ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Mgr. Irena Budínová, Ph.D.

Algebra ve školské matematice

- Problém pro žáky - odpoutat se od konkrétních čísel k číslům vyjádřeným proměnnou
- Při zavádění nových pojmů je vhodné využívat žákovských **prekonceptů**
- Budování nových poznatků začínáme neformálně, po jejich osvojení a pochopení přistupujeme k formálnímu zavedení

- V úvodu učiva je pro žáky snazší řešit stejný příklad zadaný příběhem než algebraicky (Kalchman, Koedinger, 2005):
- **a) Úloha zadaná příběhem**

  Když se Tod vrátil ze svého zaměstnání číšníka, vynásobil si svoji hodinovou mzdu počtem 6 hodin, které ten den odpracoval. Když k tomu přidal 66 dolarů, které si vydělal na zpropitném, zjistil, že celkem to dělá 81,90 dolarů. Kolik Tod dostává za hodinu?

- **b) Slovně zadaná úloha (matematický model situace)**

  Myslím si číslo. Když ho vynásobím 6 a pak přičtu 66, dostanu 81,9. Jaké číslo jsem si myslel?
- **c) Rovnice**

  Najdi x, jestliže $x.6+66=81{,}90$.

- Který přístup je nejjednodušší pro nás?
- Z výzkumu vyplynulo, že žáci jsou nejúspěšnější při úloze zadané příběhem
- Žáci k řešení slovních úloh nevyužívali rovnic, ale zcela jiných strategií - **pokusu a omylu**, strategií **řešení „od konce"** (začali konečnou hodnotou 81,9, odečetli 66 a výsledek vydělili 6) apod. V průměru žáci dosáhli 66 % v úloze zadané příběhem, 62 % ve slovně zadané úloze a pouhých 43 % u rovnice.

Proč potřebujeme pracovat s obecným vyjádřením a kde se s ním setkáme?

- Ve školské matematice
- Technická praxe
- Ostatní vědní disciplíny (biologie, fyzika, chemie)
- Běžný život

Historická poznámka

- Počátky prvních náznaků algebry spadají do doby kolem roku 2 000 před naším letopočtem
- Verbalistické období
- 500 př. n. l. – období geometrické algebry Řeků
- 250 př. n. l. – Diofantos z Alexandrie začíná používat symboly, období synkopické

- Synkopické období trvalo až do konce 15. století. Jeho nejvýznamnějším představitelem byl tádžický matematik Al Chovarizmi (9. st.)
- Zdokonalování symboliky – Francois Viéte (16. st.), René Descartes (17. st.)
- Od 15. st. dodnes – období symbolické

Vývoj používání písmen:

- Dnešní zápis rovnice $2x^3 + 5x = 7$ měl následující vývoj:
- Ve druhé polovině 15. století: 2 cubus et 5 rebus aequales 7
- V první polovině 16. století: 2 cubus p 5 rebus aequautur 7
- Ve druhé polovině 16. Století: 2 C + 5 N aeru 7.

Používání písmen ve významu čísla:

- Význam proměnnné – např. v rovnici **y** = k**x** + q jsou proměnnými x, y.
- Význam konstanty – v rovnici y = **k**x + **q** jsou konstantami k, q.
- Jediné, jednou pro vždy dané číslo, např. π, e, i.
- Označení neznámé v rovnici, proměnné v nerovnici.
- Nemusí mít žádný význam (nesmyslná rovnice)

- Pro žáky základní školy je pochopení významu písmene v algebře velmi náročným procesem
- Obtížnost spočívá v nárocích na abstraktní myšlení
- Mnoho problémů je způsobeno formálním způsobem výuky

- Zvládnutí této látky předpokládá znalost témat dříve probíraných:
  - operace s čísly přirozenými, celými, zlomky,
  - respektování priorit při provádění operací,
  - používání závorek,
  - základní věty z dělitelnosti,
  - pravidla o počítání s mocninami aj.

- Dále je třeba zvládnout:
  - Zápis slovního vyjádření pomocí symbolického jazyka
  - Úlohy vedoucí k postupnému zobecňování
  - Doplňování tabulek – dosazování do výrazu za proměnnou
  - Geometrická interpretace algebraických výrazů

Tři stupně práce s algebraickými výrazy:

- **modelování** – jde o pochopení smyslu a významu symbolických zápisů
- **standardní manipulace se symboly** – jde o úpravy algebraických výrazů podle známých vztahů, automatizace
- **strategická manipulace se symboly** – k práci s algebraickými výrazy je nutná určitá strategie, myšlenka, nestačí rutinní úpravy

Standardní manipulace se symboly:

a) Doplňte výrazy tak, aby vyjadřovaly druhou mocninu dvojčlenu:

i. $(a+b)^2$, $(m+n)^2$

ii. $(3a+4b)^2$, $(0{,}4a+0{,}2x)^2$

iii. $(a^3+b)^2$, $(x^m+z^2)^2$

iv. $(6a^3+3b^4)^2$, $(-\frac{3}{8}a^x+0{,}4b)^2$

b) Z daných algebraických výrazů vyberte ty, které vyjadřují druhou mocninu součtu nebo rozdílu dvou čísel:

- $(a+b)^2$, $a+b^2$, $(a-2b)^2$, $(a+2b)^2.2$, $(a^2-2ab+b^2)$

c) Úlohy s nabízenou odpovědí:

- $2^3.2^{2x}$ a) 2^{6x}, b) $2^{3x.2x}$, c) 4^{6x}, d) 2^{3+2x}

d) Doplňování:

- x^2+2xy+__=( )^2
- $9r^2-$__$+25=($ $)^2$
- $9r^2-$__ ? __=( )^2
- __ ? 0,4x ? __=(0,2x-__)^2
- $9x^2-16y^2=$_________

Strategická manipulace se symboly:

a) Důkazové úlohy:

1. Dokažte, že aritmetický průměr je vždy větší nebo roven geometrickému průměru
2. Dokažte: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$
3. Dokažte, že platí

   $(ab+cd)^2+(ac-bd)^2=(a^2+d^2)(b^2+c^2)$

b) Úpravy algebraických výrazů, které vyžadují vtip

Zajímavé příklady:

- Kde se stala chyba ve výpočtu?

$$a = 3/2\ b$$
$$4a = 6b$$
$$14a-10a = 21b-15b$$
$$15b-10a = 21b-14a$$
$$5(3b-2a) = 7(3b-2a)$$
$$5 = 7$$

Pro nadané či hravé a trpělivé žáky:

- Vyřešte algebrogram:

```
 MNOHO
 JÍDEL
 MNOHO
------
NEMOCÍ
```

Předpokládané chyby

- Chyby numerické
- Chyby podstatné
- Chyby způsobené zápisem
- Chyby způsobené psychikou žáka

Literatura:

- KALCHMAN, M., KOEDINGER, K. R.: Teaching and Learning Functions. In: *How Students Learn: Mathematics in the Classroom*. Editors: Donovan, M. S., Bransford, J. D. Washington, DC, USA: National Academic Press, 2005.
- BLAŽKOVÁ, R.: Symbolika a terminologie v aritmetice a algebře. In: *Sborník XV. International Colloquium on the Management of Educational Process.* Vyškov: Vysoká vojenská škola pozemního vojska, 2002
- BLAŽKOVÁ, R.: Proč se učíme algebru? In: Novotná, J. (ed.) *Sborník Moderní trendy ve výuce matematiky a fyziky.* Brno: MU, 2002

- BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky* .Praha: SPN, 1959
- HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN 1990, ISBN: 80-08-01344-3.
- ŠEDIVÝ, J. a kol.: *Antologie matematických didaktických textů.* Praha: SPN 1987.
- ZNÁM, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. Praha: SNTL 1986.