bodě $M(3, 2, 1)$ ve směru vektoru $\vec{\omega}_1 = (2, 2, 1)$.*

Řešení. Vektor $\vec{\omega}_1$ není jednotkový. Proto vypočteme

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

a

$$u'_\omega(M) = y^2z^3\big|_M \cdot \frac{2}{3} + 2xyz^3\big|_M \cdot \frac{2}{3} + 3\,xy^2z^2\big|_M \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

14.10 Taylorův vzorec

Uvažujme dva body $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Taylorův vzorec pro funkci $f(x)$, kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě P^0 se zbytkem R_n v tzv. Lagrangeově tvaru lze vyjádřit jako:

$$f(P) = f(P^0) + \frac{1}{1!}df(P^0) + +\frac{1}{2!}d^2 f(P^0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d^{(n-1)} f(P^0) + R_n,$$

kde

$$R_n = \frac{1}{n!}d^n f(P^0 + \theta \cdot (P - P^0)),\ \theta \in (0,1),\ \theta = \text{const.}$$

Bod $P^0 + \theta \cdot (P - P^0)$ lze vyjádřit v souřadnicovém tvaru jako

$$P^0 + \theta \cdot (P - P^0) = (x_1^0 + \theta \cdot (x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta \cdot (x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + \theta \cdot (x_n - x_n^0)).$$

Příklad 14.21 *Rozviňme podle Taylorova vzorce funkci* $z = x^y$ *v okolí bodu* $(1,\ 1)$ *pro* $n = 3$.

Řešení. Nejprve vypočteme parciální derivace:

$$z'_x = yx^{y-1},\ \ z'_y = x^y \ln x,$$

$$z''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ \ z''_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x),\ \ z''_{y^2} = x^y (\ln x)^2,$$

$$z'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},\ \ z'''_{y^3} = x^y (\ln x)^3,$$

$$z'''_{x^2 y} = (y-1)x^{y-2}(1 + y \ln x) + x^{y-1} \cdot \frac{y}{x} = x^{y-2}\left((y-1)(1 + y \ln x) + y\right),$$

$$z'''_{xy^2} = yx^{y-1}(\ln x)^2 + 2x^y \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}\left(y(\ln x)^2 + 2\ln x\right).$$

Položme $P^0 = (1,\ 1)$. Pak

$$f(P^0) = 1,\ f'_x(P^0) = 1,\ f'_y(P^0) = 0.$$

Totální diferenciál má pak tvar

$$df(P^0) = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x = x - x^0 = x - 1.$$

Dále

$$f''_{x^2}(P^0) = 0,\ \ f''_{xy}(P^0) = 1,\ \ f''_{y^2}(P^0) = 0.$$

Tedy

$$d^2 f(P^0) = f''_{x^2}(P^0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(P^0)\Delta x \Delta y + f''_{y^2}(P^0)(\Delta y)^2 =$$
$$= 2\Delta x \Delta y = 2(x-1)(y-1).$$

Zbytek lze zapsat ve tvaru

$$R_3 = \frac{1}{6}\left[\tilde{y}(\tilde{y}-1)(\tilde{y}-2)\tilde{x}^{\tilde{y}-3}\cdot(\Delta x)^3 + \right.$$
$$+ 3\tilde{x}^{\tilde{y}-2}\left((\tilde{y}-1)(1+\tilde{y}\ln\tilde{x})+\tilde{y}\right)\cdot(\Delta x)^2\Delta y +$$
$$+ 3\tilde{x}^{\tilde{y}-1}\left(\tilde{y}(\ln\tilde{x})^2 + 2\ln\tilde{x}\right)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 +$$
$$\left. + \tilde{x}^{\tilde{y}}(\ln\tilde{x})^3\cdot(\Delta y)^3\right],$$

kde $\Delta x = x-1$, $\Delta y = y-1$ a

$$\tilde{x} = 1+\theta(x-1),\ \tilde{y} = 1+\theta(y-1).$$

Tedy Taylorův rozvoj funkce je dán takto:

$$x^y = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}2(x-1)(y-1) + R_3 = x + (x-1)(y-1) + R_3.$$

Dosaďme konkrétní numerické hodnoty. Jestliže například $x = 1,04$ a $y = 1,03$, tj. $\Delta x = 0,04$ a $\Delta y = 0,03$, pak

$$1,04^{1,03} = 1,04 + 0,0012 + R_3 = 1,0412 + R_3.$$

Protože $0 < \tilde{x} < 1,04$ a $0 < \tilde{y} < 1,03$, dostáváme pro zbytek R_3 odhad

$$|R_3| < \frac{1}{6}\left[1,03\cdot 0,03\cdot 1\cdot 1\cdot 0,04^3 + \right.$$
$$+ 3\cdot 1\cdot(0,3\cdot(1+1,03)+1,03)\cdot 0,04^2\cdot 0,03 +$$
$$+ 3\cdot 1\cdot(1,03+2)\cdot 0,04\cdot 0,03^2 +$$
$$\left. + 4\cdot 2\cdot 0,03^3\right] < 0,00017\,.$$

Náš výsledek je v dobré shodě se skutečností. Přesnější výpočet totiž dává: $1,04^{1,03} \approx 1,041224406$.

14.11 Implicitní funkce

Implicitní funkce y jedné proměnné x je určena rovnicí

$$F(x,y) = 0. \tag{14.11.6}$$

Existují případy, kdy tato rovnice neurčuje funkci: například rovnice

$$x^2 + y^2 + 5 = 0$$

nemá žádné reálné kořeny a tedy y nemůže být považováno za funkci x. Podáme podmínky zaručující, že jedna z neznámých obsažených v rovnici (14.11.6) je určena jako funkce druhé.

Věta 14.22 *Nechť $F(x,y)$ je funkce spojitá i se svými parciálními derivacemi v okolí bodu $M_0(x_0,y_0)$. Jestliže*

$$F(x_0,y_0)=0 \qquad \text{a} \qquad F'_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

pak pro hodnoty x ležící dostatečně blízko x_0 má rovnice (14.11.6) jednoznačné řešení $y=\varphi(x)$ závislé spojitě na x takové, že $\varphi(x_0)=y_0$. Kromě toho má funkce $\varphi(x)$ také spojitou derivaci danou vztahem

$$y'(x)\equiv\varphi'(x)=-\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}\;. \tag{14.11.7}$$

Poznámka 14.23 *Vzorec (14.11.7) dává konkrétní hodnotu $y'(x_0)$, neboť*

$$y'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,\varphi(x_0))}{F'_y(x_0,\varphi(x_0))}=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Příklad 14.24 *Nechť*

$$F(x,y)=x^2+y^2-R^2, \qquad R\neq 0.$$

Aplikujte k tomuto vztahu Větu 14.22.

Řešení. Rovnice $x^2+y^2-R^2=0$ určuje kružnici. V libovolném bodě $M_0(x_0,y_0)$ této kružnice takovém, že $y_0\neq 0$, jsou všechny podmínky Věty 14.22 splněny:

$$x_0^2+y_0^2-R^2=0, \qquad F'_y(x_0,y_0)=2y_0\neq 0.$$

Příklad 14.25 *Ukažte, že bodem $M(1,1)$ prochází funkce, zadaná implicitně vztahem*

$$F(x,y)=x^3y+\ln y-x=0.$$

Řešení. V bodě $M(1,1)$ máme $F(M)=0$. Parciální derivace

$$F'_x(x,y)=3x^2y-1, \qquad F'_y(x,y)=x^3+\frac{1}{y}$$

jsou spojité v okolí tohoto bodu a

$$F'_y(1,1)=2\neq 0.$$

Podle Věty 14.22 je tedy jednoznačně určena funkce $y=\varphi(x)$ vyhovující dané rovnici taková, že $\varphi(1)=1$. Ačkoli jsme ukázali existenci funkce $\varphi(x)$, nelze ji vyjádřit jako elementární funkci x, protože rovnice není algebraicky řešitelná pro y. Lze nalézt některé přibližné hodnoty funkce $\varphi(x)$, dosadíme-li za x a aplikujeme-li nějakou numerickou metodu. Pro derivace dostáváme

$$\varphi'(x)=-\frac{3x^2\varphi(x)-1}{x^3+\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

a

$$\varphi'(1)=-\frac{3-1}{2}=-1.$$

14.12 Výpočet derivací vyšších řádů funkcí zadaných implicitně

Jestliže rovnice $F(x,y)=0$ určuje implicitní funkci $y=\varphi(x)$, pak

$$F(x,\varphi(x)) \equiv 0$$

na odpovídajícím definičním intervalu funkce $y=\varphi(x)$. Derivováním tohoto vztahu získáváme (další vztahy budeme zapisovat pomocí rovností)

$$F'_x(x,\varphi(x)) + F'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Vyjádřením $\varphi'(x)$ dostáváme předchozí vzorec (14.11.7)

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}\ .$$

Derivováním tohoto vzorce dostáváme (předpokládáme, že uvedené výrazy existují)

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x,\varphi(x)))^2}\left[\left(F''_{xx}(x,\varphi(x)) + F''_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)F'_y(x,\varphi(x)) + \right.$$
$$\left. + F'_x(x,\varphi(x))\left((F''_{yx}(x,\varphi(x)) + F''_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)\right]$$

nebo

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x,\varphi(x)))^3}\left[F''_{xx}(x,\varphi(x))(F'_y(x,\varphi(x)))^2 - \right.$$
$$\left. - 2F''_{xy}(x,\varphi(x))F'_x(x,\varphi(x)))F'_y(x,\varphi(x)) + F''_{yy}(x,\varphi(x))(F'_x(x,\varphi(x)))^2\right].$$

14.13 Další případy výpočtu derivací implicitních funkcí

a) Jestliže rovnice

$$F(x,y,z) = 0$$

definuje $z=\varphi(x,y)$ na některé dvourozměrné oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$, pak podobným postupem jako v části 14.12 nacházíme

$$\varphi'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}\ , \qquad \varphi'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}\ .$$

b) Předpokládejme, že soustava

$$F_1(x,y_1,y_2) = 0,$$

$$F_2(x,y_1,y_2) = 0$$

určuje funkce $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, kde $x \in I \subset \mathbb{R}$, tedy

$$F_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0,$$

$$F_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \equiv 0$$

na I. Derivováním těchto vztahů dostáváme

$$F'_{1x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) + F'_{1y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \cdot \varphi'_1(x) + F'_{1y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \cdot \varphi'_2(x) \equiv 0,$$

$$F'_{2x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) + F'_{2y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \cdot \varphi'_1(x) + F'_{2y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \cdot \varphi'_2(x) \equiv 0.$$

Jestliže je determinant

$$J = \begin{vmatrix} F'_{1y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & F'_{1y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \\ F'_{2y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & F'_{2y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pak řešením této soustavy dostáváme

$$y'_1(x) = \varphi'_1(x) = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -F'_{1x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & F'_{1y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \\ -F'_{2x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & F'_{2y_2}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{vmatrix},$$

$$y'_2(x) = \varphi'_2(x) = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F'_{1y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & -F'_{1x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \\ F'_{2y_1}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) & -F'_{2x}(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{vmatrix}.$$

14.14 Extrémy funkcí více proměnných

Definice 14.26 *Bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ se nazývá bodem* **lokálního maxima (lokálního minima)** *funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže pro každý bod $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z definičního oboru D_f v okolí bodu P platí:*

$$f(P) - f(P^0) \leq 0 \qquad (\geq 0).$$

Platí-li místo neostrých nerovností ostré a $P \neq P^0$, hovoříme o ostrém lokálním maximu (minimu). Hodnota $f(P^0)$ se nazývá lokální **extrém.**

Věta 14.27 (**Nutná podmínka pro existenci extrému.**) *Jestliže diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě P^0 extrém, její parciální derivace v tomto bodě jsou rovny nule:*

$$f'_{x_1}(P^0) = f'_{x_2}(P^0) = \dots = f'_{x_n}(P^0) = 0. \tag{14.14.8}$$

Všimněte si, že pokud diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má extrém v bodě P^0, pak

$$df(P^0) = 0.$$

Bod P^0, v němž platí (14.14.8), se nazývá **stacionární bod** funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Příklad 14.28 *Určete stacionární body funkce*

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2. \tag{14.14.9}$$

Řešení. V tomto případě má systém rovnic (14.14.8) tvar

$$\begin{array}{lcl} z'_x &=& 6x^2 + y^2 + 10x &=& 0, \\ z'_y &=& 2xy + 2y &=& 0. \end{array}$$

Ze druhé rovnice vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $x = -1$. Dosadíme tyto hodnoty do první rovnice a určíme *čtyři stacionární body*:

$$M_1(0,0),\ M_2(-5/3,0),\ M_3(-1,2),\ M_4(-1,-2).$$

Abychom zjistili, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy, musíme použít některé postačující podmínky pro extrémy.

14.15 Postačující podmínky pro existenci extrému funkce více proměnných

Nechť je bod $P^0(x_0, y_0)$ stacionárním bodem funkce $z = f(x, y)$. Označme

$$A = z''_{xx}(P^0), \quad B = z''_{xy}(P^0), \quad C = z''_{yy}(P^0).$$

Věta 14.29

1) *Jestliže $AC - B^2 > 0$, pak má funkce $f(x, y)$ extrém v bodě P^0, je-li $A < 0$ jedná se o ostré lokální maximum a v případě $A > 0$ se jedná o ostré lokální minimum*

2) *Jestliže $AC - B^2 < 0$, nemá funkce v bodě P^0 extrém.*

3) *Jestliže $AC - B^2 = 0$, druhé derivace neposkytují odpověď na otázku o existenci extrému a je nutné další vyšetřování.*

Příklad 14.30 *Určete lokální extrémy funkce (14.14.9)*

Použijeme výsledky příkladu (14.28). Druhé derivace jsou

$$z''_{xx} = 12x + 10, \quad z''_{xy} = 2y, \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Pro první bod M_1 máme

$$A = 10,\ B = 0,\ C = 2,\ AC - B^2 = 20 > 0,\ A > 0,$$

a tedy bod M_1 je bodem ostrého lokálního minima. Pro bod M_2 máme

$$A = -10,\ B = 0,\ C = -\frac{4}{3},\ AC - B^2 > 0,\ A < 0$$

a tedy bod M_2 je bodem ostrého lokálního maxima. Pro bod M_3 máme

$$A = -2,\ B = 4,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0$$

a tedy bod M_3 není bodem lokálního extrému. Konečně pro bod M_4 máme

$$A = -2,\ B = -4,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0.$$

Tedy ani bod M_4 není bodem lokálního extrému.

14.16 Postačující podmínky existence extrému pro obecný případ

Nechť bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ je stacionárním bodem funkce

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Věta 14.31

1) *Jestliže* $d^2 f(P^0) > 0$ (< 0), *funkce* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *má* ostré lokální minimum (ostré lokální maximum) *v bodě* P^0.

2) *Jestliže* $d^2 f(P^0) = 0$, *potom není možné rozhodnout o extrému v* P^0 *užitím derivací druhého řádu a otázka existence extrému zůstává otevřená.*

Označme

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(P^0).$$

Uvažujme posloupnost determinantů

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n,$$

kde

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 14.32 (Sylvestrovo kritérium) *Jestliže*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) > 0$. *Jestliže*

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) < 0$.

14.17 Určení maximální a minimální hodnoty funkce na uzavřené oblasti

Máme za úkol určit největší a nejmenší hodnotu funkce

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

na *uzavřené oblasti* D. Jestliže funkce dosahuje jedné (nebo obou) těchto hodnot uvnitř oblasti, musí se pochopitelně jednat o lokální extrém. Může se však ukázat, že funkce nabývá největší nebo nejmenší hodnoty (nebo obou) v bodech na hranici dané oblasti.

Abychom našli tzv. globální (nebo také absolutní) maximum (minimum) spojité funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ na omezené uzavřené oblasti, je nutné určit všechna *lokální maxima* (*lokální minima*), kterých funkce dosahuje uvnitř dané oblasti a také největší (nejmenší) hodnoty, jichž dosahuje na hranici oblasti. Potom největší (nejmenší) z těchto čísel je hledané globální maximum (minimum) dané funkce.
Takto formulovaná úloha má vždy řešení. Jedná se o důsledek Weierstrassovy věty pro funkce více proměnných. Nebudeme zde tuto větu formulovat. Poukážeme jen na její jednorozměrný případ, který jsme již diskutovali dříve (viz Větu 6.47 na str. 108).

Příklad 14.33 *Určeme globální extrémy funkce $z = x^2 - y^2$ na oblasti $D : x^2 + y^2 \le 1$.*

Řešení. Zkoumejme funkci f z hlediska existence extrému. Položíme-li parciální derivace rovny nule, dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x &= 0 \\ z'_y &= -2y &= 0. \end{aligned}$$

Řešením tohoto systému je stacionární bod $x = y = 0$, který patří do oblasti D a neleží na její hranici. Najdeme $A = 2, B = 0, C = -2$ a $AC - B^2 < 0$. Bod $(0, 0)$ není bodem extrému. Toto si lze geometricky představit, všimneme-li si, že rovnice $z = x^2 - y^2$ je rovnicí hyperbolického paraboloidu.
Globálních extrémů musí tedy funkce z dosáhnout na hranici oblasti D. Protože hranici oblasti D lze vyjádřit pomocí rovnice

$$y^2 = 1 - x^2, \;\; x \in [-1, 1],$$

máme

$$z|_D = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.$$

Zkoumejme funkci $z = 2x^2 - 1$ z hlediska extrému, je-li $x \in [-1, 1]$. Dostáváme

$$z' = 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1, z'' = 4 > 0.$$

Minimálních hodnot nabývá funkce v bodech

$$M_1(0, 1),\ M_2(0, -1),$$

a to

$$z(M_1) = z(M_2) = -1.$$

Maximálních hodnot nabývá funkce v koncových bodech intervalu $[-1, 1]$, tj. v bodech

$$M_3(-1, 0),\ M_4(1, 0),$$

a to

$$z(M_3) = z(M_4) = 1.$$

Globální extrémy funkce $z = x^2 - y^2$ na oblasti D jsou $z = 1$ (maxima) v bodech M_3, M_4 a $z = -1$ (minima) v bodech M_1, M_2.

14.18 Vázané extrémy

Začneme formulací jednoho problému, který bude sloužit jako ilustrace pro hledání tzv. vázaného extrému.

Příklad 14.34 *Mezi všemi pravoúhlými rovnoběžnostěny s danou celkovou plochou S máme najít takový, který má největší objem.*

Řešení. Necht' jsou strany rovnoběžnostěnu označeny x, y a z. Problém se redukuje na hledání největší hodnoty funkce

$$V = xyz$$

za podmínky, že

$$xy + yz + zx = \frac{S}{2}\ .$$

Výpočet dokončíme po krátkém teoretickém výkladu.
V nejobecnějším případě je problém dán následovně: Je dána funkce

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

úkolem je nalézt extrémy za podmínky, že proměnné vyhovují m $(m < n)$ podmínkám:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
\dots & \\
\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Postup řešení je následující. Sestavíme pomocnou funkci Φ (tzv. Lagrangeovu funkci), obsahující $n + m$ proměnných

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\
+ \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

a hledáme její stacionární body. Tzn., že hledáme řešení systému rovnic

$$\Phi'_{x_1} = 0, \Phi'_{x_2} = 0, \dots, \Phi'_{x_n} = 0, \Phi'_{\lambda_1} = 0, \Phi'_{\lambda_2} = 0, \dots, \Phi'_{\lambda_m} = 0.$$

Dostáváme body, v nichž může funkce nabývat vázaných extrémů. Tato soustava rovnic poskytuje nutné podmínky, tedy ne každý bod vyhovující této soustavě musí být bodem vázaného extrému. Nebudeme hovořit o postačujících podmínkách pro body vázaného extrému. V konkrétním případě je většinou možné zjistit, zda je bod určený výše uvedenými rovnicemi bodem extrému bez toho, že bychom zkoumali, jsou-li splněny dostatečné podmínky. Popisovaná metoda je známá jako metoda **Lagrangeových multiplikátorů**, kterými jsou veličiny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Příklad 14.35 *Pokračujme v řešení započatého příkladu 14.34.*

Pomocnou funkci $\Phi(x, y, z)$ lze vyjádřit jako

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - S/2).$$

Rovnice určující body extrému jsou tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\Phi'_x = 0 & \Longrightarrow & yz & + & \lambda(y+z) & = & 0, \\
\Phi'_y = 0 & \Longrightarrow & xz & + & \lambda(x+z) & = & 0, \\
\Phi'_z = 0 & \Longrightarrow & xy & + & \lambda(y+x) & = & 0, \\
\Phi'_\lambda = 0 & \Longrightarrow & xy & + & yz + zx - S/2 & = & 0.
\end{array}$$

Odečteme-li rovnice od sebe navzájem, dostáváme

$$\begin{array}{rcl}
(z+\lambda)(y-x) & = & 0, \\
(x+\lambda)(z-y) & = & 0, \\
(y+\lambda)(z-x) & = & 0.
\end{array}$$

Odtud vyplývá, že $x = y = z$, tedy hledaný rovnoběžnostěn je krychle. Rozměry této krychle jsou

$$x = y = z = \sqrt{S/6}$$

a maximální objem je

$$V = \sqrt{\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}}\,.$$

14.19 Shrnutí

Seznámili jsme se s parciálními derivacemi výšších řádů a s jejich použitím. Odvodili jsme podmínky, kdy smíšené derivace nezáleží na pořadí derivování. Zavedli jsme si Taylorův polynom pro fukci více proměnných. Věnovali jsme se výpočtu derivací pro implicitní funkce.

V aplikacích mají časté uplatnění metody určování lokálních extrémů, maximálních či minimálních nodnot v dané uzavřené oblasti a vázaných extrémů, které jsme si uvedli, včetně podmínek jejich existence a podmínek klasifikace extrémů.

14.20 Kontrolní příklady ke kapitole 14

1. Najděte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

   (b) $f(x, y) = x^{x+y}$

   (c) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$

2. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce v daném bodě:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2, \ \ [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 2]$
(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}, \ \ [x_0, y_0, z_0] = [0, 0, 1]$

3. Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem $[x_0, y_0]$ následujících funkcí:
   (a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}, \ \ [x_0, y_0] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
   (b) $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \ \ [x_0, y_0] = [0, 0]$

4. Najděte lokální extrémy funkcí:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$
   (b) $f(x,y) = xy(4 - x - y)$
   (c) $f(x,y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$

5. Určete nejmenší a nejvetší hodnotu funkce f na množině M:
   (a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y, \ \ M$ je trojúhelník určený body $A = [0, 2]$, $B = [3, 0]$, $C = [0, -1]$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2, \ \ M$ je omezená grafy funkcí $y = \mid x \mid$ a $y = 2$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2, \ \ M = \{[x,y] : x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq \mid x \mid -1\}$

6. Určete vázané extrémy funkce f na množině určené rovnostmi:
   (a) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z, \ \ x + y + z = \frac{\pi}{2}$
   (b) $f(x,y,z) = xyz, \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x + y + z = 0$

Výsledky jsou uvedeny v části 15.14.

Kapitola 15

Výsledky testů

15.1 Vstupní test

Příklad 1.1

$$\begin{aligned}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b^3}}}\cdot\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{18}-\left(\frac{\sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}\right)^{18}}{a-b} =& \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right)^{18}-\left(b^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})}\cdot b^{-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})}\right)^{18}}{a-b}=\\ =&\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2\end{aligned}$$

Příklad 1.2

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-12} <& x+4\\ x^2+x-12 <& x^2+8x+16\\ -28 <& 7x\\ x >& -4\end{aligned}$$

Ovšem

$$\begin{aligned}x^2+x-12 \geq& 0\\ (x-3)(x+4) \geq& 0\\ x\leq -4 \text{ nebo } x\geq 3\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$x\geq 3$$

Příklad 1.3 Pro $x \in (-\infty, -1\rangle$

$$\begin{aligned} -x + x - 1 \leq& -x - 1 + 2 - x \\ x \leq& 1 \end{aligned}$$

Tj. $R_1 = (-\infty, -1\rangle$
Pro $x \in (-1, 0\rangle$

$$\begin{aligned} -x + x - 1 \leq& x + 1 + 2 - x \\ -1 \leq& 3 \end{aligned}$$

Tj. $R_2 = (-1, 0\rangle$
Pro $x \in (0, 1\rangle$

$$\begin{aligned} x + x - 1 \leq& x + 1 + 2 - x \\ x \leq& 2 \end{aligned}$$

Tj. $R_3 = (0, 1\rangle$
Pro $x \in (1, 2\rangle$

$$\begin{aligned} x + 1 - x \leq& x + 1 + 2 - x \\ 1 \leq& 3 \end{aligned}$$

Tj. $R_4 = (1, 2\rangle$
Pro $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} x + 1 - x \leq& x + 1 + x - 2 \\ x \geq& 1 \end{aligned}$$

Tj. $R_5 = (2, \infty)$
Celkem jsou tedy řešením dané nerovnice $x \in \bigcup_{i=1}^{5} R_i = \mathbb{R}$.

Příklad 1.4 Diskriminant pro zadanou rovnici je roven

$$D = 9n - 4n - 4$$

Řešíme rovnici

$$5n - 4 = 0$$

Řešením je tedy

$$n = \frac{4}{5}$$

Příklad 1.5 Je dáno $\sin x = \frac{3}{5},\ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Platí

$$\begin{aligned} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos x = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Příklad 1.6

$$
\begin{aligned}
2^{x-1} &\leq log_2 \sqrt[5]{2^2} + log_3 \left(3^{10^{-1}}\right)^6 \\
2^{x-1} &\leq 0,4 + 6 \cdot 10^{-1} \\
2^{x-1} &\leq 1 \\
x - 1 &\leq 0 \\
x &\leq 1
\end{aligned}
$$

Příklad 1.7

$$
\begin{aligned}
\frac{log(x^2-9)}{log(x+1)} &= 2 \\
log(x^2-9) &= log(x+1)^2 \\
x^2 - 9 &= x^2 + 2x + 1 \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu ovšem zadaná rovnice nemá řešení.

Příklad 1.8

$$\frac{1+i}{i} = \frac{1+i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i-i^2}{-i^2} = \frac{1-i}{1} = 1-i$$

Příklad 1.9 Zůstatky na účtu (vždy ke konci roku) budou tvořit členy geometrické posloupnosti. Vzorec pro částečný součet geometrické posloupnosti je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

V našem případě máme $a_1 = 10$, $q = 2$, $n = 10$. Tj.

$$s_{10} = 10 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 10(1024 - 1) = 10230.$$

Vydělaná částka na úrocích je tedy $10230 - 10 = 10220$.

Příklad 1.10 Platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

V našem případě máme

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 2^6 = 64.$$

Příklad 1.11 Vektory určující směr jednotlivých přímek jsou po řadě $u = (2, -3)$, $v = (3, 2)$. Protože skalární součin

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0,$$

jsou zadané přímky kolmé.

15.2 Kontrolní příklady ke kapitole 2.17

1. (a) $D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \mathbb{R},\ f(-2) = -9,\ f(10) = 15$
   (b) $D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle 1, \infty),\ f(-2) = 5,\ f(10) = 101$
   (c) $D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = (0, \infty),\ f(-2) = 0.67667...,\ f(10) = 110132.329...$
   (d) $D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -1, 1\rangle,\ f(-2) = 0.7568...,\ f(10) = 0.9129...$
2. $u(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 3,\ v(x) = \mathrm{e}^{2x^2-3},\ w(x) = 8x^4 - 24x^2 + 15,$
   $u(0) = -1,\ v(1) = \mathrm{e}^{-1},\ w(-2) = 47$
3. (a) $D(f) = \langle -6, \infty)$
   (b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
   (c) $D(f) = \langle 0, 3\rangle$
   (d) $D(f) = \langle -1, 2\rangle$
   (e) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
   (f) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$
   (g) $D(f) = \langle -6, 3\rangle$
4. (a) $f^{-1}(x) = \frac{5-x}{2}\,,\quad x \in \mathbb{R}$
   (b) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 8}\,,\quad x \in \langle 16, \infty)$
   (c) $f^{-1}(x) = \ln\sqrt{x} - \frac{3}{2}\,,\quad x \in (0, \infty)$
   (d) $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x + 2\,,\quad x \in \mathbb{R}$
5. (a)
$$R(x) = \frac{2x^2+1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{3/2}{x-1} - \frac{9}{x-2} + \frac{19/2}{x-3}.$$
   (b)
$$R(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-2)}.$$

15.3 Kontrolní příklady ke kapitole 3.10

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. (a) $|A| = 101$
   (b) $|A| = -\frac{1}{1296}$
3. (a) $h(A) = 1$ pro $\alpha = -\beta, h(A) = 3$ pro $\alpha \neq -\beta$
   (b) $h(B) = 1$ pro $\alpha = \beta = 0$, $h(B) = 3$ pro $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, $h(B) = 5$ pro $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$.

4. (a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & 8 & -5 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ 5 & 16 & 2 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -60 & -38 & 35 \\ 19 & 12 & -11 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. (a) $(\frac{5}{3}, \frac{16}{3}, -1)^T$
   (b) $(-t, t+1, t, -t)^T$

15.4 Kontrolní příklady ke kapitole 4.6

1. $B = [3, -1]$

2. Lineárně nezávislé.

3. (a)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 2 \\ 3 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$$

(b)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}^T$$

4. (a) Pro $\alpha \neq 2, \alpha \neq \frac{1}{6}$ je $\dim(M) = 3$, pro $\alpha = 2, \alpha = \frac{1}{6}$ je $\dim(M) = 2$.
   (b) Pro $\alpha \neq 0, \beta \neq 6$ je $\dim(M) = 4$, pro $\alpha = 0$, nebo $\beta = 6$ je $\dim(M) = 3$.

15.5 Kontrolní příklady ke kapitole 5.11

1. $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{30}} = -0.1825...$

2.

3. (a) $w = (2, 0, -3, 5)$
   (b) $w = (-2, 3, 1, -1)$

15.6 Kontrolní příklady ke kapitole 6.26

1. (a) 6
   (b) -6
   (c) 1
   (d) -5
   (e) 1

2. (a) Odstranitelná nespojitost.
   (b) Odstranitelná nespojitost.
   (c) Nespojitost 2. druhu.

3. (a) Spojitá na $\mathbb{R}$.
   (b) Spojitá na $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$.

4. (a) 3
   (b) $\frac{2}{9}$
   (c) $-\frac{1}{9}$

5. (a) $y = 4x - 4$.

6. (a) $y = -3x + 3$.

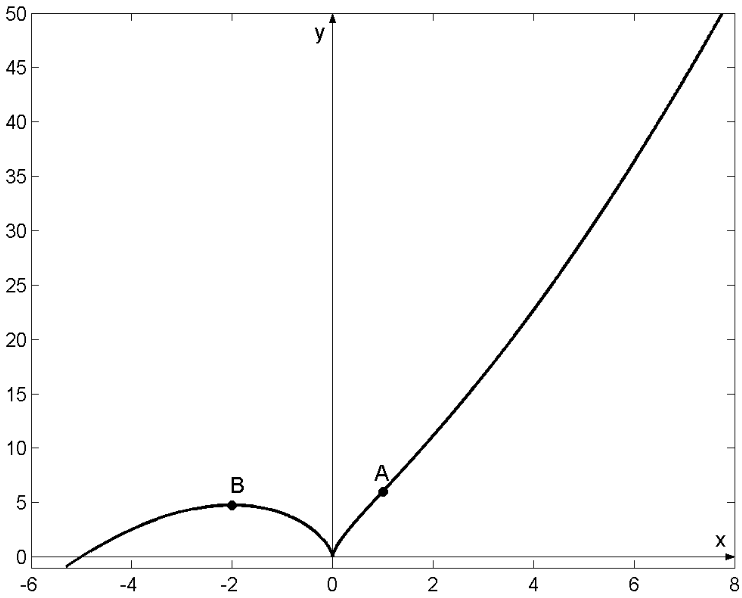
7. (a) $f'(x) = 4$, diferencovatelná na $\mathbb{R}$.

8. (a) $f(1.01) = 1 + 5(0.01)^4 = 1.00000005$

15.7 Kontrolní příklady ke kapitole 7.21

1. (a) $f'(x) = 2x + 3, \;\; f''(x) = 2$
   (b) $f'(x) = 2\sin x \cos x, \;\; f''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

6. (e) Graf funkce je na náčrtku 15.7.1.
   (f) Graf funkce je na náčrtku 15.7.2.
   (g) Graf funkce je na náčrtku 15.7.3.
   (h) Graf funkce je na náčrtku 15.7.4.
   (i) Graf funkce je na náčrtku 15.7.5.



Obrázek 15.7.1: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$.

15.8 Kontrolní příklady ke kapitole 8.16

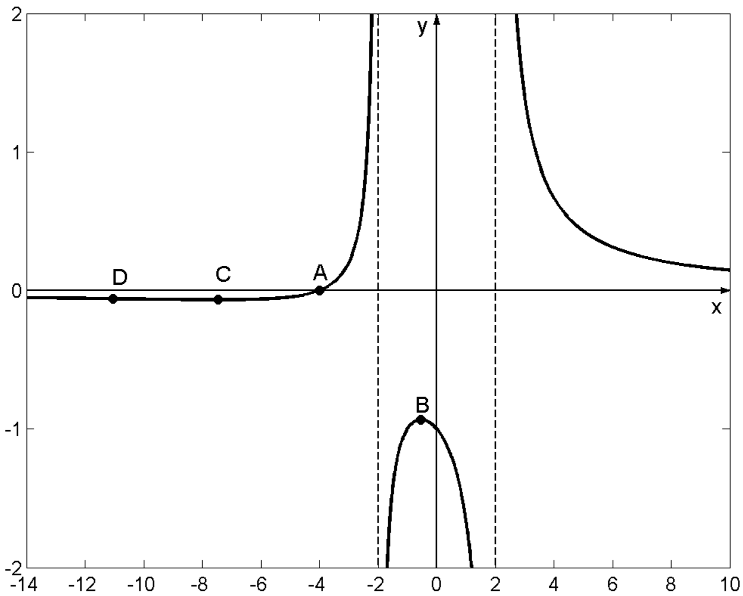
1. (a) Konverguje.
   (b) Konverguje.
   (c) Diverguje.
   (d) Konverguje.
   (e) Konverguje.

2. Interval konvergence je:
   (a) $(-1, 1)$
   (b) $(-1, 1\rangle$
   (c) $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

3. (a) $f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots$
   (b) $f(x) = (x-1)^4 + (x-1)^3 - (x-1)^2 - 6(x-1) + 7$
   (c) $f(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + \dots$

15.9 Kontrolní příklady ke kapitole 9.8

1. (a) $\frac{1}{2}x^2$



Obrázek 15.7.2: Graf funkce $f(x) = (x+4)/(x^2-4)$.

(b) $\frac{1}{6}x^6$

(c) $\sin x + \cos x$

(d) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x$

15.10 Kontrolní příklady ke kapitole 10.6

1. (a) $-\frac{1}{\ln 2}2^{-x}$

   (b) $\frac{1}{5\ln 10}10^{5x}$

   (c) $-\frac{1}{\ln 2}2^{\cos x}$

   (d) $-\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x$

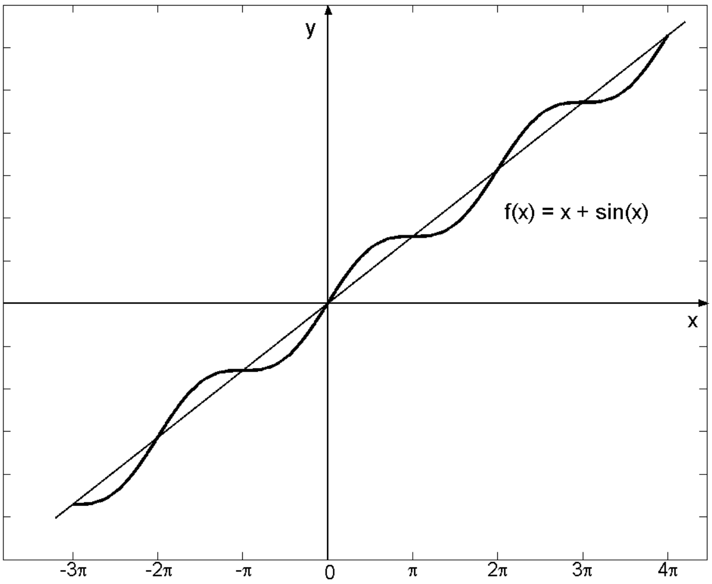
15.11 Kontrolní příklady ke kapitole 11.12

1. (a) 1

   (b) $\frac{2}{3}$

   (c) 2

   (d) -4



Obrázek 15.7.3: Graf funkce $f(x) = x + \sin x$.

15.12 Kontrolní příklady ke kapitole 12.6

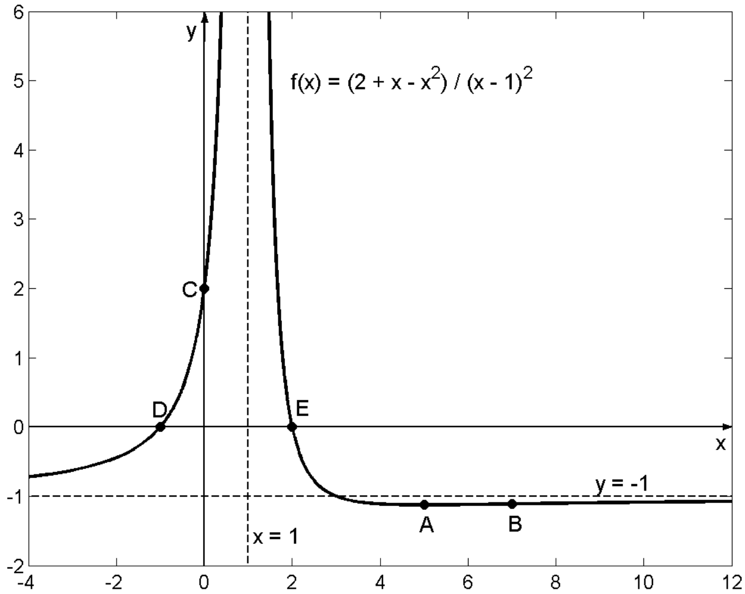
1. (a) 6
   (b) Integrál neexistuje.
   (c) $\frac{1}{2a}$
   (d) $\frac{b}{a+b^2}$

15.13 Kontrolní příklady ke kapitole 13.4

1. (a) $\frac{1}{2}$
   (b) 2
2. (a) $\{[x, y], x^2 + y^2 = 1\}$
   (b) $\{[x, y], x = k\pi,\ y = k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$
3. (a) $f'_x = \frac{y}{1+x^2},\ f'_y = \frac{-x}{1+y^2}$
   (b) $f'_x = \frac{y}{x} x^{\frac{y}{z}-1},\ f'_y = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x,\ f'_z = \frac{-y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x$

15.14 Kontrolní příklady ke kapitole 14.20

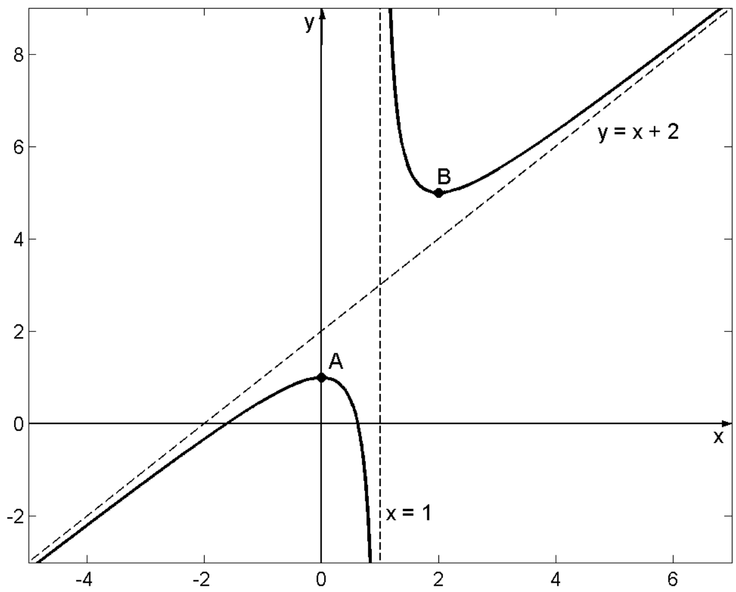
1. (a) $f''_{xx} = 12x^2 - 8y^2,\ f''_{xy} = -16xy,\ f''_{yy} = 12y^2 - 8x^2$



Obrázek 15.7.4: Graf funkce $f(x) = (2 + x - x^2)/(x - 1)^2$.

(b) $f''_{xx} = x^{(x+y)} \left[(\ln x + \frac{x+y}{x})^2 + \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right]$, $f''_{xy} = x^{(x+y)} \left[\ln^2(x) + \frac{x+y}{x} \ln x + \frac{1}{x}\right]$, $f''_{yy} = x^{(x+y)} \ln^2(x)$

2. (a) $x + y + z = \sqrt{3}$
   (b) $2x + 2y - z = 2$
   (c) $z = 1$



Obrázek 15.7.5: Graf funkce $(x^2 + x - 1)/(x - 1)$.

Kapitola 16

Ukázky zadání písemných prací

V této kapitole uvádíme několik písemných prací, které byly v uplynulých letech zadávány na semestrálních zkouškách.

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1,
ze dne 6. 1. 2004
A

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Načrtněte sudou funkci s definičním oborem $(-\pi/2;\pi/2)$, a která bude mít aspoň jedno lokální minimum a aspoň jedno lokálnˇ maximum a aspoň jeden inflexní bod. Význačné body popište a zvýrazněte.

   (b) Určete definiční obor funkce $y = f(x)$ a určete, pokud existuje, inverzní funkci.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$

Řešení:

$$D(f) : \frac{x}{2-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - x \neq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; 2) .$$

$$f^{-1} : y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{2-y}},$$

$$x^2 = \frac{y}{2-y},$$

$$2x^2 - x^2y = y,$$

$$2x^2 = y(x^2+1),$$

$$y = \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

2. (a) Stanovte číslo k tak, aby vektor $\overline{a} = (1; -2; k)$ byl lineární kombinací vektorů $\overline{u} = (3; 0; 2), \overline{v} = (2; -1; 5)$.

Řešení:

$$\alpha\overline{u} + \beta\overline{v} = \overline{a},$$

$$\alpha(3; 0; 2) + \beta(2; -1; 5) = (1; -2; k),$$

$$3\alpha + 2\beta = 1, -\beta = -2, 2\alpha + 5\beta = k,$$

$$k = 8.$$

   (b) Určete řešení soustavy:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$$x = 1y = 2, z = -2.$$

3. (a) Určete derivaci funkce $f(x)$ a výsledek upravte na co nejjednodušší tvar.

$$f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x + \frac{1}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \sqrt{x^2+1}.$$

(b) Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi - 2\arctan x}{e^{(3/x)}-1}\right)$.

Řešení: Pomocí l'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi - 2\arctan x}{e^{(3/x)}-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2\frac{1}{1+x^2}}{e^{(3/x)}\frac{-3}{x^2}}\right) =$$

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+x^2}}{e^{(3/x)}\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{2}{3}.$$

4. Určete $\int \dfrac{x}{2x^2+2x+5}dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+2-2}{2x^2+2x+5}dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx - \frac{1}{4}\int \frac{2}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx.$$

Poslední integrál si upravíme

$$\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{2(x^2+x)+5}dx = \int \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 5}dx =$$

$$\int \frac{1}{2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})\right]^2+1}dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{2x+1}{3}+C.$$

Dosazením dostaneme

$$\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)dx - \frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3}+C.$$

5. Určete délku křivky $x^{(2/3)} + y^{(2/3)} = a^{(2/3)}$, kde $x, y \in [0; a]$.
Řešení: Provedeme parametrizaci

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, \pi/2].$$

$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} 3a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cos t\sin t dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\pi/2}\sin 2t dt = \frac{3}{2}a\frac{-\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.$$

6. Proud v elektrick,m obvodu je dán relací $i(t) = 2te^{-3t}$. Určete celkový náboj $Q = \int\limits_0^{+\infty} i(t)dt$.
Řešení:

$$Q = \int_0^{+\infty} 2te^{-3t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x 2te^{-3t}dt = (*).$$

$$\int 2te^{-3t}dt = |u = t, u' = 1, v' = e^{-3t}, v = -\frac{1}{3}e^{-3t}| = -\frac{2}{3}te^{-3t}+\frac{2}{3}\int e^{-3t}dt = -\frac{2}{3}te^{-3t}-\frac{2}{9}e^{-3t}.$$

Dosazením do (*) dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2}{3}te^{-3t} - \frac{2}{9}e^{-3t}\right]_0^x = \frac{2}{9}\lim_{x\to\infty}\left[-e^{-3x}(3x+1)+1\right] = \frac{2}{9}.$$

7. Najděte extrémy funkce $z(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
Řešení:

$$z'_x = 2x + y - 2, z'_y - x + 2y - 1.$$

$$2x + y - 2 = 0, x + 2y - 1 = 0 \to x = 1, y = 0.$$

$$z''_{xx} = 2, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = 1.$$

$$D - 1 = 2 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

V bodě $[1; 0]$ je lokální mimimum.

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1, ze dne 6. 1. 2004
B

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Načrtněte lichou funkci s definičním oborem $(-e; e)$, která bude mít aspoň jedno lokální minimum a aspoň jedno lokální maximum a aspoň jeden inflexní bod. Význačné body popište a zvýrazněte.

   (b) Určete definiční obor funkce $y = f(x)$ a určete, pokud existuje, inverzní funkci.

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|.$$

Řešení:

$$D(f) : \frac{x+3}{x-3} > 0 \quad \wedge \quad x-3 \neq 0.$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$$

$$f^{-1} : y = \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| \to x = \ln\left|\frac{y+3}{y-3}\right|,$$

$$e^x = \frac{y+3}{y-3},$$

$$y = \frac{3e^x+3}{e^x+1}.$$

2. (a) Stanovte číslo k tak, aby vektor $\overline{a} = (2; k; -1)$ byl lineární kombinací vektorů $\overline{u} = (1; 3; 1), \overline{v} = (1; 2; 2)$.

Řešení:

$$\alpha\overline{u} + \beta\overline{v} = \overline{a},$$

$$\alpha(1; 3; 1) + \beta(1; 2; 2) = (2; k; -1),$$

$$\alpha + \beta = 2, 3\alpha + 2\beta = k, \alpha + 2\beta = -1,$$

$$\alpha = 5, \beta = -3, k = 9.$$

   (b) Určete řešení soustavy:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 24x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -24 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 6 & -28 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 19 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 19 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3 + \frac{30 \cdot 6}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -10 + \frac{11 \cdot 30}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{19} \end{array}\right).$$

3. (a) Určete derivaci funkce $f(x)$ a výsledek upravte na co nejjednodušší tvar.

$$f(x) = \arcsin \frac{2x^2}{1+x^4}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \frac{4x(1+x^4) - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} =$$

$$\frac{1+x^4}{\sqrt{1+2x^4+x^8-2x^2}} \cdot \frac{4x+4x^5-8x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{4x(1-x^4)}{\sqrt{1-2x^4+x^8} \cdot (1+x^4)} =$$

$$\frac{4x(1-x^4)}{\sqrt{(1-x^4)^2} \cdot (1+x^4)} = \frac{4x}{1+x^4}.$$

(b) Určete $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4} \right)$.

Řešení:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cos x}{x^4} \right) =$$

pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-(e^x - e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \sin x}{4x^3} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-(e^x + e^{-x}) \cos x + (e^x - e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \cos x}{12x^2} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2(e^x - e^{-x}) \sin x}{12x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x}) \sin x}{6x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(e^x + e^{-x}) \sin x + (e^x - e^{-x}) \cos x}{12x} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(e^x - e^{-x}) \sin x + (e^x + e^{-x}) \cos x + (e^x + e^{-x}) \cos x - (e^x - e^{-x} \sin x}{12} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2(e^x + e^{-x}) \cos x}{12} \right) = \frac{1}{3}.$$

4. Určete $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4x^3+6x}{x^4+x^2+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1} + \frac{4x}{x^4+x^2+1} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln |x^4+x^2+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C.$$

5. Určete délku křivky zadané parametricky $x = (t - \sin t), y = (1 - \cos t)$, kde $t \in [0; 2\pi]$.
Řešení:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt =$$

$$\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left(-cos \frac{t}{2} \right|_0^{\pi} = 4(1 + 1) = 8.$$

6. Proud v elektrickém obvodu je dán relací $i(t) = 3te^{-2t}$. Určete celkový náboj $Q = \int\limits_0^{+\infty} i(t) dt$.
Řešení:

$$Q = \int_0^{+\infty} 3te^{-2t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x 3te^{-2t} dt =$$

$$|u = t, u' = 1, v' = e^{-2t}, v = \frac{-1}{2} e^{-2t}|$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{3}{2} te^{-2t}|_0^x + \frac{3}{2} \int_0^x e^{-2t} dt \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{3}{2} te^{-2t}|_0^x - \frac{3}{4} e^{-2t} dt|_0^x \right] = \frac{3}{4}.$$

7. Najděte extrémy funkce $z(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$, $x > 0, y > 0$.
Řešení:

$$z'_x = 3x^2 y^2 (6 - x - y) - x^3 y^2, z'_y = 2x^3 y (6 - x - y) - x^3 y^2.$$

$$x^2 y^2 (18 - 4x - 3y) = 0,$$
$$x^3 y (12 - 2x - 3y) = 0,$$

stacionární bod (3;2).

$$z''_{xx} = 6xy^2 (6 - 2x - y), z''_{xy} = x^2 y (36 - 8x - 9y), z''_{yy} = 2x^3 (6 - x - 3y).$$

$D_1 < 0, D_2 < 0$ - Extrém nenestává.

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1, ze dne 2. 2. 2004
A

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Užitím rozkladu na parciální zlomky vypočtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(n+1) + Bn, \\ 0 &= A + B, \\ 1 &= A, \\ -1 &= B. \end{aligned}$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

(b) Uveďte nutnou podmínku konvergence řady.
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2. Určete inverzní matici k matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a výsledek ověřte.
Řešení:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3. (a) Úpravou vypočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}.$$

Řešení:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2}.$$

(b) Vypočtěte
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right).$$

Řešení:
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})}{-x^{-2}}=1.$$

4. Zderivujte a upravte
$$y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Řešení:
$$y'=(x+\sqrt{x^2+1})\cdot(-1)(x+\sqrt{x^2+1})^{-2}\cdot(1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}2x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Vypočtěte integrály

(a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx,$$

Řešení:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)d=\left|\begin{array}{ll} u=x, & u'=1\\ v'=\sin 2x, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=$$
$$\left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

(b)
$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Řešení:
$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left|\begin{array}{l}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2t^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{1+x^2}+C.$$

6. Vypočtěte nevlastní integrál
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

Řešení:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{k\to+\infty}\int_{-1}^{k}\frac{dx}{x^2+2x+3}=*.$$
$$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{\sqrt{2}}=t\\ dx=\sqrt{2}dt\end{array}\right|=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$
$$*=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^k=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{k+1}{\sqrt{2}}\right)\right)-\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

7. Vypočtěte extrémy funkce
$$z=x^2+y^2-6x+9.$$

Řešení:
$$z'_x=2x-6\Rightarrow x=3,$$
$$z'_y=2y\Rightarrow y=0.$$
$$z''_{xx}=2>0, z''_{yy}=2, z''_{xy}=0.$$
$$2\cdot 2-0>0\Rightarrow \text{ extrém nastává, v bodě } [3;0] \text{ je minimum.}$$

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1, ze dne 6. 1. 2004

B

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Užitím rozkladu na parciální zlomky vypočtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2},$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(n+2) + B(n+1), \\ 0 &= A + B, \\ 1 &= 2A + B, \\ 1 &= A, \\ -1 &= B. \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}1\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2},$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Uveďte nutnou podmínku konvergence řady.
Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} a_n = 0.$$

2. Určete inverzní matici k matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a výsledek ověřte.
Řešení:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Úpravou vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1.$$

(b) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

4. Zderivujte a upravte

$$y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right).$$

Řešení:

$$y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

5. Vypočtěte integrály

(a)

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} x\cos(2x)dx,$$

Řešení:

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} x\cos(2x)dx, \left| \begin{array}{ll} u = x, & u' = 1 \\ v' = \cos 2x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left[x\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin(2x)dx =$$

$$0 + \left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\int \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}}dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{6x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} 1 + 3x^2 = t \\ 6xdx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+3x^2} + C.$$

6. Vypočtěte nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{k\to+\infty}\int_{-2}^{k}\frac{dx}{x^2+4x+6}=*.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+6}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l}\frac{x+2}{\sqrt{2}}=t\\ dx=\sqrt{2}dt\end{array}\right|=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right).$$

$$*=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-2}^{k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{k+2}{\sqrt{2}}\right)\right)-\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

7. Vypočtěte extrémy funkce

$$z=x^2+y^2+10y+25.$$

Řešení:

$$z'_x=2x,\quad z'_y=2y+10\quad\Rightarrow x=0,y=-5.$$

$$z''_{xx}=2>0,z''_{yy}=2,z''_{xy}=0,$$

$$2\cdot 2-0>0\Rightarrow\text{ nastává extrém, v bodě }[0;-5]\text{ je minimum.}$$

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1, ze dne 2. 2. 2004
C

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(2n)!}.$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(n+1)3^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n3^n}{(2n)!}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{3}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

řada konverguje.

(b) Uveďte příklad řady, která splňuje nutnou podmínku konvergence a diverguje.
Řešení:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

2. Určete inverzní matici k matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a výsledek ověřte.
Řešení:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Úpravou vypočtěte

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{tg}\ (3x-2)}{6x-4}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{tg}\ (3x-2)}{6x-4} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{\sin(3x-2)}{3x-2} \cdot \lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{1}{\cos(3x-2)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

4. Zderivujte a upravte

$$y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Řešení:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin x}{1+sinx}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{\cos x}.$$

5. Vypočtěte integrály

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)dx,$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)dx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & u'=1\\ v'=\sin 3x, & v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$\left[-x\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(3x)dx=\frac{\pi}{9}+\left[\frac{\sin 3x}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{9}.$$

(b)

$$\int\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx.$$

Rešení:

$$\int\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx.=\left|\begin{array}{l}1+x^3=t\\ 3x^2dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{1+x^3}+C.$$

6. Vypočtěte nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+6}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{k\to+\infty}\int_{-2}^{k}\frac{dx}{x^2+4x+6}=*.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+6} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+2}{\sqrt{2}} = t \\ dx = \sqrt{2}dt \end{array} \right| =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right).$$

$$* = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-2}^{k} = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{k+2}{\sqrt{2}}\right)\right) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Vypočtěte extrémy funkce a tečnou rovinu v bodě extrému

$$z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5.$$

Řešení:

$$z'_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,$$

$$z'_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2,$$

$$z''_{xx} = 2 > 0, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = 0,$$

$$2 \cdot 2 - 0 > 0$$

Nastává extrém, v bodě $[1; -2]$ je minimum. Tečná rovina $z = 5$.

SEMESTRÁLNÍ PÍSEMNÁ ZKOUŠKA Z MBA1, ze dne 6. 1. 2004
D

Každý příklad je hodnocen maximálně 10 body.

1. (a) Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n100^n}{(2n)!}.$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(n+1)100^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n100^n}{(2n)!}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{100}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Řada konverguje.

(b) Uveďte příklad řady, která splňuje nutnou podmínku konvergence a diverguje.
Řešení:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

2. Určete inverzní matici k matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

výsledek ověřte.
Řešení:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Úpravou vypočtěte

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,(4x-3)}{8x-6}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,(4x-3)}{8x-6} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{\sin(4x-3)}{4x-3} \lim_{x\to\frac{3}{4}} \frac{1}{\cos(4x-3)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+x\frac{1}{1+x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+(1+x)\frac{1}{1+x}+1}=-\frac{1}{2}.$$

4. Zderivujte a upravte

$$y=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Řešení:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+(1-\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{\sin x}.$$

5. Vypočtěte integrály

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)dx,$$

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)dx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & u'=1\\ v'=\cos 3x, & v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=$$

$$\left[x\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(3x)dx=0+\left[\frac{\cos 3x}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{9}(-1-1)=-\frac{2}{9}.$$

(b)

$$\int\frac{9x^2}{\sqrt{1+3x^3}}dx.$$

Řešení:

$$\int\frac{9x^2}{\sqrt{1+3x^3}}dx=\left|\begin{array}{l}1+3x^3=t\\ 9x^2dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{1+3x^3}+C.$$

6. Vypočtěte nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

Řešení:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{k\to+\infty}\int_{-1}^{k}\frac{dx}{x^2+2x+3}=*.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{\sqrt{2}} = t \\ dx = \sqrt{2}dt \end{array} \right| =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$* = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left[\text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^k = \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\left(\text{arctg}\left(\frac{k+1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \text{arctg } 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Vypočtěte extrémy funkce a tečnou rovinu v bodě extrému

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5.$$

Řešení:

$$z'_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1,$$

$$z'_y = 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2,$$

$$z''_{xx} = 2 > 0, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = 0,$$

$$2 \cdot 2 - 2 > 0.$$

Nastává extrém, v bodě $[-1; 2]$ je minimum. Tečná rovina $z = 5$.

Kapitola 17

Doporučená literatura

[1] L. Bican: *Lineární algebra,* SNTL 1979, rozšířené vydání 2001.

[2] G. Birkhoff, T.C. Bartee: *Aplikovaná algebra,* Alfa, Bratislava 1981.

[3] G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra,* Alfa, Bratislava 1973.

[4] M. Demlová, J. Nagy: *Algebra,* MVŠT —III, SNTL 1982.

[5] V. Havel, J. Holenda: *Lineární algebra,* SNTL 1984.

[6] I. Horová, J. Zelinka: *Numerické metody,* MU PřF Brno, 2004, druhé vydání.

[7] Z. Horský: *Množiny a matematické struktury,* MVšT — I, SNTL 1980.

[8] Z. Horský: *Vektorové prostory,* MVŠT — II, SNTL 1980.

[9] B. Hrůza, H. Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie,* VUT,1990.

[10] P. Kaprálik, J. Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie,* Alfa, Bratislava, 1987.

[11] S. Míka: *Numerické metody algebry,* MVŠT — IV, SNTL 1982.

[12] T. Šalát: *Metrické priestory,* Alfa, Bratislava 1981.

[13] L.E. Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988.

[14] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982.

[15] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Integrální počet*, MVŠT - VI., Praha 1983.

[16] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984.

[17] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.

[18] V. Jarník: *Integrální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.

Index