Shodná zobrazení - cvičení

1. Určete parametry p, q, r tak, aby zobrazení, popsané vzhledem ke KASS v E_3 následující maticovou rovnicí, bylo shodné:

a)
$$X' = 1/15 \begin{pmatrix} 2 & 10 & p \\ 5 & 10 & q \\ 14 & -5 & r \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)
$$X' = 1/15 \begin{pmatrix} 2 & 11 & 2p \\ p & -2p & 2p \\ 14 & 2 & -p \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}.$$

Výsledky: a) $(p, q, r) = (\pm 11, \mp 10, \pm 2)$ - dvě řešení, b) $p = 5$, $q \in \mathbf{R}$, libovolné.

2. Určete početní vyjádření shodnosti f v E_2, pro kterou při pevně zvolené KASS platí, že obrazy bodů A, B, C jsou pořadě body A', B', C'.

a) $A = [-1, -1]$, $A' = [2, -2]$, $B = [3, 3]$, $B' = [6, 2]$, $C = [2, 1]$, $C' = [4, 1]$.

b) A, A', B, B', - viz a), $C = [3, 0]$, $C'' = [6, -1]$.

Výsledky:

a)
$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b)
$$X' = X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Určete početní vyjádření shodnosti f v E_3, pro kterou při pevně zvolené KASS platí, že obrazy bodů A, B, C, D jsou pořadě body A', B', C', D': $A = [1, 1, 1]$, $A' = [3, 6, 7]$, $B = [0, 1, 1]$, $B' = [2, 6, 7]$, $C = [2, 1, 0]$, $C' = [4, 6, 6]$, $D = [3, -1, 1]$, $D' = [5, 4, 7]$.

Výsledek:
$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Určete samodružné body a samodružné směry, druh a určující prvky shodného zobrazení f v E_2:

a)
$$f \equiv X' = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek: f má jediný samodružný bod $S = [5/2, 0]$ a nemá žádný samodružný směr; f je otočení se středem S o úhel $\alpha = 53°$.

b)
$$f \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Výsledek: žádný samodružný bod, dva samodružné směry generované vektory $(1, 1)$, $(1, -1)$; f je posunutá souměrnost složená z osové souměrnosti podle osy $o \equiv x - y - 2 = 0$ a z posunutí ve směru osy o.

c)
$$f \equiv X' = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek: Zobrazení f má přímku samodružných bodů $o \equiv 2x + 4y - 5 = 0$ a dva samodružné směry generované vektory $(2, -1)$, $(1, 2)$; f je osová souměrnost podle osy o.

d) $f \equiv x' = x + 3$

$y' = y + 2$.

Výsledek: f je posunutí, určené vektorem $(3, 2)$, které nemá žádný samodružný bod a ve kterém je každý směr samodružný.

e) $f \equiv x' = -x + 2$

$y' = -y + 2$.

Výsledek: f má jediný samodružný bod $S = [1, 1]$, každý směr je samodružný; shodnost f je středová souměrnost se středem S.

f)
$$f \equiv X' = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} X.$$

Výsledek: f je osová souměrnost s osou $o \equiv \sqrt{3}x - 3y = 0$; samodružné směry jsou generovány vektory $(3, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -3)$.

g)
$$f \equiv X' = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} X.$$

Výsledek: f je otočení kolem počátku o $60°$.

5. Je dána shodnost f v E_2:
$$f \equiv X' = 1/13 \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zvolte novou KASS, kterou označte $KASS_2$, tak, že ponecháte stejný počátek a za nové bázové vektory zvolíte normované charakteristické vektory příslušné pořadě k charakteristickým kořenům 1 a -1.

a) Napište rovnici f vzhledem ke $KASS_2$ a ukažte, že f je souměrnost podle přímky o rovnoběžné s osou x soustavy $KASS_2$.

b) Zvolte vhodně nový počátek $KASS_3$, která bude mít stejné bázové vektory jako $KASS_2$ a napište rovnici shodnosti f v této $KASS_3$.

Výsledek: Matice přechodu
$$M = 1/\sqrt{13} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) $X' = (M^{-1}AM)X + M^{-1}B$, kde A, B jsou matice z rovnice shodnosti $f \equiv AX + B$ v původní KASS;
$$f \equiv X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13}/2 \end{pmatrix}, \qquad o \equiv y = \sqrt{3}/2.$$

b) Transformační rovnice:
$$X' = X + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13}/2 \end{pmatrix}.$$
$$f \equiv X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X.$$

6. Dokažte, že charakteristické vektory matice
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha, \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
příslušné k charakteristickým kořenům 1 a -1 jsou pořadě $(\cos\alpha/2, \sin\alpha/2)$, $(-\sin\alpha/2, \cos\alpha/2)$ a vysvětlete, jaký důsledek to má pro osovou souměrnost $X' = A_\alpha X$ v E_2.

Výsledek: Souřadnice charakteristických vektorů dosaďte do soustavy $(A_\alpha - \lambda E)X = O$; první vektor je směrový a druhý je normálový vektor osy o souměrnosti, která svírá s kladnou poloosou x úhel velikosti $\alpha/2$.

7. Využijte výsledků úlohy 6 k určení rovnice osové souměrnosti v E_2, pro jejíž osu platí $o \equiv \sqrt{3}x - 3y = 0$. O správnosti řešení se přesvědčte pomocí věty o početním vyjádření souměrnosti podle nadroviny.

Výsledek: $X' = A_\alpha X$, kde $\alpha = 60°$.

8. Určete, jaké shodné zobrazení v E_2 vznikne složením osových souměrností podle souřadnicové osy x a přímky $o \equiv \sqrt{3}x - 3y = 0$ v tomto pořadí.

Výsledek: f je otočení kolem počátku o $60°$.

9. Rozložte shodnost f v E_2 na osové souměrnosti, tj. určete osové souměrnosti f_1, f_2, f_3 tak, aby platilo $f = f_1 f_2$, případně $f = f_1 f_2 f_3$:

a) $f \equiv X' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}X,$ b) $f \equiv X' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$

c) $f \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Výsledky: (Vždy je uveden pouze jeden z možných rozkladů.)

a) Zvolíme-li za osu souměrnosti f_1 osu x KASS, je

$$f_1 \equiv X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}X \quad \text{a} \quad f_2 \equiv X'' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}X'.$$

b) Zobrazení f je rotace se středem S na ose x KASS. Zvolíme-li za osu souměrnosti f_1 osu x, je

$$f_1 \equiv X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}X \quad \text{a} \quad f_2 \equiv X'' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}X' + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Zobrazení f je posunutá souměrnost, jejíž samodružné směry jsou generovány vektory (1 , 1) a (1, -1); lze ji složit z osové souměrnosti f_1 s osou jejímž směrovým vektorem je vektor (1 , 1) a z posunutí g ve směru této osy; posunutí g lze dále rozložit na dvě osové souměrnosti f_2 a f_3 :

$$f_1 \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad g \equiv X'' = X' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_2 \equiv X'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X', \qquad f_3 \equiv X''' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X'' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. Rozložte na osové souměrnosti (maximálně 3) shodné zobrazení $f: E_2 \to E_2$, určené vzory a obrazy bodů $A, B, C,$ jestliže v dané KASS mají souřadnice:

$A = [-1, -1]$, $B = [3, 3]$, $C = [3, 0]$ a $A' = [2, -2]$, $B' = [6, 2]$, $C' = [6, -1]$.

Úlohu řešte také graficky.

Výsledky:

Shodnost f je posunutí určené vektorem (3, -1) - viz úlohu 2 b, které lze složit ze dvou osových souměrností f_1 a f_2. Osou souměrnosti f_1 je osa úsečky AA', osou souměrnosti f_2 je osa úsečky $f_1(B)B'$:

$$f \equiv X' = X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 \equiv X' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$f_2 \equiv X'' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X' + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 24 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

11. V rovině jsou dány dva shodné trojúhelníky $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Najděte nejmenší počet osových souměrností pro které platí, že v zobrazení f složeném z těchto souměrností je obrazem trojúhelníka ABC trojúhelník $A'B'C'$. Řešte graficky pro trojúhelníky přímo i nepřímo shodné.

Výsledky:

Pro trojúhelníky přímo shodné užijte osové souměrnosti f_1, f_2 popsané ve výsledcích úlohy 10 ; $f = f_1 f_2$. Pro trojúhelníky nepřímo shodné užijte ještě osovou souměrnost f_3, jejíž osou je osa úsečky s krajními body $f_2[f_1(C)]$ a C'; $f = f_1 f_2 f_3$.

12. V E_2 je dána přímka $o \equiv x + y + 1 = 0$. Napište rovnici souměrnosti podle přímky o a určete její samodružné směry. (Vše v téže KASS).

Výsledky: $f \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Samodružné směry jsou generovány vektory (-1, 1), (1, 1).

13. Napište rovnice souměrnosti podle roviny, ve které je obrazem bodu $A = [1, 0, 2]$ bod $A' = [0, 1, 2]$.

Výsledky:

$x' = y,\ y' = x,\ z' = z$; rovnice roviny souměrnosti : $x - y = 0$.

14. Napište rovnice souměrnosti podle roviny, ve které je obrazem bodu

a) $A = [1, 0, 5]$ bod $A' = [0, 5, 1]$,

b) $B = [1, 0, -2]$ bod $B' = [3, 2, 0]$.

Výsledky:

a) $$\begin{aligned} x' &= \tfrac{20}{21}x + \tfrac{5}{21}y - \tfrac{5}{21}z \\ y' &= \tfrac{5}{21}x - \tfrac{4}{21}y + \tfrac{20}{21}z \\ z' &= -\tfrac{4}{21}x + \tfrac{20}{21}y + \tfrac{5}{21}z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{4}{3} \\ y' &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{4}{3} \\ z' &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

15. Napište rovnice souměrnosti podle roviny $\rho \equiv x + 2y - z + 4 = 0$.

Výsledek:

$$X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}X + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

16. Určete samodružné body, samodružné směry a typ shodnosti $f: E_3 \to E_3$, jestliže:

a) $f \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$ b) $f \equiv X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Výsledky:

a) Množinou všech samodružných bodů je rovina $\rho \equiv x - y - 3 = 0$; samodružné směry jsou generovány vektory $\mathbf{x} \in \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ a $\mathbf{x} \in \langle (1, -1, 0) \rangle$. Zobrazení f je souměrnost podle roviny ρ.

b) Samodružné body neexistují, samodružné směry jsou stejné jako v úloze a). Zobrazení f je nepřímá shodnost, f je posunutá souměrnost se samodružnou rovinou $\rho \equiv x - y = 0$.