Afinní zobrazení - cvičení

1. V $A^{(2)}$ jsou dány nekolineární body B, C, D. LSS je zvolena tak, že počátek $P = B$, $\mathbf{e}_1 = C - B$, $\mathbf{e}_2 = D - B$. *Určete* rovnici afinního zobrazení f, zobrazujícího $A^{(2)}$ do $A^{(3)}$ tak, že $f(B) = [1, 0, 0]$, $f(C) = [0, 1, 0]$, $f(D) = [0, 0, 1]$, přičemž souřadnice bodů v $A^{(3)}$ jsou uvedeny vzhledem k nějaké pevně zvolené LSS v $A^{(3)}$.

   Řešení: $f \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

   Po dosazení souřadnic dvojic C, $f(C)$ a D, $f(D)$ dostaneme : $a = -1$, $c = 1$, $g = 0$, $b = -1$, $d = 0$, $h = 1$.

2. Určete samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení $f: A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřeného vzhledem k LSS rovnicí :

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

   a ukažte, že jde o projekci roviny na přímku q této roviny ve směru, který udává zaměření jisté přímky s. Určete q a s.

   Řešení : Množinou samodružných bodů je přímka $q \equiv y = -2x$, jejíž směrový vektor je charakteristickým vektorem příslušným k charakteristickému kořenu 1. K charakteristickému kořenu 0 přísluší charakteristické vektory patřící do zaměření přímky $s \equiv y = -x$. Protože obrazem směrového vektoru každé přímky $r \parallel s$ je $\mathbf{o}$, zobrazí se r do bodu $Q = r \cap q$, neboť Q je samodružný .

3. Určete samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení $f: A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřeného vzhledem k LSS rovnicí :

$$f \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

   a ukažte, že jde o zobrazení složené z projekce p roviny na přímku q této roviny ve směru, který určuje zaměření jisté přímky s a stejnolehlosti h na přímce q. Určete q, s a střed S i koeficient κ stejnolehlosti h.

   Řešení : f má jediný samodružný bod $O = [0, 0]$. K charakteristickému kořenu 7 přísluší charakteristický vektor patřící do zaměření přímky $q \equiv y = \frac{1}{2}x$ procházející bodem O. Pro každý bod $Y \neq O$ ležící na q je vektor $Y - O$ charakteristický, takže $\varphi(Y - O) = 7(Y - O)$, tj. $f(Y) = O + 7(Y - O)$, což je rovnice h na přímce q se středem O a koeficientem $\kappa = 7$. K charakteristickému kořenu 0 přísluší char. vektor patřící do zaměření přímky $s \equiv y = -\frac{3}{2}x$. Protože obrazem směrového vektoru každé přímky $r \parallel s$ je $\mathbf{o}$, zobrazí se všechny body přímky r do téhož bodu jako bod $Q = r \cap q$, tj. do bodu $h(Q) = f(Q)$. Pro matice asociovaných zobrazení k $f = ph$, které musíme násobit v opačném pořadí, platí:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

   Přesvědčte se, že zobrazení asociované k p má charakteristické kořeny 0 a 1 a srovnejte úlohu 3 s úlohou 2.

4. Zobrazení k: $A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřené vzhledem k LSS rovnicí :

$$k \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   popište konstruktivně.

Řešení: $k = ft$, kde f je zobrazení z úlohy č. 3 a t je posunutí o vektor $\mathbf{v} = (2, 3)$. Obrazem přímky q (viz úl. č. 3) v posunutí t je přímka $q' \parallel q$, takže $q \equiv y = \frac{1}{2}x + a$, na které musí ležet bod $f(O) = [2, 3]$, z čehož po dosazení jeho souřadnic do rovnice q' plyne $a = 2$. Pro zobrazení k platí $k = pht$ (p a h viz v úloze č. 3), z čehož plyne popis konstrukce obrazu libovolného bodu X roviny v daném zobrazení k, které má jediný samodružný bod U ležící na q: $U = [-\frac{7}{3}, \frac{5}{6}]$, $p(U) = V = \left[-\frac{13}{21}, -\frac{13}{42}\right]$, $V \in q$, $h(V) = R = [-\frac{13}{3}, -\frac{13}{6}]$, $R \in q$, $t(R) = U$.

5. Určete samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení $f: A^{(3)} \to A^{(3)}$, vyjádřeného vzhledem k LSS rovnicí:

$$f \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Dokažte, že jde o zobrazení $A^{(3)}$ na přímku q tohoto prostoru, v němž se každý bod roviny σ rovnoběžné s jistou rovinou ρ zobrazí do téhož bodu Y' přímky q, přičemž Y' je obrazem průsečíku Y přímky q s rovinou σ ve stejnolehlosti h se středem S a koeficientem κ na přímce q. Určete q, ρ, S, κ.

Řešení: V f je samodružný pouze počátek O. Z rovnice f plyne $y' = 2x'$, $z' = 3x'$. Obrazy všech bodů prostoru $A^{(3)}$ proto leží na přímce $q \equiv y = 2x \wedge z = 3x$. Charakteristický vektor příslušící k char. kořenu -5 patří do $Z(q)$. $O \in q$, proto pro každý bod $X \in q$, $X \neq O$ platí: $\varphi(X - O) = -5(X - O)$, tj. $f(X) - f(O) = -5(X - O) \Rightarrow f(X) = O - 5(X - O)$, což je rovnice stejnolehlosti h se středem O a koeficientem $\kappa = -5$ na přímce q. Charakteristické vektory příslušné k dvojnásobnému charakteristickému kořenu 0 tvoří charakteristický podprostor $Z(\rho)$, $\rho \equiv 2x + y - 3z = 0$. Leží-li B v ρ a jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé charakteristické vektory ze $Z(\rho)$, pak se každý bod $X = B + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ roviny ρ zobrazí do téhož bodu $f(B)$ protože obrazem char. vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ v asociovaném lin. zobrazení je vektor $\mathbf{o}$. Toto tvrzení platí i pro každou rovinu $\sigma \parallel \rho$. Všechny body roviny σ se proto zobrazí do téhož bodu jako průsečík $Y = q \cap \sigma$, tj. do bodu $h(Y) = f(Y)$ protože obrazy všech bodů prostoru $A^{(3)}$ leží na přímce q.

6. Vzhledem k LSS v $A^{(3)}$ je dáno afinní zobrazení

$$f \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Určete, o jaké afinní zobrazení se jedná.

Řešení: Samodružné body vyplní rovinu $\rho \equiv x - y - z + 1 = 0$. K dvojnásobnému charakteristickému kořenu 1 přísluší charakteristický podprostor $Z(\rho)$, k charakteristickému kořenu 0 přísluší charakteristický vektor $\mathbf{s} = (4, 2, 3)$, který generuje směr promítání $A^{(3)}$ do ρ.

7. V $A^{(2)}$ je vhledem k LSS dáno zobrazení f rovnicí

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že f je osová afinita, určete její modul h, osu o a směr $L(\mathbf{s})$.

Řešení: $h = |\mathbf{A}| = -6$. Samodružné body vyplní osu $o \equiv y = 2x + 1$. Charakteristický vektor patřící k char. kořenu 1 patří do $Z(o)$. Char. vektor patřící k char. kořenu $-6 = h$, patří do $Z(s) = L(\mathbf{s})$, $s \equiv 3x + 2y = 0$.

8. Vyslovte a dokažte hypotézu o charakteristických kořenech zobrazení asociovaného k osové afinitě a jejich významu.

Řešení: Hypotéza: Zobrazení asociované k osové afinitě má vždy dva reálné charakteristické kořeny: 1 a h, kde h je modul afinity. Char. vektor příslušný ke kořenu 1 generuje směr osy afinity a char. vektor příslušný k charakteristickému kořenu h generuje směr afinity. Důkaz: Při vhodné volbě LSS ($x = o$) lze rovnici osové afinity zapsat ve tvaru (viz přehled afinit roviny, případně větu 8):

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \mathbf{X},$$

z něhož je tvrzení o char. kořenech zřejmé. Význam char. vektorů příslušných k uvedeným char. vektorům plyne z V 21 S a z toho, že v osové afinitě existují právě dva různé samodružné směry. Význam charakteristického kořenu h viz v poznámce č. 6 na s. 6 materiálů o afinních zobrazeních.

9. Určete, jaké zobrazení f je vzhledem k LSS určeno rovnicí:

a) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$, $a \neq 0$.

Řešení: a) Množinou všech samodružných bodů je rovina $\rho \equiv x - y + 1 = 0$. K trojnásobnému char. kořenu 1 přísluší charakteristický podprostor $Z(\rho)$. Zobrazení f je dle V 5 elace, její směr generuje vektor $X' - X$ pro každý bod $X \notin \rho$; pro $X = O$ dostaneme vektor $\mathbf{s} = (1, 1\ 0)$, $\mathbf{s} \in Z(\rho)$.
b) Množinou všech samodružných bodů je přímka $o \equiv x = 0$. K dvojnásobnému cha. kořenu 1 přísluší charakteristický podprostor $Z(o) = \langle (0, 1) \rangle$. Zobrazení f je dle V 5 elace s osou o.

10. Afinní zobrazení je dáno vzhledem ke KASS rovnicí

$$f \equiv \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Dokažte, že f je osová afinita, jejíž osa $o = x$ a je-li $h \neq 1$, je h její modul (charakteristika), je-li $h = 1$, jde o elaci. Dále dokažte, že pro $k \neq 0$ je $\frac{h-1}{k}$ směrnice přímek patřících do směru afinity a pro $k = 0$ jde o osovou afinitu pravoúhlou.

Řešení: Množinou všech samodružných bodů je osa $x \equiv y = 0$. K charakteristickému kořenu 1 přísluší charakteristický vektor $\mathbf{x}_1 \in \langle (1, 0) \rangle$ generující směr osy x, k charakteristickému kořenu h pro $k \neq 0$ přísluší charakteristický vektor $\mathbf{x}_2 \in \langle (1, \frac{h-1}{k}) \rangle$, který je směrovým vektorem přímek směru afinity, jejichž směrnice je $\frac{h-1}{k}$. Pro $h \neq 1$ jsou přímky směru afinity různoběžné s osou afinity x, takže pro každý bod $Y \notin x$ a jeho obraz Y' existuje průsečík $Y_0 = YY' \cap x$ a pro charakteristický vektor $Y - Y_0$ příslušný k charakteristickému kořenu h platí: $\varphi(Y - Y_0) = h(Y - Y_0) \Rightarrow f(Y) - f(Y_0) = h(Y - Y_0) \Rightarrow Y' - Y_0 = h(Y - Y_0) \Rightarrow (Y' Y Y_0) = h$, takže h je modul afinity. Je-li $h = 1$, jde dle V 25 o elaci s osou x. Pro $k = 0$ jde pro každé $h \neq 1$ o afinitu pravoúhlou, protože charakteristický vektor $\mathbf{x}_2 \in \langle (0, 1) \rangle$ generuje směr osy y

11. Vysvětlete, jaký je geometrický význam rovnosti: $\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\kappa \neq 0, 1$ vzhledem k LSS.

Řešení: Každou stejnolehlost lze nekonečně mnoha způsoby rozložit na dvě osové afinity, jejichž různoběžné osy lze libovolně zvolit tak, že procházejí středem S stejnolehlosti. Přitom osa jedné afinity udává směr druhé a naopak. Moduly obou afinit jsou rovny κ. Důkaz proveďte tak, že určíte samodružné body i směry obou afinit. Můžete také využít výsledků úlohy č. 10.

Afinní zobrazení - cvičení

2. Určete samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení $f: A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřeného vzhledem k LSS rovnicí:

$$X' = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}X$$

a ukažte, že jde o projekci roviny na přímku q této roviny ve směru, který udává zaměření jisté přímky s. Určete q a s.

Řešení:

1. $A^TA = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix} \neq k^2E$ => f není podobné
2. $|A| = 0$ => f je singulární afinní zobrazení
3. Samodružné body: $(A-E)X = 0$

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{2x + y = 0 \equiv q}$$

4. Samodružné směry: $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2 = 0$

$\lambda(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$

Charakteristické vektory:

$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \equiv s$, $\vec{x}_1 \in \langle(1,-1)\rangle$

$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \equiv q$

$\vec{x}_2 \in \langle(1,-2)\rangle$

Poznámka: Dle V20S, která platí i pro afinní zobrazení, je charakteristický podprostor příslušný k charakteristickému kořenu 1 zaměřením podprostoru samodr. bodů.

Pro charakteristický kořen λ_1 a k němu příslušný charakteristický vektor $\vec{x}_1$ platí: $\varphi(\vec{x}_1) = \lambda_1\vec{x}_1$, tj. $\varphi(\vec{x}_1) = 0\cdot\vec{x}_1$, takže $\varphi(\vec{x}_1) = \vec{o}$.

Odtud plyne, že $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$, tj. směr určený přímkou s je směr promítání; přímky patřící do tohoto směru se zobrazí jako bod – průsečík s přímkou q, jejíž každý bod je samodružný.

<u>Závěr</u>: f je projekce roviny na přímku q ve směru $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$

Zkouška: $M \in q \Rightarrow y = -2x \Rightarrow M = [k, -2k]$, $k \in \mathbb{R}$

$M' = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ -2k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\ -2k\end{pmatrix} \Rightarrow M' = M$, tj. každý bod př. q je samodružný!

3. Určete samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení $f: A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřeného vzhledem k LSS rovnicí:

$$f \equiv X' = \begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}X$$

a ukažte, že jde o zobrazení složené z projekce p roviny na přímku q této roviny ve směru, který určuje zaměření jisté přímky s a stejnolehlosti h na přímce q. Určete q, s a střed S i koeficient κ stejnolehlosti h.

Řešení:

1. Matice A je singulární => f je singulární afinní zobrazení v rovině, v jehož rozkladu na součinové základní afinity bude projekce.
2. Samodružné body: $(A-E)X = 0$

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Big\} \Rightarrow x = 0$$ => v f je samodružný jediný bod $O(0,0)$.

3. Samodružné směry:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 6\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 7$

Charakteristické vektory:

$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow 2x + 3y = 0 \equiv s$, $\vec{x}_1 \in \langle(3,-2)\rangle$

$\mathcal{L}(\vec{x}_1)$, tj. směr určený přímkou s je směr projekce p na nějakou př. q.

$\lambda_2 = 7: \begin{pmatrix}-3 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\vec{x}_2 \in \langle(1,-2)\rangle$ = směrový vektor přímky q =>

$q \equiv x + 2y + a = 0$

Protože q musí procházet samodružným bodem O, je $a = 0 \Rightarrow q \equiv x + 2y = 0$.

Zvolíme-li na přímce q bod $Y \neq O$ je obrazem charakteristického vektoru $\vec{x}_2 = Y - O$ vektor $\varphi(\vec{x}_2) = \lambda_2\vec{x}_2 = 7\vec{x}_2$, takže obrazem bodu $Y \in q$ je v f bod Y', který je obrazem bodu Y ve stejnolehlosti $h(O,7)$.

4. Rozklad na součinové základní afinity:

$$f = p \cdot h$$

$$\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

matice reprezentující [illegible] zobrazení

p – projekce roviny na přímku q ve směru $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$

h – stejnolehlost na q se středem O, koef. 7.

$$p \equiv X' = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} X$$

$$h \equiv X'' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} X'$$

$$f = ph \equiv X'' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} X$$

Závěr – zobecnění plynoucí z úlohy č. 2 a 3: f je singulární afinní zobrazení složené z projekce p a stejnolehlosti h. p je projekce na přímku q, procházející samodružným bodem O (počátek KASS), jejíž směrovým vektorem je charakteristický vektor $\vec{x}_2$ příslušný k char. číslu $\lambda_2 \neq 0$, ve směru $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$, kde $\vec{x}_1$ je char. vektor příslušný k char. číslu $\lambda_1 = 0$. h je stejnolehlost na přímce q se středem O a koeficientem $\varkappa = \lambda_2$.

Poznámka: Protože v úloze 2 je $\lambda_2 = 1$ je stejnolehlost h s koeficientem 1 identitou, takže f je „čistá" projekce již s ničím nesložená, pro $\lambda_2 \neq 1$ je projekce p na přímku q složena na přímce q ještě se stejnolehlostí $h(O;\lambda_2)$.

4. Zobrazení k: $A^{(2)} \to A^{(2)}$, vyjádřené vzhledem k LSS rovnicí :

$$k \equiv X' = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

popište konstruktivně.

Řešení: 1. Využijeme výsledku úlohy č. 3 – provedeme rozklad $k = ft$, kde f je zobr. z úlohy č. 3 a t je posunutí o vektor $\vec{v} = (2;3)$:

$$f \equiv X' = AX$$
$$t \equiv X'' = X' + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$k = ft$$

Obraz přímky q v k označme q': jestliže $X \in q \equiv y = \frac{1}{2}x \Rightarrow X = [2r, r] \wedge r \in R$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14r + 2 \\ 7r + 3 \end{pmatrix}$$

Pro $r = 0 \Rightarrow X_1' = [2,3]$

$r = \frac{1}{7} \Rightarrow X_2' = [4,4]$

Body X_1', X_2' určují přímku $q' \equiv y = \frac{1}{2}x + 2$ (vypočtěte)

2. Rozklad na zobecněné základní afinity

$p \equiv X' = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} X$ — p je projekce

$h \equiv X'' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} X'$ — h je stejnolehlost

} viz úloha č. 3

$t \equiv X''' = X'' + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ — t je posunutí o vektor $\vec{v} = (2,3)$, které posune přímku q do přímky q'.

$k \equiv p\,h\,t$

3. Samodružné směry zobrazení k jsou tytéž jako samodružné směry zobrazení f z úl. č. 3 protože v translaci t je každý směr samodružný, takže t samodružné směry nemění.

4. Samodružné body : $(A - E)X = -B$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & -4 \\ 6 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & -4 \\ 0 & -6 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow y = \frac{5}{6}, \quad x = -\frac{7}{3}$$

V k je samodružný jediný bod $U = [-\frac{7}{3}, \frac{5}{6}]$.

$U \in q'$ – ověřte!

Konstruktivní popis : (nakreslete obrázek!)

K libovolnému bodu X sestrojíme jeho obraz X''' v zobrazení k takto : 1. Bod X promítneme do bodu X' na přímku $q \equiv x - 2y = 0$ ve směru $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$, $\vec{x}_1 \in \langle (3;-2) \rangle$, tj. ve směru přímky $s \equiv 2x + 3y = 0$.

2. K bodu X' sestrojíme na přímce q jeho obraz X'' ve stejnolehlosti $h(O;7)$.

3. Bod X'' posuneme o vektor $\vec{v} = (2;3)$ do bodu X''';

$X''' \in q' \equiv x - 2y + 4 = 0$

V obrázku sestrojte také body U, U', U'' a $U''' = U$.

Afinní zobrazení - cvičení

Úloha č. 6:

$$f \equiv X' = \begin{pmatrix}5&-4&-4\\2&-1&-2\\3&-3&-2\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Řešení:

1. První řádek matice A je součtem 2. a 3. řádku => A je singulární => f je singulární afinní zobrazení a jeho rozkladu na zobecněné základní afinity bude aspoň jedna projekce. Protože $h(A)=2$ neboť 2. a 3. řádek jsou lineárně nezávislé, bude projekce právě jedna.

2. Samodružné body: $(A-E)X = -B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-4&-4&-4\\2&-2&-2&-2\\3&-3&-3&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \underline{x-y-z+1=0 \equiv \rho}$$

Rovina ρ je množina všech samodružných bodů

3. Charakteristická rovnice: $|A-\lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&-4\\2&-1-\lambda&-2\\3&-3&-2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)+24+24-12(1+\lambda)+$$
$$-6(5-\lambda)-8(2+\lambda)=0$$
$$-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$$\underline{\lambda_1=0},\ \underline{\lambda_{2,3}=1}$$

Vzhledem k podobným výsledkům v bodě 2 a 3 je f čistá projekce (tj. s ničím nesložená) na rovinu ρ ve směru generovaném char. vektorem $\vec{x}_1$.

4. Charakteristické vektory - samodr. směry

$$\lambda_1=0: \begin{pmatrix}5&-4&-4\\2&-1&-2\\3&-3&-2\end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix}5&-4&-4\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$3x_2 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}x_2$ dosaď

$5x_1 - 4x_2 - 6x_2 = 0$

$x_1 = 2x_2$

$$\underline{\vec{x}_1 \in \langle (4;\ 2;\ 3)\rangle}$$

$$\lambda_{2,3}=1: \begin{pmatrix}4&-4&-4\\2&-2&-2\\3&-3&-3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\eta = n - h = 3-1 = 2$

$x_1 = x_2 + x_3$

$$\underline{\vec{x}_{2,3} \in \langle (1;1;0),(1;0;1)\rangle = Z_\rho}$$

$$\vec{x}_{2,3}\cdot\vec{n}_\rho = 0$$

Úloha 9b-1 $\quad f \equiv X' = \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}X,\ a \neq 0.$

Řešení:

1. $A^TA = \begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a^2&a\\a&1\end{pmatrix} \neq k^2E$ protože $a \neq 0$

2. $|A| = 1 > 0 \Rightarrow f$ je přímá afinita

3. Samodružné body: $(A-E)X = 0$

$$\begin{array}{cc}x&y\\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix} \Rightarrow ax=0 \Rightarrow \underline{x=0} \equiv o = y\ (\text{osa})$$
$\Downarrow$
y libovolné r.č.

4. Charakteristická rovnice $|A-\lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\a&1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 1$$

5. Charakteristické vektory, samodružné směry

$$\lambda_{1,2}=1: \begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix} \Rightarrow ax=0 \Rightarrow x=0$$
$\Downarrow$
y libovolné r.č.

$\eta = n - h = 2 - 1 = 1$

$\underline{\vec{x}_1 \in \langle (0;\ 1)\rangle}$ - směr osy y

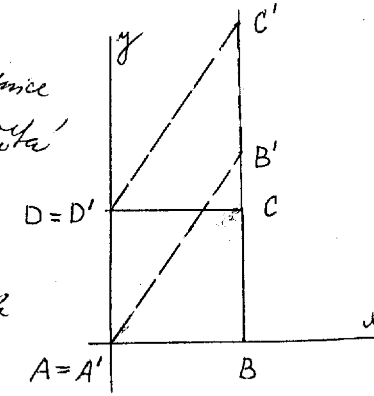
Dle V5 jde o elaci s osou $o = y$ modul elace $h = 1 \Rightarrow$ jde o ekviafinitu

Význam parametru a:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ax+y\end{pmatrix}.$$

Souřadnice x obrazu je stejná jako souřadnice x vzoru, k souřadnicím y obrazu se přičítá a násobek souřadnice x.

Z obrázku, v němž je sestrojen obraz čtverce $ABCD$, jehož dvě strany leží na souřadnicových osách, je zřejmé proč se elace v rovině nazývá také zkosení.



$a = 1{,}4$

Afinní zobrazení - cvičení

10. Afinní zobrazení je dáno vzhledem ke KASS rovnicí

$$f \equiv X' = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & h\end{pmatrix} X.$$

Dokažte, že f je osová afinita, jejíž osa $o \equiv x$ a je-li $h \neq 1$, je h její modul (charakteristika), je-li $h = 1$, jde o elaci. Dále dokažte, že pro $k \neq 0$ je $\frac{h-1}{k}$ směrnice přímek patřících do směru afinity a pro $k = 0$ jde o osovou afinitu pravoúhlou.

Řešení:

1. $A^TA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ k & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & k\\ k & k^2+h^2\end{pmatrix}$,
   a) pro $k=0$ a $h=1$ je $A^TA=E$ a f je shodnost (identita, protože $A=E$),
   b) pro $k \neq 0 \vee h \neq 0,1$ je $A^TA \neq k^2E \Rightarrow f$ je afinní zobrazení, které je pro
      α) $h=0$ singulární, protože $A = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,
      β) $h \neq 0$ afinitou v rovině protože $|A| = h \neq 0$.
2. $|A| = h \Rightarrow h$ je modul afinity.
3. Samodružné body:

   Předpokládáme $A \neq E \Rightarrow k \neq 0 \vee h \neq 1$, tj. předpokládáme, že nenastane případ 1a).

   $(A-E)X = 0$
   $0.x + ky = 0$
   $0.x + (h-1)y = 0$
   $y = 0 \Rightarrow$ množinou všech samodružných bodů je osa x (přímka) $\Rightarrow f$ je osová afinita s osou x.
4. Samodružné směry: $|A - \lambda E| = 0$

   $\begin{vmatrix}1-\lambda & k\\ 0 & h-\lambda\end{vmatrix} = 0$
   $(1-\lambda)(h-\lambda) = 0$
   $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = h$

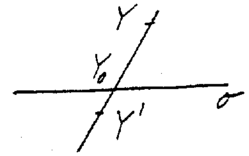
   Charakteristické vektory:
   $\lambda_1 = 1$: $ky = 0$
   $(h-1)y = 0$
   $y = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 \in \langle(1;0)\rangle$ směrový vektor osy x

$\lambda_2 = h$: $(1-h)x + ky = 0$
$h \neq 0$ $\quad 0.x + 0.y = 0$

a) Je-li $k \neq 0$, pak $y = \frac{h-1}{k}x \equiv s$

$\vec{x}_2 \in \langle(k; h-1)\rangle$

Vektor $\vec{x}_2$ generuje druhý samodružný směr – směr afinity. Všechny vektory směru $\mathcal{L}(\vec{x}_2)$ jsou charakteristické, příslušné k $\lambda_2 = h$, takže



$\varphi(Y-Y_0) = \lambda_2(Y-Y_0)$
$f(Y) - f(Y_0) = h(Y-Y_0)$
$Y' - Y_0 = h(Y-Y_0)$
$(Y'YY_0) = h \Rightarrow h$ je modul (charakteristika) osové afinity

Poznámky:

Pro $h=1$ je $y=0$ a $\vec{x}_2 \in \langle(1;0)\rangle \Rightarrow$ směr afinity $\mathcal{L}(\vec{x}_2)$ je směr $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$, tj. směr osy afinity $o \Rightarrow f$ je elace. Závěr souhlasí s V5 protože číslo 1 je dvojnásobným $(n=2)$ charakteristickým kořenem.

Pro $k \neq 0$ je $\frac{h-1}{k}$ směrnice přímky s, která patří do směru afinity.

b) Je-li $k=0$, pak: $(1-h)x + 0.y = 0$
$0.x + 0.y = 0$
$(1-h)x = 0$
$x = 0$ pro každé $h \neq 1 \Rightarrow$

$\vec{x}_2 \in \langle(0,1)\rangle \Rightarrow$ samodružný směr je směr osy $y \Rightarrow$ afinita je pravoúhlá. ($k=0 \wedge h=1$ viz případ 1a)

Poznámka: Je-li $h=0$ jde o projekci roviny na osu x ve směru $\mathcal{L}(\vec{x}_2)$, kde $\vec{x}_2$ je char. vektor příslušný k char. kořenu $\lambda_2 = 0$.

11. Vysvětlete, jaký je geometrický význam rovnosti

$$\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varkappa \neq 0,1 \text{ vzhledem k LSS.}$$

Řešení:

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix},$$

nezáleží při násobení těchto matic na jejich pořadí.

a) Matice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}$$

je dle úlohy č. 10 ($k=0$, $h=\varkappa$, $\varkappa \neq 0,1$) maticí zobrazení asociovaného k osové afinitě a_1 s osou x, jejíž směr udává osa y.

b) Analogicky platí, že matice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je maticí zobrazení asociovaného k osové afinitě a_2 s osou y, jejíž směr udává osa x.

Důkaz: 1. $|A_2| = \varkappa \neq 0 \Rightarrow a_2 \equiv X' = A_2X$ je afinita

2. Samodružné body: $(A_2 - E)X = 0$

$$\begin{pmatrix} \varkappa - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\varkappa - 1)x = 0$$
$$x = 0 \equiv y$$

Množina všech samodružných bodů je osa y $\Rightarrow$ a_2 je osová afinita s osou y.

3. charakteristické kořeny: $|A_2 - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} \varkappa - \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \varkappa$$

4. charakteristické vektory:

$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} \varkappa - 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\varkappa-1)x = 0$, $x = 0$, $\vec{x}_1 \in \langle (0;1) \rangle$ směr osy afinity

$\lambda_2 = \varkappa: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\varkappa \end{pmatrix} \Rightarrow (1-\varkappa)y = 0$, $y = 0$, $\vec{x}_2 \in \langle (1;0) \rangle$ směr afinity = směr osy x

Protože

$$\begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}$$

je maticí asociovaného zobrazení ke stejnolehlosti h se středem v počátku a koeficientem $\varkappa \neq 0,1$, je z dané rovnosti zřejmé, že tato stejnolehlost může být složena z osových afinit a_1, a_2. Protože uvedená úvaha platí pro libovolnou LSS (pro afinity není nutná KASS), můžeme říci, že z uvedené rovnosti plyne:

Každou stejnolehlost lze nekonečně mnoha způsoby rozložit na dvě osové afinity, jejichž různoběžné osy lze libovolně zvolit tak, aby procházely středem stejnolehlosti S. Přitom osa jedné afinity udává směr druhé a naopak. Moduly obou afinit jsou rovny $\varkappa$.

$$a_1 \equiv X' = A_1X$$
$$a_2 \equiv X'' = A_2X$$
$$a_1a_2 \equiv X'' = A_2A_1X = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}X \Rightarrow a_1a_2 = h$$

Na obrázku je stejnolehlost $h\,(S, \frac{2}{3})$ rozložena na osové afinity a_1, a_2, jejichž osy o_1, o_2 byly libovolně zvoleny středem S. Je zvolen bod X a sestrojen bod $X'' = h(X)$. Dále jsou sestrojeny body $X' = a_1(X)$ a $X'' = a_2(X')$. Potom je zvolen bod A a jsou sestrojeny jeho obrazy $a_1(A) = A'$, $a_2(A') = A''$. Pro tyto body platí: $h(A) = A''$, tj. $S \in AA''$ a $|SA''| = \frac{2}{3}|SA|$.