STATISTICKÉ METODY V GEOGRAFII

STATISTICKÉ METODY V GEOGRAFII

Karl Friedrich Gauss
1777-1855

Teoretická rozdělení

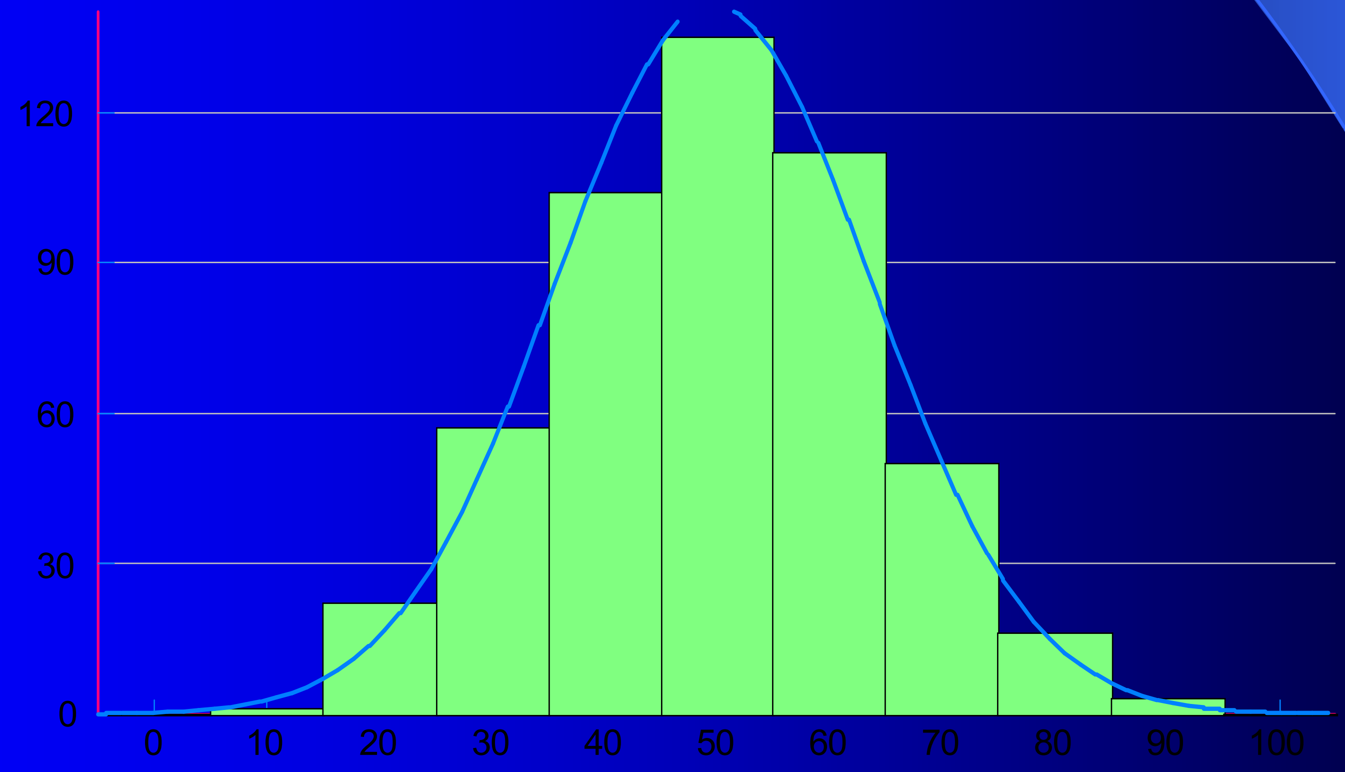
Základní pojmy

- náhodná veličina spojitá
- Může teoreticky nabývat nekonečného množství hodnot z určitého intervalu např.teplota)

- náhodná veličina nespojitá
- Nabývá jen konečného množství hodnot urč. Intervalu. Např. počet měsíců s teplotou nad…)
- Každé hodnotě je možno přiřadit pravděpodobnost jejího výskytu, součet všech dílčích pravděpodobností je 1

Teoretická rozdělení

- histogram – grafické znázornění četností
- rozsah souboru se blíží k nekonečnu + náhodná veličina je spojitá
- – frekvenční funkce / hustota pravděpodobnosti

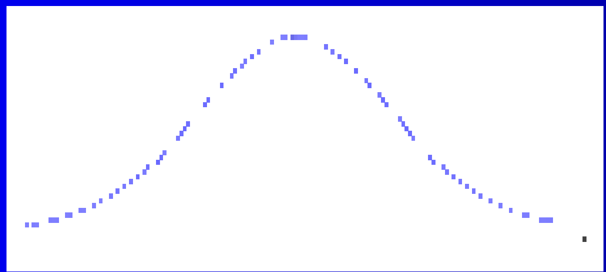


- kumulativní relativní četnost tj. součtová čára -
- distribuční funkce
- obr.

Normální rozdělení / Gaussovo, Laplaceovo- Gaussovo

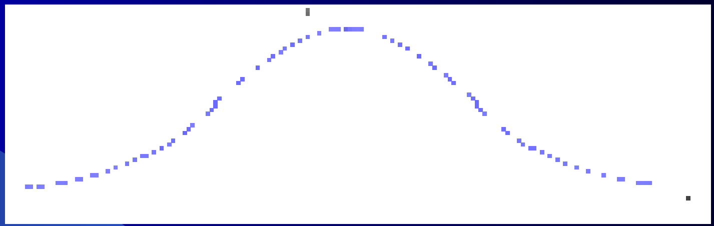
- **Normální rozdělení se univerzálně používá k aproximaci (k přibližnému vyjádření) rozdělení pravděpodobnosti velkého množství náhodných veličin (v biologii, technice, ekonomii atd.)**

Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je symetrická zvonovitá Gaussova křivka.

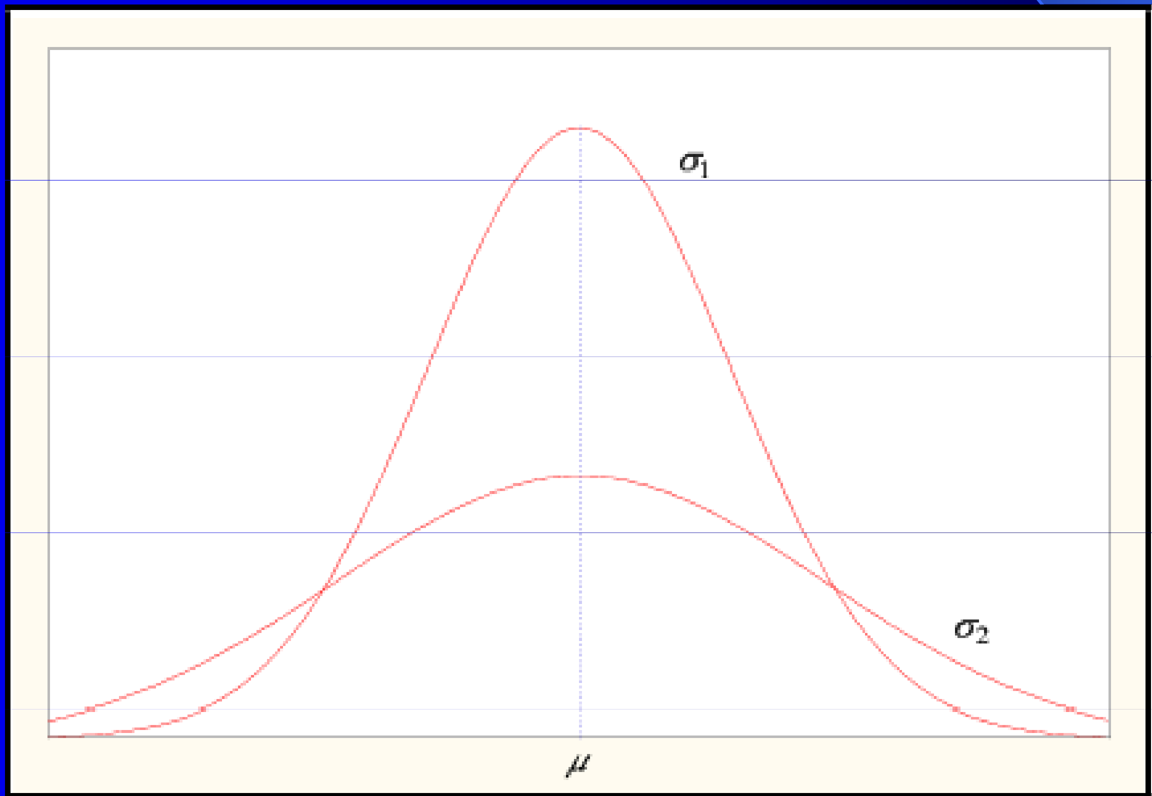


Normální rozdělení

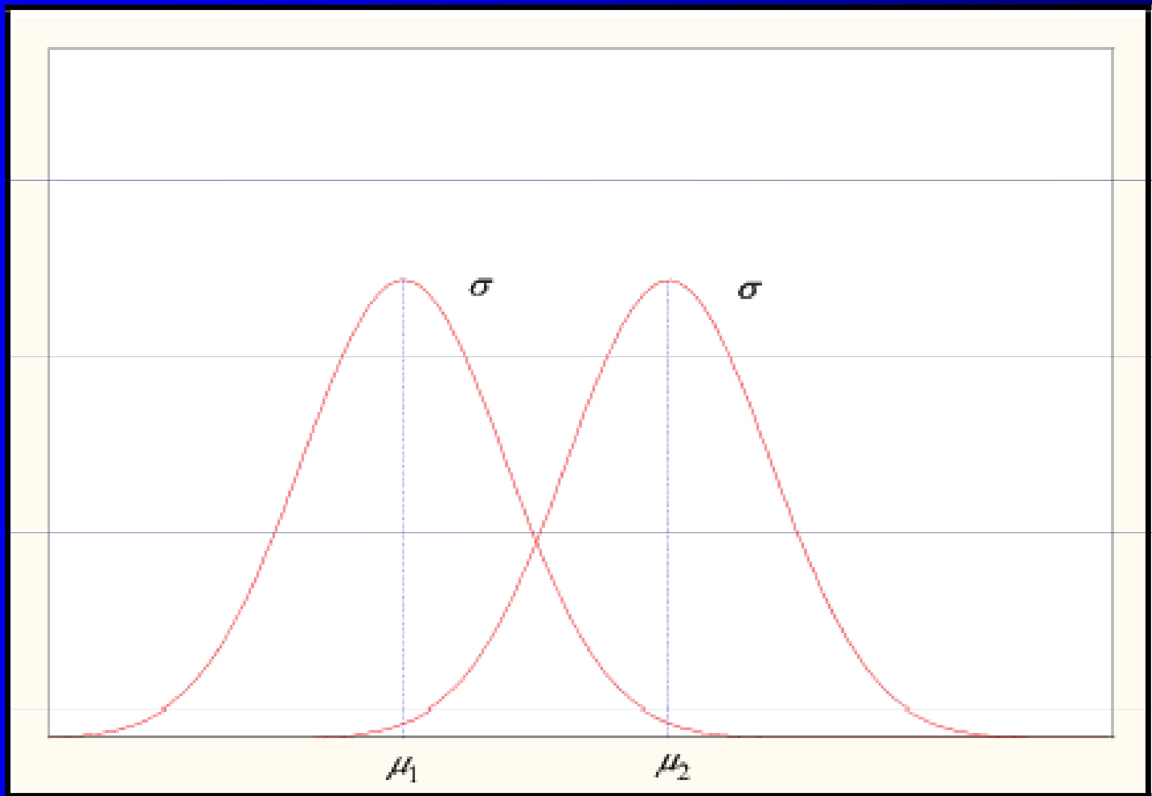
•Zvonovitý tvar
•Souměrný
•Šikmost 0, špičatost 0
•Asymptoticky se blíží 0



- Normální rozdělení s parametry:
- stejný průměr, různé směrodatné odchylky
- čím větší odchylka , tím „plošší tvar rozdělení

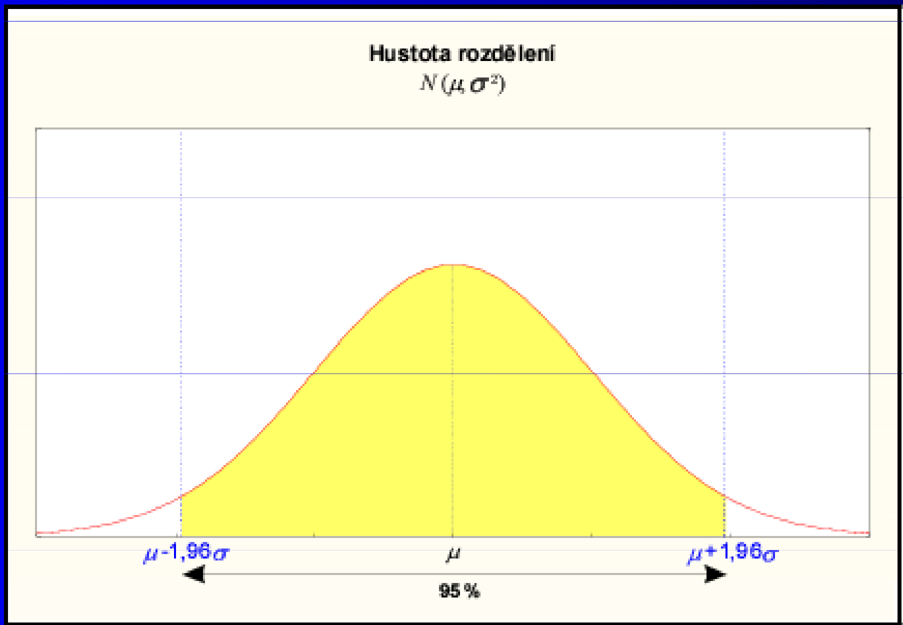


- Normální rozdělení
- různé průměry, stejná směrodatná odchylka



Normální rozdělení / Gaussovo pokračování

- Normální křivka a osa x **vymezují plochu 100%,**
- tj. lze stanovit pravděpodobnosti, s nimiž leží hodnoty v určitém intervalu,
- hranice intervalu tvoří průměr a násobky směrodatné odchylky
- obr.



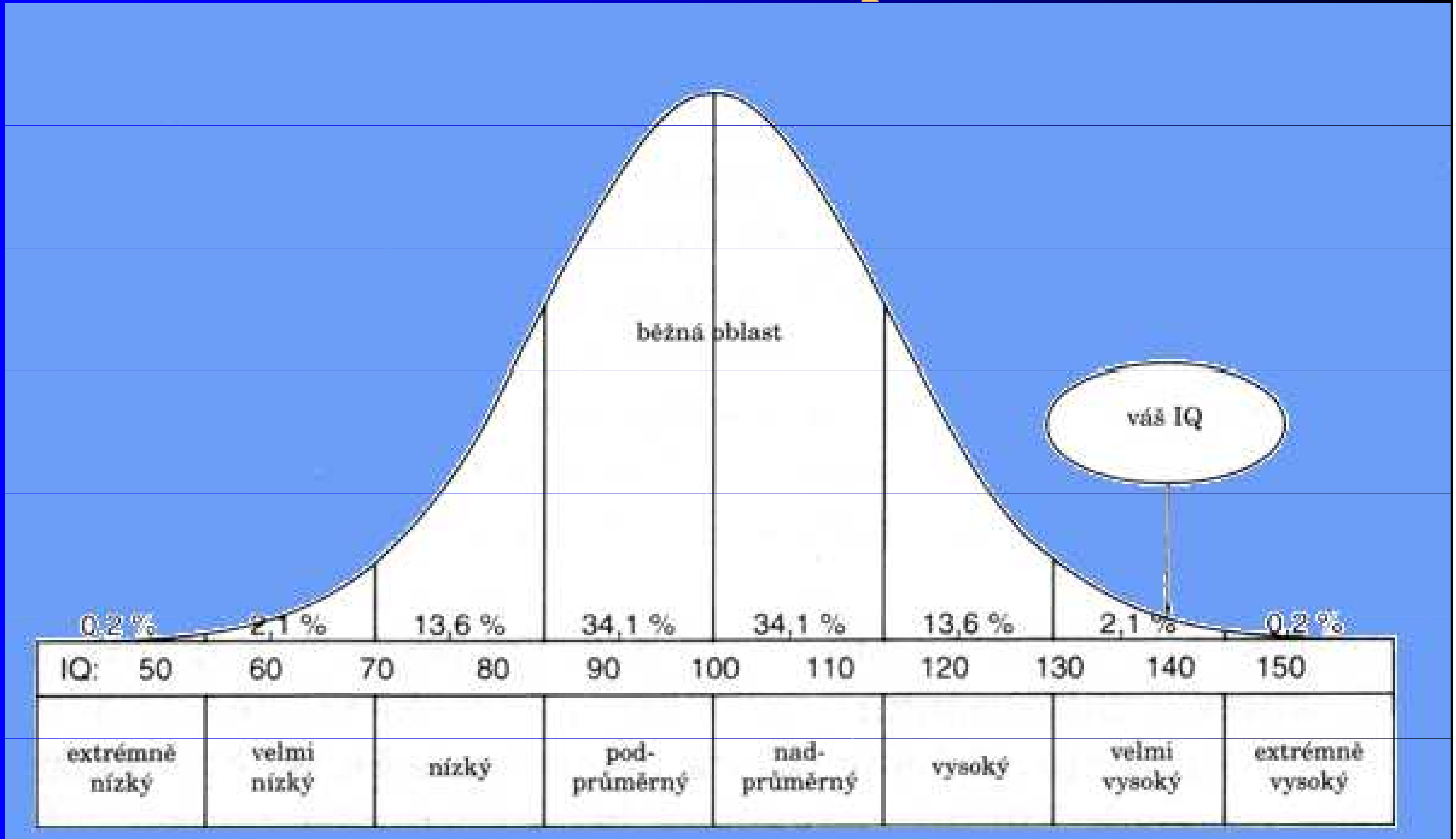
V normálním rozdělení:

- **68, 27% leží v intervalu:**
- **(průměr + - směr. odchylka)**

- **95% leží v intervalu:**
- **(ar. průměr +- 1,96 směr. odchylky)**

  - **99% leží v intervalu:**
  - **(ar. průměr +- 2,576 směr. odchylky)**

Normální rozdělení pro IQ



imbecilita debilita Lehká d. průměr vynikající genialita

idiocie

IQ (v bodech)	stupeň inteligence	procento zkoumaných případů (v %)
méně než 20	idiocie	0,1
20 - 49	imbecilita	0,5
50 - 69	debilita	1,9
70 - 79	tzv. lehká debilita	5,0
80 - 89	podprůměrná	14
90 - 109	průměrná	48
110 - 119	nadprůměrná	18
120 - 139	vynikající	11
140 a více	genialita	1,5

Příklady

Př.1

- Populace má v daném testu průměr 100, směrodatnou odchylku 15.
- Vypočítejte hranice intervalů, v kterém se nachází 68 % populace.

Příklad

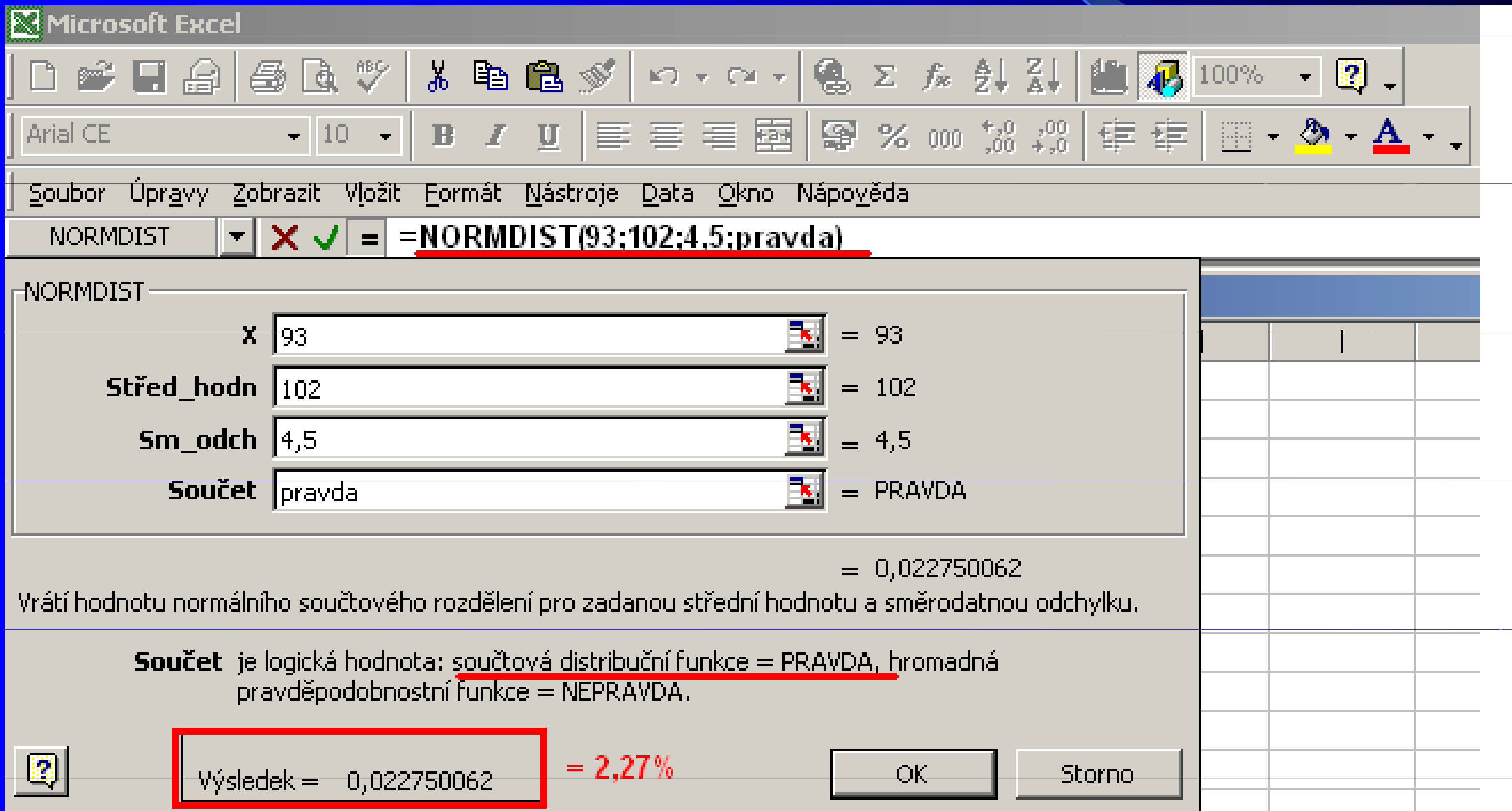
- Výška v populaci chlapců ve věku 3,5 - 4 roky má normální rozdělení s průměrem 102 cm a směrodatnou odchylkou 4,5 cm.
- Vypočítejte hranice intervalu hodnot výšky , ve kterých se nachází
- A)70%
- B) 95%
- C)99%
- příslušné populace

Příklad 3

- zadání:
- Výška v populaci chlapců ve věku 3,5 - 4 roky má normální rozdělení s průměrem 102 cm a směrodatnou odchylkou 4,5 cm.
- Spočtěte, jaké procento chlapců v uvedeném věku má výšku menší nebo rovnou 93 cm.

Řešení 3

- Pravděpodobnost, že výška nabude hodnoty menší nebo rovné 93 cm, je vyjádřena hodnotou distribuční funkce F (93) pro parametry normálního rozdělení 102;4,5



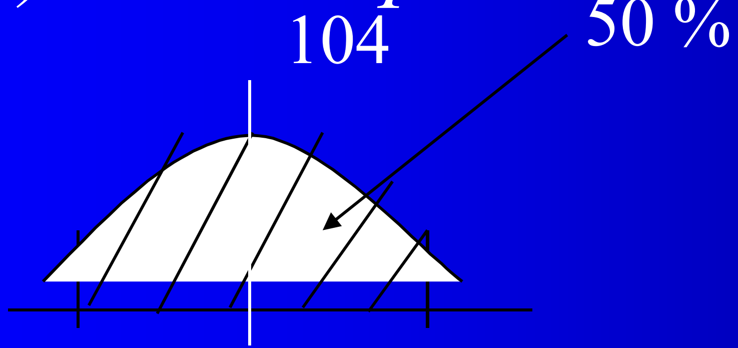
Odpověď: 2,27 % chlapců ve věku 3,5 – 4 roky je menších než 93 cm

Příklad 4

- Psychologickými testy bylo zjištěno, že hodnota IQ populace je náhodnou veličinou s normálním rozdělením, jehož střední hodnota je 104 a směrodatná odchylka 8.
- Určete hodnotu IQ, kterou podle uvedených pravděpodobnostních předpokladů:
- meze, ve kterých bude 50% populace,
-

Řešení 4

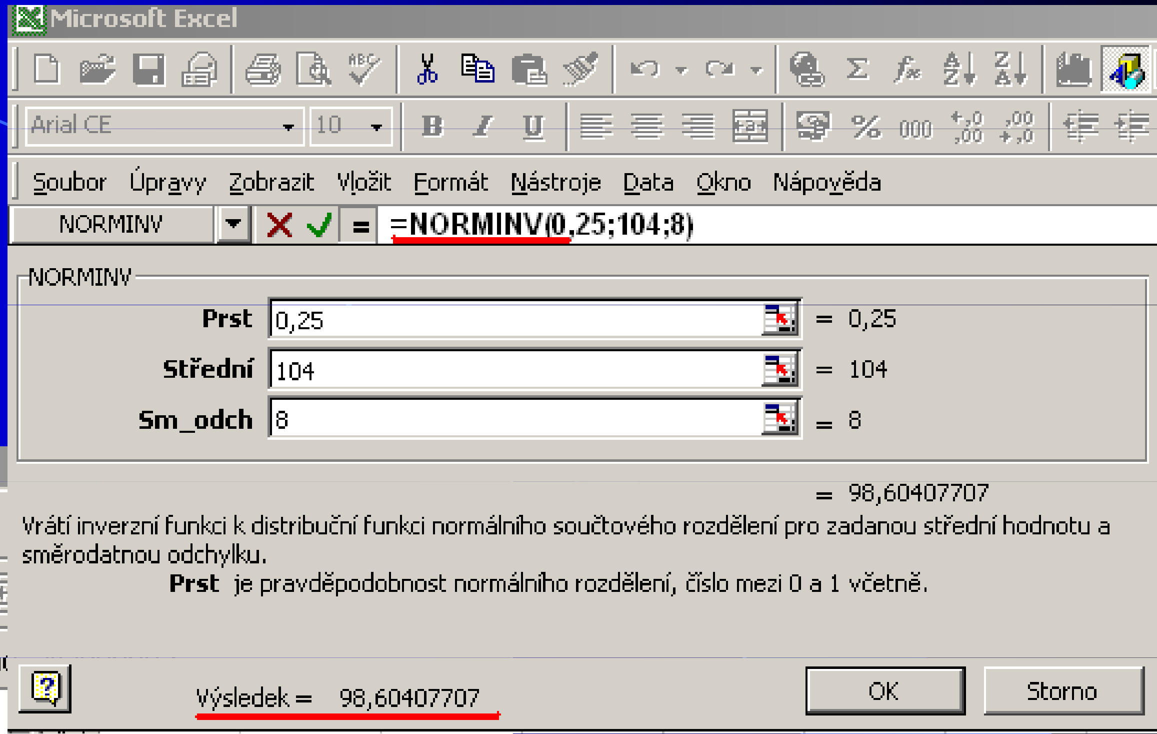
- *a)   meze pro 50 % mužské populace*

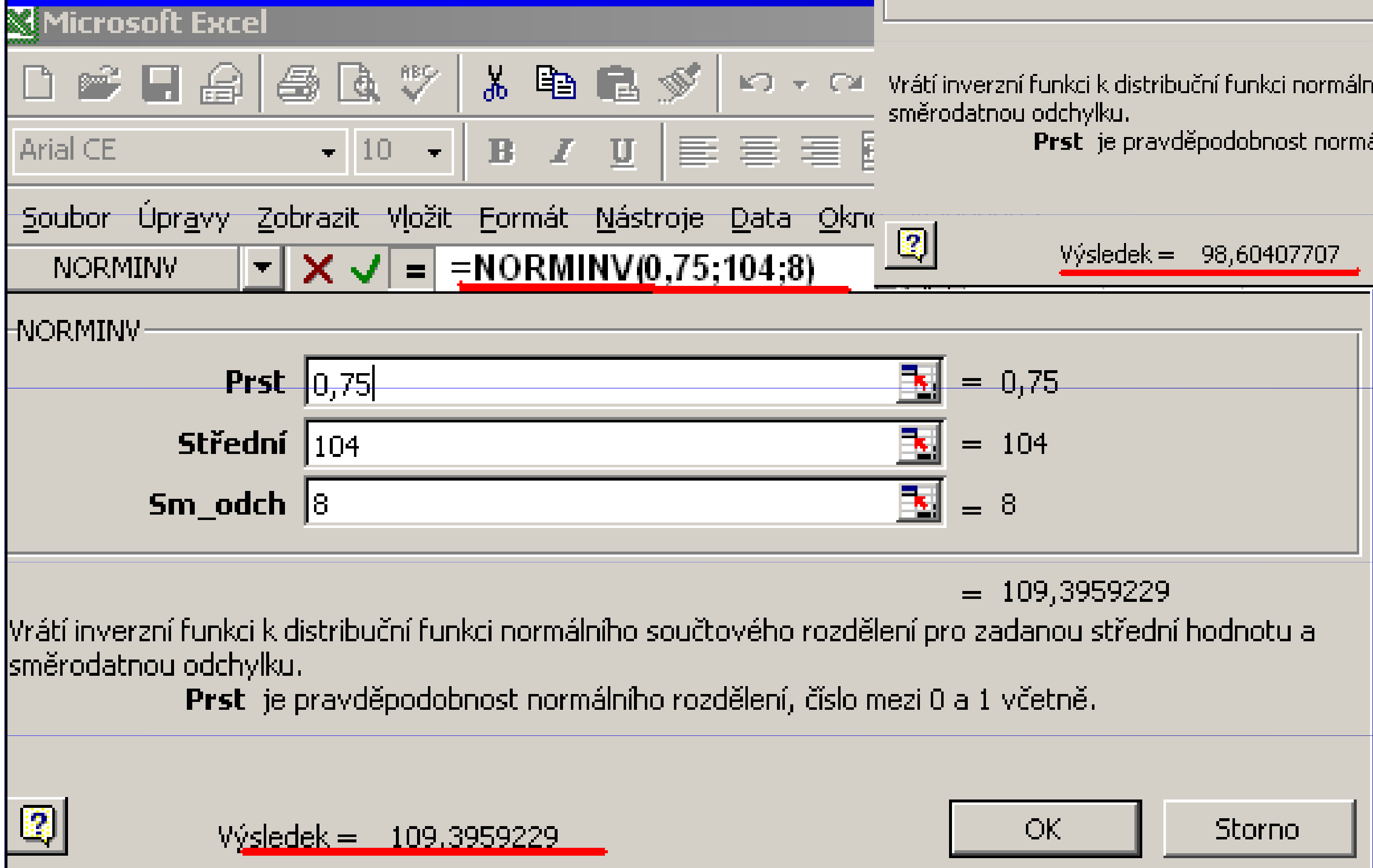


Hledáme dolní a horní meze intervalu (hodnot IQ),
ve které se bude nacházet 50% mužské populace, tj 1. a 3. kvartil

Řešení 2a)

Excel, statistická funkce inverzní k e Gauss. - NORMINV



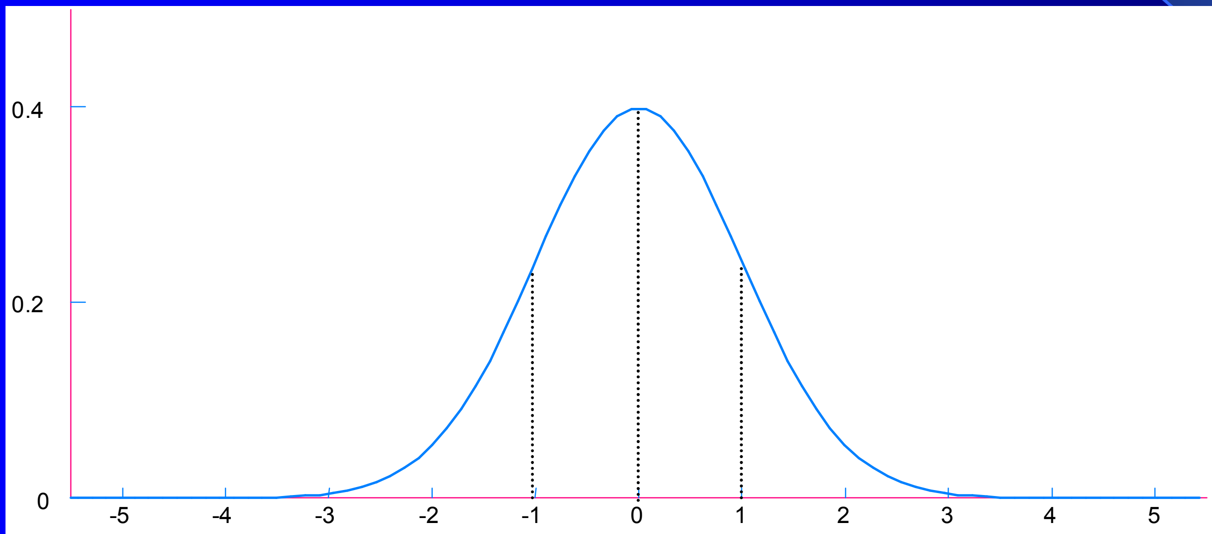


Podle parametrů daného normálního rozdělení 50 populace má IQ v intervalu 98,6 a 109,4.

- **Pro <u>normované normální</u> rozdělení zavedeme označení N (0, 1).**

Normování hodnoty: od hodnoty se odečte aritmetický průměr, výsledek (tj. odchylka) se dělí směr. odchylkou

<u>Hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení:</u>



<u>Tabulkové vyjádření vybraných hodnot hustoty pravděpodobnosti</u>

u	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\phi(u)$	0,399	0,352	0,242	0,130	0,054	0,018	0,004	0,001

<u>Tabulkové vyjádření vybraných hodnot distribuční funkce</u>

u	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\Phi(u)$	0,500	0,691	0,841	0,933	0,977	0,994	0,999	0,999

Binomické rozdělení

Binomické rozdělení

- pro diskrétní náhodné proměnné,
- které mohou nabývat pouze dvou hodnot (např. ano, ne)
- pravděpodobnost, že nastane alternativa ANO označme π
- pravděpodobnost, že nastane NE …$q = 1 - \pi$), protože
- platí $\pi + q = 1$ (100 %)
- k výpočtu se používá **binomický rozvoj**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k}, \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Příklad 1 – binomické rozdělení

- Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49.
- Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi třemi dětmi v rodině je právě jedna dívka?

Řešení 1

Tabulka3: Parametry binomického rozdělení v příkladu

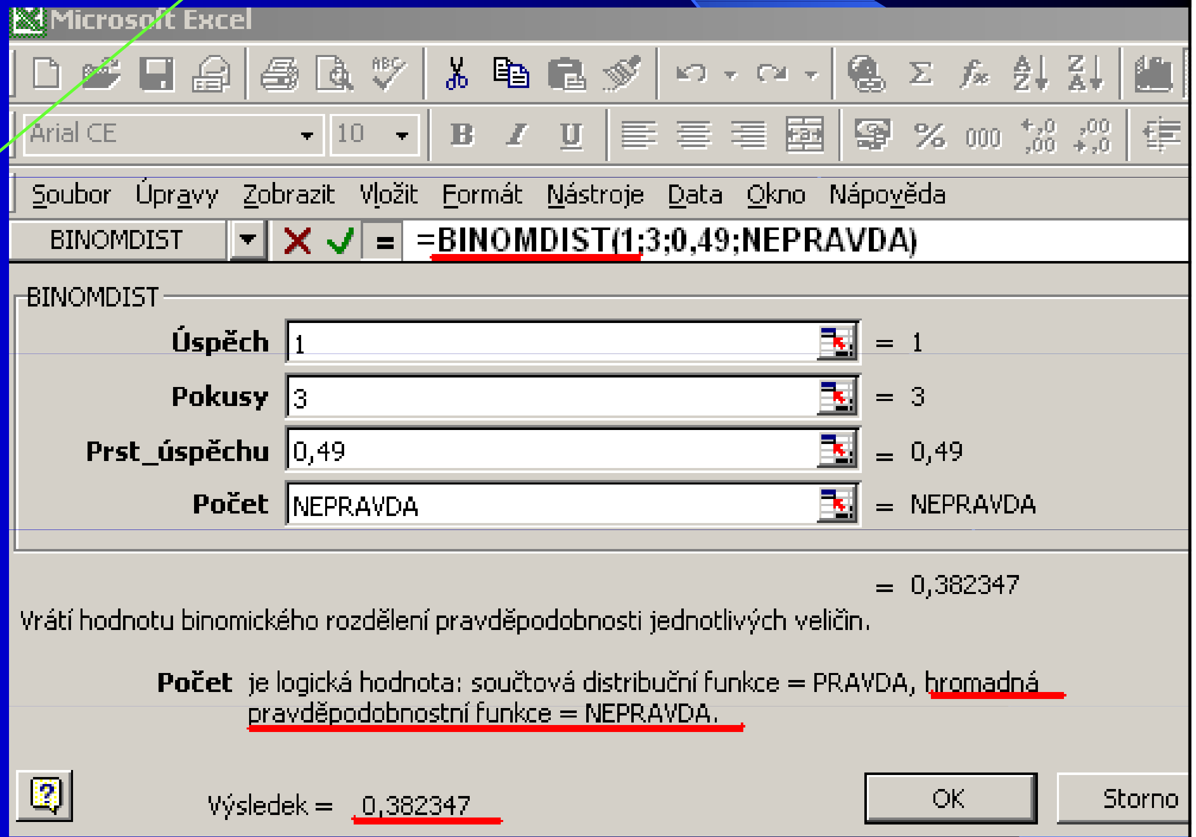
Pokus	Úspěch	Neúspěch	Pravděpodobnost úspěchu	Počet pokusů	Počet úspěchů
				n	k
narození dítěte	dívka	chlapec	0,49	počet dětí	počet dívek

Řešení 1

Jak je vidět z tabulky, počet narozených dívek v rodině je náhodná veličina s binomickým rozdělením. Pravděpodobnost, že mezi třemi dětmi je právě jedna dívka tedy vypočteme jako

$$P(X=1)=\binom{3}{1}0{,}49^1\cdot 0{,}51^2 = 3\cdot 0{,}127 = 0{,}38. \diamond$$

$$\binom{3}{1}=\frac{3!}{1!2!}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}=3.$$



Pravděpodobnost, že ze tří dětí bude jedna dívka, je 38%.

Příklad 2

Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou právě 3 dívky? Pravděpodobnost narození dívky je 0,49.

Řešení

binomický rozvoj:

$$P(k=3)=\binom{8}{3}0{,}49^{3}\cdot 0{,}51^{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0{,}118\cdot 0{,}035=0{,}23.\diamond$$

Pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou tři dívky, je 0,23, tj. 23 %.

Příklad 2, binomické rozdělení

- Vypočítejte pravděpodobnost, se kterou se vyskytne určitý počet měsíců v roce hodnocených jako „ suché“.
- Konkretizace:
- oblast Oxford,
- období 1851 – 1943, tj. 1116 měsíců
- Suchý měsíc - tj. méně srážek v měsíci než je dlouhodobý průměr tohoto měsíce.
- 617 měsíců hodnocených jako suché
- 499 – vlhké měsíce

Řešení 2

„úspěch“	„neúspěch“	Pravděpodobnost suchého měsíce	Pravděpodobnost vlhkého měsíce	Počet měsíců	Počet suchých měsíců
suchý	vlhký	$\pi = 617/1116$ $\pi = 0{,}553$	$q = 499/1116$ $q = 0{,}447$ $(q = 1 - \pi)$	n =12	k=0 až 12

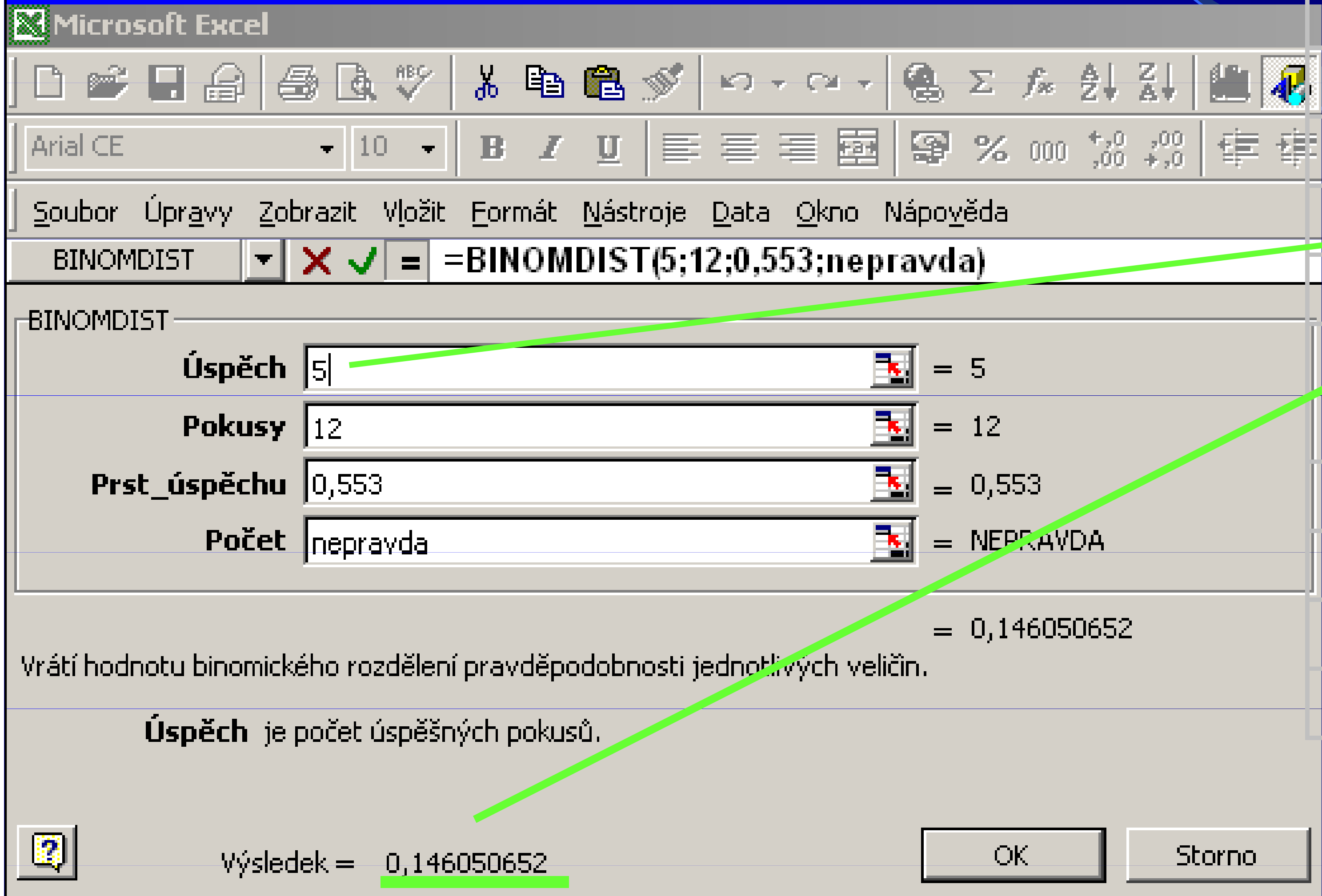
Řešení

a) Ručně pomocí binomického rozvoje
b) s podporou např. Excel

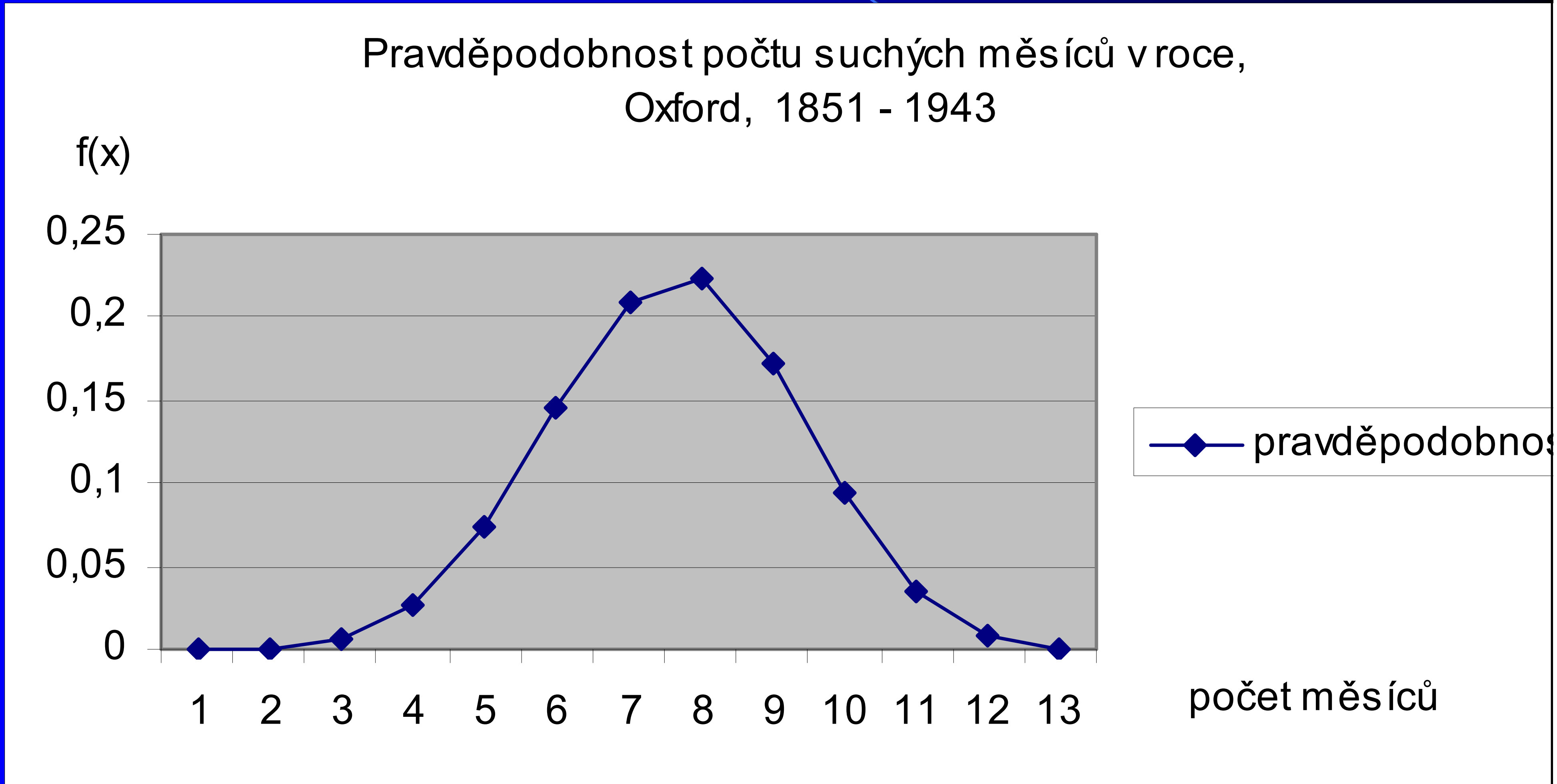
Řešíme dílčí příklady, tj. jaká je pravděpodobnost, že v roce se vyskytne

a) žádny suchý měsíc, tj- k = 0
b) Jeden suchý měsíc, tj. k = 1
c) Atd.
d) všechny měsíce suché, k= 12

Řešení 2

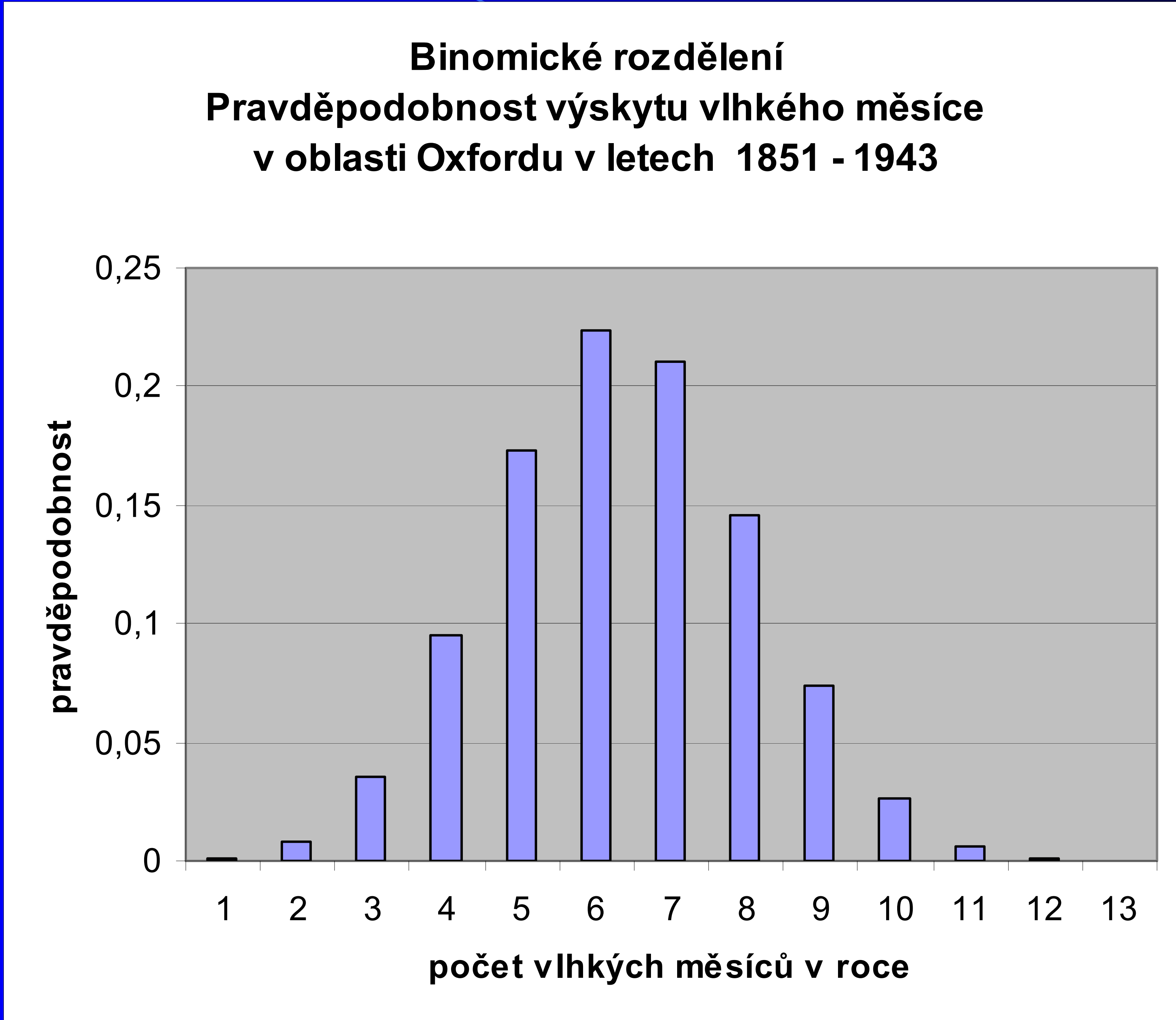


k	f(x)
0	0, 000
1	0,000945
2	0,006428
3	0,026507
4	0,073785
5	0,146051
6	0,21
7	0,223
8	0,172
9	0,095
10	0,035
11	0,0079
12	0,0008



Pravděpodobnost počtu suchých měsíců v roce,
Oxford, 1851 - 1943
f(x)
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
pravděpodobnos
počet měsíců

Jak bude vypadat situace pro „vlhké" měsíce?



Poisson - příklad

Poissonovo rozdělení

- – pro rozdělení vzácných případů
- (zimní bouřka, výskyt mutace apod.).

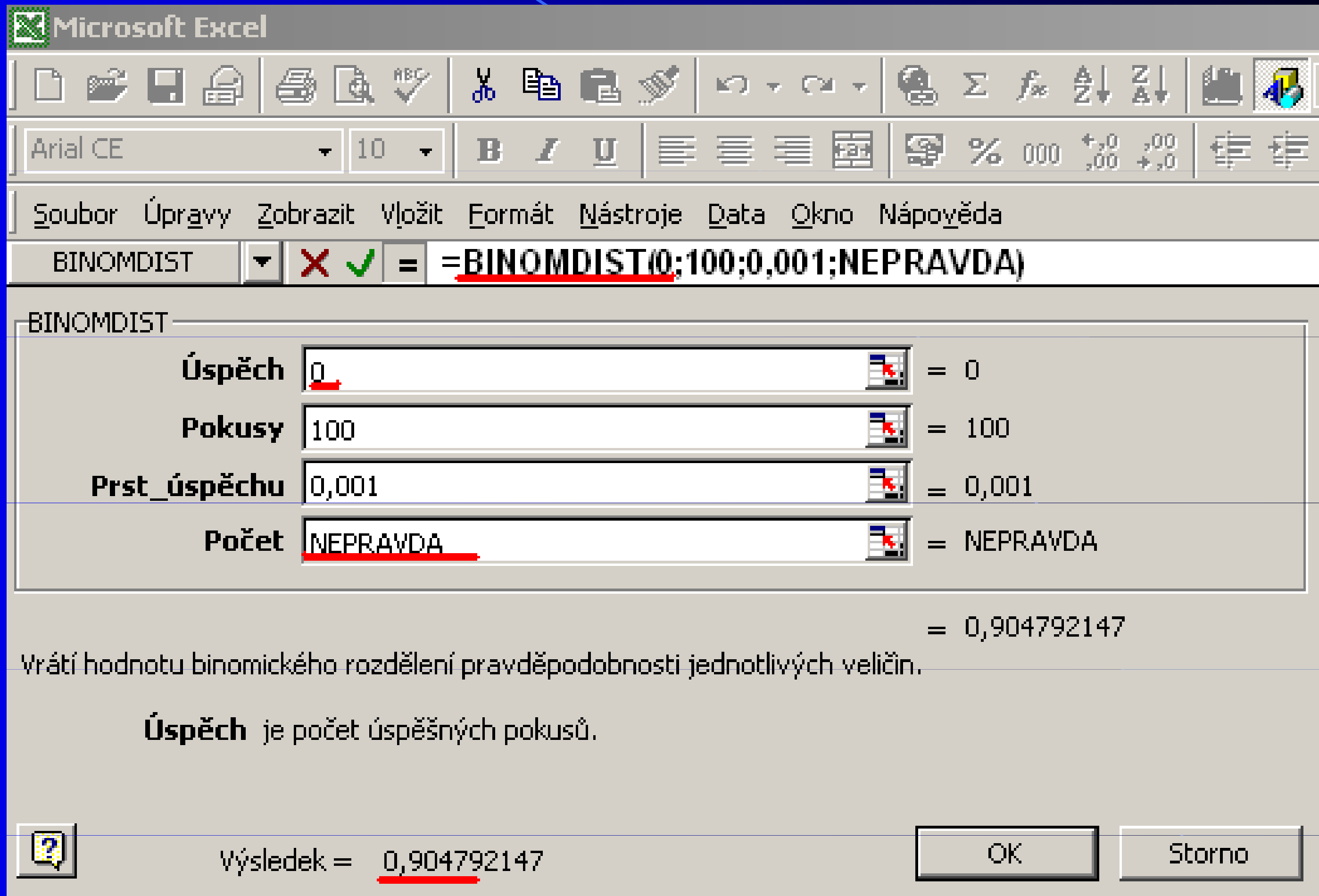
- Je-li pravděpodobnost nějaké výjimečné události (např. určité mutace genu) relativně malá a rozsah výběru poměrně velký, pak Poissonovo rozdělení v podstatě splývá s binomickým, ale je mnohem výhodnější pro počítání .

Poisson - příklad

- Předpokládejme, že v určité populaci krys se vyskytuje albín s pravděpodobností
- $p = 0{,}001$, ostatní krysy jsou normálně pigmentované.
- Ve vzorku 100 krys náhodně vybraných z této populace určete pravděpodobnost, že vzorek
- a) <u>neobsahuje albína,</u>
- <u>b) obsahuje právě jednoho albína.</u>

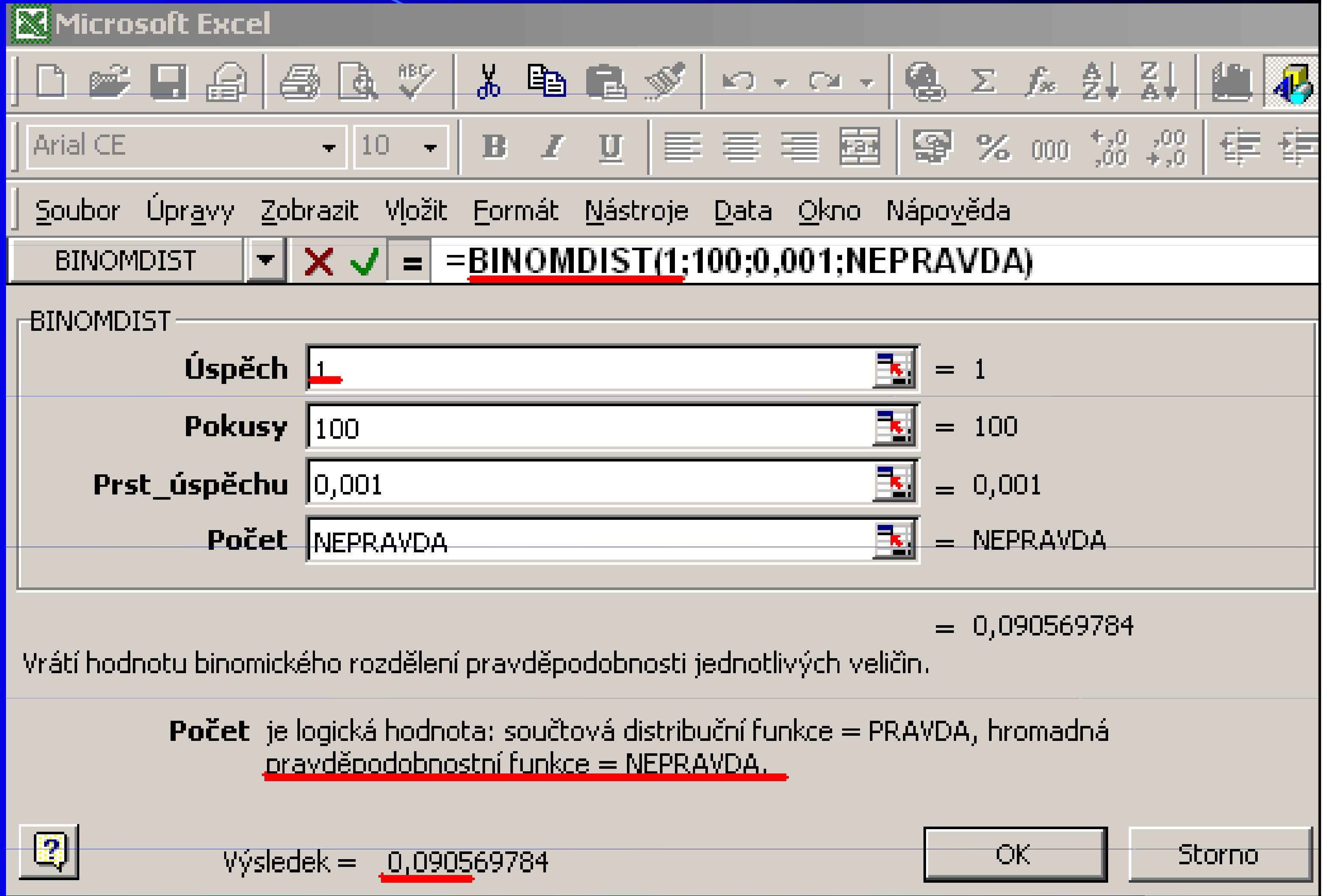
Řešení

- určete pravděpodobnost, že vzorek
- neobsahuje albína,



Pravděpodobnost, že neobsahuje albína, je 90,47 %

Řešení 3



Pravděpodobnost, že 100 členná populace krys bude obsahovat albína, je 9 %.

Další rozdělení

Pearsonova křivka III. typu

- Na empirické rozdělení mnoha statistických souborů s nimiž v geografii pracujeme, nelze aplikovat normální rozdělení.
- Platí to například v těch případech, kdy studovaná náhodná veličina nemá teoreticky zdůvodněnou možnost nabývat nekonečných hodnot nebo je-li omezena konečnými čísly V takovýchto případech lze aplikovat na studovaný soubor některou ze dvanácti křivek Pearsonova systému.

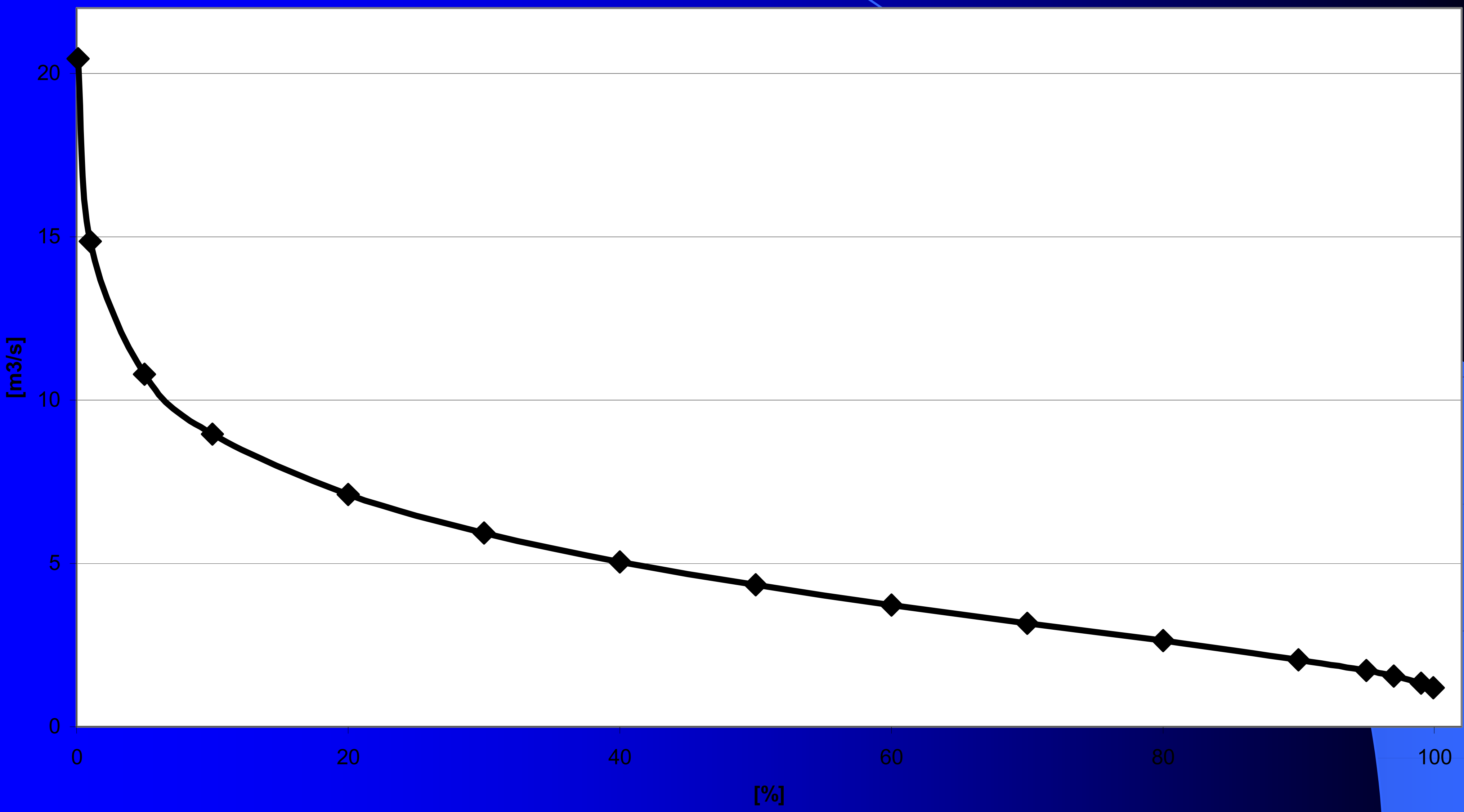
Pearsonova křivka III. typu

- **Pearsonova křivka III. typu**
- - obvykle pro veličiny s omezeným množstvím hodnot, které může nabývat
- - z křivky lze např. vyčíst pravděpodobnost se kterou bude hodnota sledovaného statistického znaku dosažena
- v hydrologii se počítá Pearsonova křivka ve variantě součtová čára četností jako
- tzv. čára překročení

- **příklad**
- Konstrukce čáry překročení z průměrných ročních průtoků vodního toku Lažánka za říjen 2002.

den	průtok Qd (m3/s)	den	průtok Qd (m3/s)
1	2,99	16	2,98
2	2,84	17	4,64
3	2,75	18	12,2
4	3,22	19	7,73
5	3,55	20	4,38
6	12,2	21	3,41
7	9,12	22	3,85
8	3,82	23	3,47
9	3,55	24	3,36
10	3,23	25	3,51
11	2,89	26	12,2
12	3,25	27	10,3
13	3,79	28	6,2
14	3,05	29	4,15
15	3,05	30	5,75
		31	5,1

Křivka překročení průměrných ročních průtoků vodního toku Lažánka za říjen 2002



rozdělení χ2

- **rozdělení χ2** – náhodný výběr n prvků ze základního souboru (počet vybíraných prvků = počet stupňů volnosti)
- dostaneme n hodnot, součtu druhých mocnin daného počtu vybraných prvků odpovídá určitá křivka,

Studentovo/t/ rozdělení

- **Studentovo/t/ rozdělení** – hodnocení odchylek aritmetického průměru základního souboru a výběrových souborů, odchylkám přísluší Studentovo rozdělení