**Relace zobrazení z množiny do množiny**

**Def.** Relace R z množiny M do množiny N se nazývá **relace zobrazení z M do N**, právě když

$$(\forall a \in M)(\forall b,b' \in N)\ (\ ([a,b] \in R \ \wedge\ [a,b'] \in R) \Rightarrow b = b'\ ),$$

nebo: $((\forall a \in M)(\forall b,b' \in N)\ (\ ([a,b] \in R \wedge\ b \neq b') \Rightarrow\ [a, b'] \notin R)$.

Jestliže ve výše uvedené definici je **M = N**, pak mluvíme o **zobrazení v množině M.**
Z definice zobrazení z množiny M do množiny N plyne, že ke každému $a \in M$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in N$ takový, že platí $[a,b] \in R$. Prvek $a \in M$ se nazývá vzor, prvek $b \in N$ jeho obraz.

**Typy zobrazení** (rozlišujeme 4 typy)
Zobrazení z množiny M do množiny N, které
1. není zobrazením celé množiny M, ani zobrazením na celou množinu N,
2. je zobrazením nikoliv celé množiny M na celou množinu N,
3. je zobrazením celé množiny M do nikoliv celé množiny N,
4. je zobrazením celé množiny M na celou množinu N

**Def**. Zobrazení R **z množiny M do množiny N** se nazývá **prosté,** právě tehdy, když relace $\mathbf{R^{-1}}$ je zobrazení **z množiny N do množiny M.**
(Jinak: Zobrazení R je prosté právě tehdy, mají-li každé dva **různé** prvky definičního oboru **různé** obrazy.)

1. Rozhodněte, zda následující relace jsou zobrazení z množiny M do množiny N,
M = {a,b,c,d,e}, N = {1,3,5,7,9}
a) $R_1$ = { [a,5], [b,3], [c,9], [d,7], [e,3] }
b) $R_2$ = { [d,7],[e,9],[b,1],[a,5]}
c) $R_3$ = {[b,9],[a,7],[c,5],[b,1],[e,3]}
d) $R_4$ = {[e,1],[d,7],[c,3],[b,9],[a,5],}
Určete typy zobrazení a rozhodněte, která jsou prostá.

2. Určete, které z následujících relací v množině M = {0,1,2, ...,6} jsou zobrazení. V případě zobrazení zapište definiční obor a obor hodnot. Zobrazení znázorněte graficky.
a) $R_1$ = {[2,3], [3,4], [1,3], [4,5], [0,3]}
b) $R_2$ = {[3,2], [2,3], [1,5], [3,4], [1,2]}.

3. Je dána množina $A = \{x \in Z\colon x \mid 36\}$ kde Z = {1, 2, 3, ...,20}. Doplňte uspořádané dvojice [2, ], [ ,9], [4, ], [ ,2], [12, ] tak, aby vzniklo a) zobrazení v množině A, které je prosté, b) zobrazení v množině A, které není prosté.

4. Relace R v množině M = {0,1,2, ...,8} obsahuje všechny uspořádané dvojice [a,b], kde b je zbytek při dělení čísla a třemi. Určete relaci R výčtem prvků, graficky ji znázorněte a určete zda R je zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jeho typ a rozhodněte zda je prosté.

5. Jsou dány množiny M = {1,2,3,4} a N = {a,b,c,d}.
a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do množiny N, která není zobrazením. Dále definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do množiny M. Zapište výčtem prvků relaci $R \circ Z$ a rozhodněte zda je tato relace zobrazením. Pokud ano určete jeho typ.

b) Definujte výčtem prvků vždy alespoň dvě zobrazení $R_1$, $R_2$ (pokud existují), pro která platí:

- Jde o zobrazení z množiny M do množiny N, které není zobrazením celé množiny M, ani na celou množinu N.
- Jde o zobrazení (celé) množiny M do množiny N, které není zobrazením na celou množinu N.
- Jde o zobrazení z množiny M na (celou) množinu N, které není zobrazením celé množiny M.
- Jde o zobrazení množiny M na množinu N.

Sestrojte uzlový graf každého z těchto zobrazení a rozhodněte zda je či není prosté.

6. Jsou dány množiny $A = \{1,2,3,a,b\}$, $B = \{a,b,c,d\}$. Definujte (pokud to lze) všechny typy zobrazeni z množiny A do množiny B. V každém případě rozhodněte, zda se jedná o zobrazení prosté.

7. Jsou dány množiny $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1, -1\}$. Určete výčtem prvků všechna zobrazení, která jsou zobrazením celé množiny A do nikoliv celé množiny B.

8. Je dána množina $M = \{1,2,3\}$. V množině M jsou dány binární relace R, S takto:
$R = \{[x,y] \in M \times M: x \neq 3 \wedge y = 1 \}$, $S = \{ [1,2], [2,3],[3,1]\}$.
Jsou relace R, S zobrazení v množině M ? Pokud ano, určete přesně jejich typ a rozhodněte zda jsou prostá. Dále určete RoS, SoR a rozhodněte, zda jsou tyto složené relace zobrazení v množině M.

9. Je dána množina $A = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$. V množině A jsou definovány dvě binární relace R, S takto: $R = \{ [x,y] \in A^2 : y = |x| \}$, $S = \{ [x,y] \in A^2: y = - x\}$. Relace R a S určete výčtem prvků a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení v množině A. Pokud ano, rozhodněte zda jsou prostá a určete přesně jejich typ. Jsou zobrazením v množině A relace $R_oS$, $R^{-1}$, $S^{-1}$ ?

10. Je dána množina $M = \{1,2,3\}$. V této množině jsou definovány binární relace
$R = \{[x,y] \in M^2 : x \neq y \Rightarrow x = y \}$, $S = \{ [1,3], [2,1], [3,2]\}$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou tyto relace **permutace** množiny M. Je některá z relací R, S uspořádáním v množině M ?
Na množině M definujte další permutaci T a ověřte, že platí vztah:
Ro (So T ) = (R oS) o T .

11. Jsou dány relace
$R = \{ [x,y] \in \mathbf{R}^2 : y = x \}$
$S = \{ [x,y] \in \mathbf{R}^2 : y = |x| \}$
$T = \{ [x,y] \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \}$.
Rozhodněte, která z těchto relací je zobrazení v množině **R** všech reálných čísel. Sestrojte kartézský graf každé zadané relace.

12. Definujte alespoň jedno zobrazení z množiny A do množiny B, je-li:
A - množina všech osob přítomných v určité místnosti
B - množina všech jihomoravských měst

A - množina všech mužů
B - množina všech žen

A - množina všech občanů ČR
B - množina všech rodných čísel (v ČR).

## Ekvivalence množin

**Def.: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou ekvivalentní právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.**

1. Jsou dány množiny $A = \{0, 1, 2, ..., 6\}$, $B = \{k, l, m, n, o\}$, $C = \{m, n, l, k, o\}$ a $D = \{2, 3, 4, ..., 8\}$. Rozhodněte, zda platí: $A \sim B$, $B \sim C$, $B \sim D$, $D \sim A$, $B = C$.

2. Určete, zda jsou množiny A, B ekvivalentní. Své rozhodnutí zdůvodněte.
$A = \{ x \in \mathbf{N}: x > 0 \}$, $B = \{x \in \mathbf{C}: 2 \mid x \wedge x > 0 \}$.

3. Zdůvodněte, že pro libovolné množiny A, B platí:
$A \sim A$, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, $(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.

4. Ukažte, že množina **N** všech přirozených čísel je ekvivalentní
a) s množinou A trojnásobků všech přirozených čísel
b) s množinou B všech přirozených čísel větších než 10
c) s množinou S všech přirozených čísel sudých
d) s množinou L všech přirozených čísel lichých.

**Def.: Množina A je konečná právě tehdy, když není ekvivalentní s žádnou svou vlastní podmnožinou. Množina, která není konečná se nazývá nekonečná. Tzn., že množina B je nekonečná právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je s množinou B ekvivalentní.**

5. Zdůvodněte (užitím definice), že množina $M = \{a, b, c, d\}$ je konečná a množiny A, B, S, L z příkladu 4 jsou množiny nekonečné.

## Podobnost lineárně uspořádaných množin

**Def. Množiny $(M, R_1)$, $(N, R_2)$ jsou dvě lineárně uspořádané množiny. Zobrazení Z (celé) množiny M na (celou) množinu N, které má vlastnost**

$$(\forall x,y \in M)\ [\ x \underset{R_1}{\prec} y \Rightarrow Z(x) \underset{R_2}{\prec} Z(y)\ ],$$

**se nazývá <u>podobné zobrazení</u> lineárně uspořádané množiny $(M, R_1)$ na lineárně uspořádanou množinu $(N, R_2)$. Existuje-li podobné zobrazení lu množiny $(M,R_1)$ na lu množinu $(N, R_2)$ pak říkáme, že lu množiny $(M, R_1)$, $(N, R_2)$ jsou podobné a zapisujeme $(M, R_1) \approx (N, R_2)$.**

6. Jsou lineárně uspořádané množiny $\lfloor A \rfloor$, $\lfloor B \rfloor$ podobné ? Odpověď zdůvodněte.
a) $\lfloor A \rfloor = \lfloor \{5,6,7,8,9\} \rfloor$, $\lfloor B \rfloor = \lfloor \{t,s,r,q,p\} \rfloor$
b] $\lfloor A \rfloor = \lfloor \{a,b,c,d\} \rfloor$, $\lfloor B \rfloor = \lfloor \{\alpha, \beta, \gamma\} \rfloor$
c] $(A, <)$, $(B, >)$, kde $A = \{7,3,1,4\}$, $B = \{15, 2, 5, 8\}$.

7. Je dána množina $K = \{x \in \mathbf{C}: x \mid 5\}$ a relace $R_1$ definovaná v této množině vztahem $y < x$, tj. $R_1 = \{[x,y] \in K \times K: y < x\}$. 1. Určete množinu K výčtem prvků a dokažte, že $R_1$ je lineární uspořádání množiny K. Dále je dána množina $L = \{a \in \mathbf{N}: a \mid 8\}$ a v ní relace $R_2 = \{[a,b] \in \mathbf{N}: a < b\}$. 2. Dokažte, že $R_2$ je lineární uspořádání mn. L. 3. Definujte podobné zobrazení lu množiny $(K, R_1)$ na lu množinu $(L, R_2)$ a dokažte, že $(K,R_1) \approx (L,R_2)$ .

8. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:
a) Jsou-li dvě množiny podobné, pak jsou obě lineárně uspořádané. b) Mají-li dvě lu množiny první prvek, pak jsou podobné. c) Dvě podobné konečné množiny mají stejný počet prvků.
d) Platí-li $(A, R_1) \approx (B, R_2)$, pak $A \sim B$.