Žákův poznávací proces
Funkce

Irena Budínová

Žákův poznávací proces

- Ve výuce matematiky usilujeme o to, aby pamětné učení bylo co nejvíce podpořeno porozuměním
- V problematice poznávacího procesu žáka se ztotožňuji s pojetím M. Hejného a F. Kuřiny (2009), kteří vycházejí z toho, že *„v poznávacím procesu člověk obvykle nejdříve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a dochází tak k obecnějším a abstraktnějším poznatkům."*

- Proces má potom následující posloupnost:

  MOTIVACE → IZOLOVANÉ MODELY → UNIVERZÁLNÍ MODELY → ABSTRAKTNÍ ZNALOSTI→ KRYSTALIZACE

- **Krystalizace**: zařazování nových poznatků do struktury
- **Automatizace**: nácvik poznaného, je výsledkem početného opakování akce

Motivace

- Základem výukového procesu je přimět žáky k tomu, aby se chtěli učit
- Existuje několik důvodů, proč se žáci chtějí učit (Petty, 1996):
  - Věci, které se žák učí, se mu hodí.
  - Kvalifikace, kterou žák studiem získá, se mu hodí.
  - Při učení žák mívá obvykle dobré výsledky a tento úspěch mu zvyšuje sebevědomí.
  - Příznivý ohlas učitele nebo spolužáků.
  - Když se žák nebude učit, bude to mít nepříjemné (a dosti bezprostřední) důsledky.
  - Věci, které se žák učí, jsou zajímavé a vzbuzují jeho zvídavost.
  - Žák zjišťuje, že vyučování je zábavné.

- Je podstatné rozlišovat mezi motivací **vnější** a **vnitřní**
- V matematice je vhodné žáky pozitivně motivovat tzv. *motivačními příklady*, které využívají některý z následujících aspektů:
  - využívají žákovských prekonceptů; žák je schopen příklad vyřešit za pomocí intuice a známých postupů, aniž by se seznámil s novým učivem,
  - příklad zaujme pozornost žáků (např. svojí zábavností), žáci pak ani nevědí, že se učí,
  - příklad pochází z běžného okolí žáka; žák si dokáže představit konkrétní situaci, v níž matematické učivo použije.

Izolované modely

- Izolovaným modelem čísla 5 je 5 dětí nebo 5 kuliček, izolovaným modelem 30 % je třicetiprocentní sleva na boty
- Izolované modely by měly stát na začátku každého nového poznatku
- Vědomost, která není opřena o žádnou konkrétní představu, tj. o žádný izolovaný model, je obvykle silně formální

- Při seznamování s izolovanými modely budoucího pojmu nebo poznatku prochází žák čtyřmi stádii (Hejný, Kuřina, 2009):
  - první konkrétní zkušenosti s modelem, zárodkem příštího pojmu nebo poznatku;
  - seznámení s dalšími izolovanými modely pojmu (poznatku);
  - poznání vzájemné souvislosti některých modelů, vytváření jejich shluků na základě tušených souvislostí;
  - vytváření komunit izolovaných modelů, více či méně uvědomělé poznání jejich podstaty.

Univerzální modely

- V etapě univerzálních modelů žák nalézá společnou podstatu komunity izolovaných modelů a uvědomuje si jejich vzájemné spojitosti.
- Univerzální model v sobě zahrnuje všechny izolované modely, např. univerzální model funkcí $y=5x$, $y=x-1$, $y=-3x+0{,}02$ je lineární funkce $y=ax+b$.
- Mezi izolovanými modely a univerzálním modelem dochází k **mentálnímu zdvihu** a okamžik vzniku univerzálního modelu provází často radost. Alespoň k tomuto prvnímu mentálnímu zdvihu by mělo v každém případě dojít a poznávací proces by měl projít etapou univerzálních modelů.

Abstraktní znalosti

- Pokud dojde ještě k dalšímu abstraktnímu zdvihu, poznatek se dostane do roviny abstrakce.
- Je poměrně obtížné s jistotou říci, že žák do této etapy dospěl. Např. v případě lineární funkce $y=ax+b$ by už žák nejen poznal funkci podle zápisu, ale hluboce by chápal význam písmen x a y, v zápisu by si dokázal představit průběh nějaké změny, věděl by, co to je linearita této změny, vnímal by spojitost změny atd.

Krystalizace

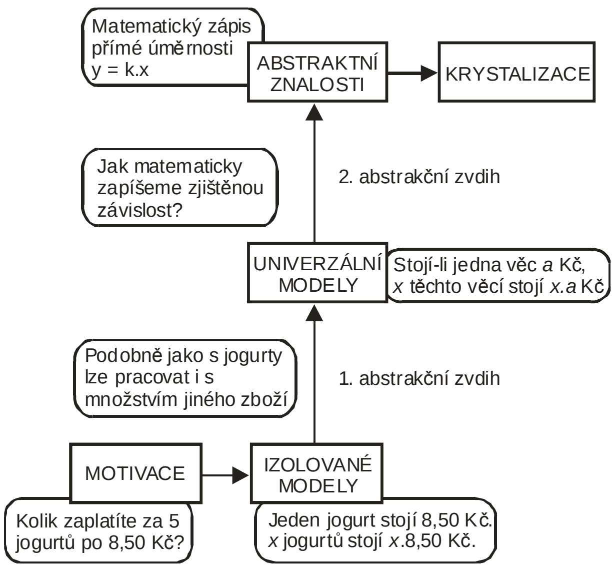
- Nová znalost se po vstupu do kognitivní struktury začne propojovat s existujícími poznatky. Zde se nezřídka objeví disharmonie, někdy krystalizace vede až k restrukturalizaci části kognitivní struktury.

- **Příběh** (6. třída):
  - Probíralo se dělení přirozeného čísla desetinným číslem. Žáci se po úvodní motivaci seznámili s algoritmem, podle něhož při dělení postupujeme a žáci už počítali několikátý příklad, když najednou Jáchym vykřikl: „Ale to není možné, paní učitelko! Dělení přece čísla zmenšuje, tak jaktože teď dostáváme po dělení větší číslo?" Jáchym měl z předchozího učiva zafixováno, že *dělení je proces, při němž dochází ke zmenšování čísla*. Např. 100:10=10. Ukázala jsem mu, jak bychom mohli uvažovat dále: 100:5=20, 100:1=100, jak tedy bude proces pokračovat, když ještě zmenším dělitele? 100:0,1=?. Jáchymovi dělalo potíž uvěřit, i když pochopil, kam mířím. Měl totiž svoji představu tak silně zafixovanou, že nový poznatek se mu chystal zcela rozbít kognitivní strukturu a to se mu nelíbilo.

Příklad poznávaní – lineární funkce

- Motivace: Zadáme příklad, s jehož řešením nebudou mít žáci problémy: Jeden jogurt stojí 8,50 Kč. Kolik stojí 3 jogurty? Kolik stojí 7 jogurtů?
- Izolovaný model: Pokud příklad s jogurty zobecníme, dostáváme izolovaný model pojmu lineární funkce. Když chceme koupit neznámý počet jogurtů (x), zaplatíme za ně x . 8,50 Kč.

- Univerzální model: Stejná zákonitost platí, když kupujeme určité množství jablek, banánů, rohlíků. Pokud nějaká věc stojí *a* korun, *x* těchto věcí stojí *ax* korun.
- Abstraktní znalosti: Matematicky zjištěnou závislost zapíšeme *y=ax* a už se nevtahuje pouze na předchozí konkrétní příklad s nákupem. Jedná se o funkční závislost přímá úměrnost, ve které *x* je nezávisle proměnná, *a* je koeficient a *y* je závisle proměnná.
- Nyní je potřeba přímou úměrnost rozšířit na lineární funkci. Modifikujeme příklad s jogurty: Máme koupit jednu čokoládu za 15 korun a *x* jogurtů za 8,50 korun. Dále postupujeme opět od izolovaného modelu k abstraktní znalosti pro lineární funkci.



Stručná historie vývoje pojmu funkce

- Pojem funkce jako takový se nerozvíjel plynule, ze začátku se spíše objevuje v pracech některých geniálních myslitelů, kteří však nenašli následovníky a vývoj tím byl stále zbržďován. Největšího posunu se pojmu funkce dostalo díky následujícím okolnostem:
  - řecké studium křivek (zejména Archimédes),
  - astronomie, která si vyžádala vznik trigonometrie,
  - studium fyzikálních zákonitostí (např. popis pohybu hmotného bodu v 17. st.),
  - vytvoření pravoúhlého systému Fermatem a Descartem a jejich objev analytického vyjádření funkční závislosti,
  - vznik diferenciálního počtu,
  - pochopení pojmu limity.

Archimédes ze Syrakus (287 – 212 př. n. l.)

- Určoval obsah plochy úseku, který ohraničuje parabola a přímka. Zvolil velice důmyslný způsob postupného vepisování stále menších trojúhelníků do úseku paraboly.
- Aproximoval číslo π
- Zabýval se studiem křivek

Vývoj astronomie

- Potřeba zavedení trigonometrie
- První práce o trigonometrických funkcích se vztahovaly k oblouku kruhu. Kruh daného poloměru byl rozdělen na 60 dílů (zde vidíme inspiraci řecké matematiky v babylónském systému, který používal šedesátkovou soustavu).
- První známé tabulky oblouků byly vytvořeny řeckým matematikem Hipparchem kolem roku 140 př. n. l.

- V indické matematice se poprvé objevuje funkce sinus. Byly vytvořeny tabulky polovičních oblouků (tedy tabulky sinů). Tento krok umožnil přirozeným způsobem zavést další funkce, které vyjadřovaly závislosti mezi stranami a úhly v pravoúhlém trojúhelníku
- Arabská matematika je spojena zejména se jmény dvou významných matematiků – al-Farábího a al-Bírúního. Výzkum al-Farábího (870 – 950) rozšířil trigonometrii o tangens a kotangens, které chápal jako délky příslušných tečen ke kružnici.

- Al-Bírúní (973 – 1048) udělal přechod od separovaných modelů k univerzálnímu modelu křivky. Jako první začal uvažovat o křivce obecně, hledat její extrémy a intervaly monotónnosti. Jeho myšlenky však nenašly pokračovatele a byly znovu objeveny až po šesti stoletích.
- V 15. století vytvořil německý matematik Johannes Müller systematický úvod do trigonometrie. Od této doby se stala trigonometrie vědou nezávislou na astronomii.

Studium dynamiky – 16. a 17. století

- Astronomická pozorování byla v té době již natolik přesná, že umožnila J. Keplerovi (1571 – 1630) učinit závěry o eliptických drahách planet a zavrhnout geocentrickou soustavu
- Galileo Galilei (1564 – 1642) podrobně popsal volný pád (kvadratická funkce)

Pravoúhlá soustava souřadnic

- Fermat už před Descartem zavedl pravoúhlé souřadnice a vytvořil tzv. souřadnicovou metodu, kterou aplikoval v geometrii. Ukázal, jak je možné najít lokální extrémy polynomických funkcí.
- René Descartes podrobně rozvedl myšlenku určení funkce pomocí analytického výrazu (1637). Touto formulí se ovšem rozuměla funkce daná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$.

Newton a Leibniz

- 2. polovina 17. století – rozkládání funkcí do nekonečných řad a objev integrování mocninné funkce. Toho využil Isaac Newton, který našel pro funkci vyjádření ve tvaru mocninné řady a integrováním člen po členu získal obsah pod grafem funkce.
- Zabýval se hledáním tečny k trajektorii, popsal způsob nalezení rovnice tečny, ale nedokázal ho uspokojivě vysvětlit

---

- Proces derivace mohl být vysvětlen až po objevení limity, s níž přišel až ke konci 18. století d'Alambert.
- Termín funkce (z latinského slova functio – úkon, vykonávání) zavedl v roce 1673 německý matematik Leibniz, avšak ve smyslu více méně geometrickém. V dnešním významu (ve smyslu analytického výrazu) poprvé slovo funkce použil roku 1698 Johann Bernoulli (1667 – 1748).

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) vytvořil symboliku, která je používána dodnes. Nejdůležitější Leibnizovou prací bylo zjištění, že integrace a derivace spolu souvisí.
- Ke komplexnímu pohledu na problematiku funkcí zásadně přispěl v 18. st. Leonhard Euler (vyslovil definici funkce, provedl klasifikaci funkcí: funkce rozděluje na algebraické a transcendentní; algebraické dále na racionální a iracionální, racionální na celistvé (polynomické) a lomené; transcendentní na exponenciální a logaritmické, goniometrické a cyklometrické, mocninné s iracionálním exponentem. Také zavedl pojem funkce zadané parametricky a pojmy inverzní, složené, sudé a liché funkce. Zkoumal i funkce dvou a více proměnných, atd.

- Objevem teorie množin v 19. st. se zobecňuje pojem funkce na libovolné zobrazení v množině reálných čísel. Při budování pojmu funkce pomocí zobrazení se vychází z kartézského součinu dvou množin podle následujícího schématu:

KARTÉZSKÝ SOUČIN DVOU MNOŽIN

KARTÉZSKÝ SOUČIN V MNOŽINĚ A

BINÁRNÍ RELACE $R \subset A \times A$

ZOBRAZENÍ

geometrická zobrazení | FUNKCE | operace

posloupnosti | míry

Literatura:

- Budínová, I.: Vývoj pojmu funkce od Archiméda po Newtona. In: *Acta Mathematica 13*. Univerzita Konštantýna Filozofa, Fakulta prírodných ved. Nitra, 2010
- Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál, 2009.
- Petty, G.: *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 1996.

Pojem funkce ve školské matematice
Základní pojmy

Význam slova „funkce"

- Charakteristická činnost něčeho (např. funkce přístrojů, tělesných orgánů)
- To, k čemu je něco určeno (např. společenská funkce umění, funkce řeči)
- Funkce ve veřejném životě (např. předseda, děkan, čestná funkce)
- Matematický význam – druh závislosti, přiřazení, předpis

RVP

- Okruh: Závislosti, vztahy, práce s daty
- Očekávané výstupy: Žák vyhledává a zpracovává data, vyhodnocuje a porovnává je, určuje vztah přímé nebo nepřímé úměrnosti, vyjádří funkční vztah rovnicí, tabulkou, grafem, matematizuje reálné situace
- Učivo: pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce, kvadratická funkce, racionálně lomená funkce, funkce s absolutní hodnotou, goniometrické funkce

Základní pojmy

- **Funkce**
  - VŠ definice vychází z teorie množin, funkci chápe jako zobrazení: Reálnou funkcí jedné reálné proměnné nazýváme zobrazení *f* množiny A reálných čísel *x* do množiny B reálných čísel *y*
  - Schematicky můžeme znázornit např. takto (jde o zobrazení v rovině reálných čísel)

- *x* nazýváme **nezávisle proměnnou**, *y* **závisle proměnnou**, množinu A **definičním oborem** funkce *f*, množinu B **oborem** funkčních **hodnot** *f*(A)
- ZŠ definice vychází z klasického přístupu, kdy je pojem funkce budován na základě **přiřazení**: Funkcí *f* nazýváme předpis, který každému reálnému číslu z množiny D_f přiřazuje právě jedno reálné číslo z množiny H_f. Množina D_f se nazývá definiční obor funkce *f*, množina H_f obor hodnot. Funkci *f* s definičním oborem D_f zapisujeme $y=f(x)$, $x \in D_f$.

Definice dalších pojmů si zopakujte z matematické analýzy

- **Graf funkce**
- **Vlastnosti funkcí:**
  - **Monotónní (ryze monotónní) funkce**
  - **Prostá funkce**
  - **Inverzní funkce**
  - **Omezená funkce**
  - **Minimum, infimum**
  - **Maximum, supremum**
  - **Sudá, lichá, periodická funkce**

Příklad: formální a neformální zavedení pojmu rostoucí funkce pro lineární funkci

Formální zavedení:

- V předpisu $y=kx+q$ nám k říká, zda funkce roste či klesá. V případě, že $k>0$, funkce roste, $k<0$, funkce klesá a $k=0$, funkce je konstantní. Kolikrát je k větší (menší), tolikrát funkce roste (klesá) rychleji.
- Postupujeme od obecného ke konkrétnímu, následují příklady a procvičování

Neformální zavedení:

- Jedná se o způsob neformálního zavedení pojmu rostoucí funkce, který autorka využívala při výuce funkcí na základní škole. Zkratka „U“ vyjadřuje učitelku a „Ž“ žáky, K je Kája.
- U: Adélka, Bára a Dana chodí na brigádu. Adélka vydělává 40 korun za hodinu, Bára 50 a Dana 55 korun za hodinu. Která si nejrychleji vydělá na nové tričko?
- Ž: Dana.
- U: Nakreslete si nyní graf a do něj vyneste to, jak závisí vydělané peníze na odpracovaném čase (učitelka dbá na to, aby žáci popisovali osy a různobarevně zaznačovali jednotlivé body). Takže co jste nyní nakreslili, co znamenají ty body?
- Ž: Že s každou další hodinou přibude Adélce na výplatu 40 korun atd.
- U: Dobře. Ale dívám se, že Karel spojil body úsečkou. Myslíš, Karle, že to může odpovídat nějaké reálné situaci?
- K: Ano - holky si nechávají posílat peníze na účet, a tak jim přibývají peníze pořád, ne jen s každou hodinou. Tak jako když tatínek čepuje benzín.

- U: To je hezká úvaha. Ve tvém obrázku se nám navíc bude dál lépe orientovat. Takže, podívejte se na svoje grafy a řekněte mi, čím se ty jednotlivé úsečky liší. Odrážejí nějak fakt, že každá holka vydělává jinak?
- Ž: (Chvíli pozorují grafy) Ta Adélčina úsečka je taková placatá.
- U: Tak to asi nebude to správné slovo. Úsečka může být těžko placatá. Zkuste to říci nějak jinak.
- Ž: Ta Danina úsečka je strmější... (žáci se pokoušejí vypořádat s obtíží vystihnout, jaká úsečka vlastně je).
- U: Mohli bychom tedy říci, že Danin graf roste rychleji?
- Ž: Ano
- U: Dobře. Tak nyní z grafu zapište funkční předpis, jak jsme se to učili minule (učitelka kontroluje, zda žáci zapsali a=40x, b=50x, d=55x). Čím se ty předpisy liší?
- Ž: Dana vydělává nejvíc a má tam největší číslo.
- U: Takže to vypadá tak, že Danin graf roste nejrychleji a v předpisu má před x největší číslo. Tak zkusíme jiný příklad, jestli to bude fungovat stejně.

- Učitelka modifikuje zadání, žáci se přesvědčují, že hypotéza se zatím potvrzuje. Poté učitelka opět změní zadání, dívky peníze začínají utrácet. Žáci se tak seznamují s klesající funkcí a zápornou směrnicí. V závěru dochází ke zobecnění a k zapsání zjištěných faktů.
- Žáci na základě konkrétního modelu jsou schopni zobecnit pravidlo pro rostoucí (klesající) funkci. Na závěr dojde k vyslovení definice, ta pro ně však už má pochopitelný obsah.

- Na základní škole se nejčastěji setkáme s určováním následujících vlastností:
  - Zda je funkce rostoucí, klesající nebo konstantní
  - U kvadratických funkcí se určuje minimum a maximum
- Klasifikace elementárních funkcí:

elementární funkce
- algebraické
  - racionální
    - polynomické
    - racionálně lomené
  - iracionální
- transcendentní (exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické)

- Na základní škole se můžeme setkat
  - se speciálními případy polynomických funkcí – lineární a kvadratickou
  - se speciálním případem racionálně lomených funkcí – lineárně lomenou funkcí, zejména s nepřímou úměrností
  - S úvodem do goniometrických funkcí – obvykle sinus a kosinus (vychází se z pravoúhlého trojúhelníku)

Rozvoj funkčního myšlení

- Funkční myšlení je schopnost uvědomovat si závislosti mezi jevy; pochopit, že jedna změna může znamenat další; umět tyto změny matematicky popsat a v praxi využívat.
- Žáci funkční myšlení rozvíjejí již od prvního stupně:
  - Početní operace: umět stanovit změnu výsledku na změnách čísel, která do operace vstupují
  - Konstrukční úlohy: stanovit závislost výsledku konstrukce na volbě velikosti nebo vzájemné polohy zadaných prvků

- Také v jiných předmětech žáci využívají funkčních závislostí, aniž si to uvědomují. Měli by umět rozhodnout, zda mezi jevy existuje kvantitativně postižitelný vztah (např. v přírodopisu žáci zaznamenávají teplotu vzduchu v průběhu dne)
- Umět popsat funkci tabulkou, grafem, rovnicí (různé reprezentace téže funkce). Umět sledovat vlastnosti funkce.
- Umět číst grafy.
- Pochopit obecný zápis funkce.

Závěry, ke kterým dospěly zahraniční výzkumy	**Způsoby převládající v našem školství**
V úvodu učiva by se žáci měli setkat s co největším množstvím aplikačních úloh, které umožní vytvořit v žákově poznávacím procesu základní pojmy – závisle a nezávisle proměnná, definiční obor, apod.	V úvodu učiva se žáci setkávají rovnou s lineární funkcí, navíc zavedenou formálně (pomocí definice).
Žáci by se od začátku měli setkávat s větším spektrem funkcí než jen s lineární, a také ne s pouze těmi, které lze analyticky vyjádřit. Žáci tím nezískají zúžený pohled na problematiku funkcí.	Učivo na základní škole se téměř výhradně omezuje na lineární funkci, okrajově se probírá nepřímá úměrnost, kvadratická funkce jen zřídka. Goniometrické funkce nejsou v RVP povinným učivem.
Na učivo funkcí by měl mít učitel dostatek času, aby u žáků mohl rozvíjet změny v uvažování. Obtížný je zejména přechod od „obyčejného“ počítání s čísly k práci s proměnnými. Tzv. funkční myšlení je potřeba rozvíjet samostatnou prací žáků.	V 9. ročníku nemá učitel na samostatnou práci žáků čas, žáci navíc v období přijímacích zkoušek nejsou motivováni k práci.

- Pokud má být rozvíjeno funkční myšlení, nemůžeme výuku funkcí omezit pouze na zakreslování grafu funkce z předpisu či tabulky, jak se často děje. Je potřeba se rovnoměrně zaměřovat na:
  A. Odhadování grafu funkčních závislostí různých dějů
  B. Určování definičních oborů a oborů hodnot
  C. Určování vlastností funkce, či naopak z vlastností funkce stanovení funkce
  D. Čtení z grafu, apod.

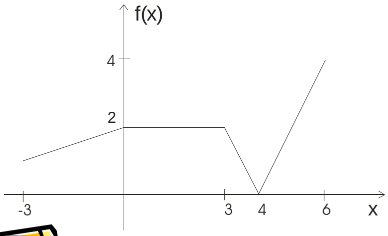
A. Odhadování grafu

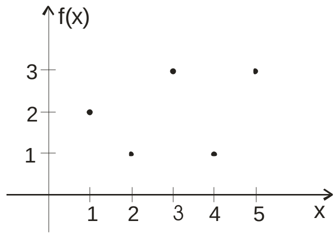
- Žáci graf často zaměňují za trajektorii nějakého bodu, nerozumí tomu, že křivka může vyjadřovat nějakou změnu
- Příklady, kdy odhadujeme graf pro určitý děj, pomohou žákům se od této představy oprostit
- Určování grafů pro různé fyzikální jevy se zabývá P. Eisenmann, viz

  http://katmatprf.ujepurkyne.com/00_vyucujici.asp?ID=158

B. Určování definičního oboru a oboru hodnot

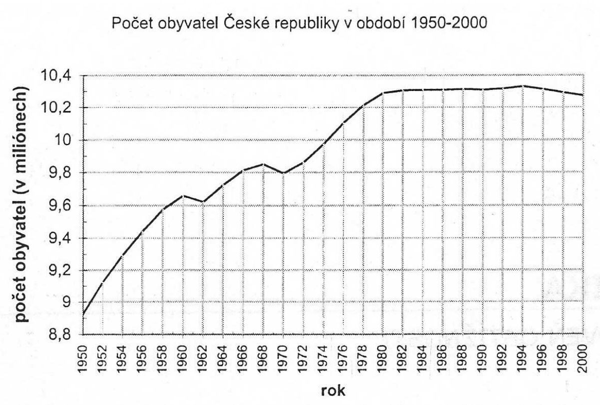
- Pro žáky problematické
- Žáci mají velké problémy rozlišit *n*-prvkovou množinu a interval, proto je vhodné zařazovat následující příklady (úkolem je zapsat definiční obor a obor hodnot):





D. Čtení z grafu

- Př.: Na základě informací uvedených v grafu rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

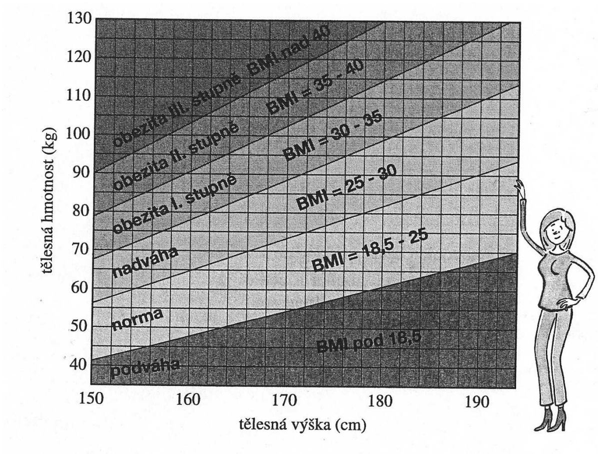


a) Počet obyvatel České republiky se v jednotlivých letech uvedeného období pohyboval v intervalu ⟨ 8.7 mil.; 10.4 mil.⟩.

b) Přírůstek počtu obyvatel v letech 1974 – 1976 byl větší než přírůstek počtu obyvatel v letech 1984 – 1986.

c) V roce 2000 měla Česká republika o více než 10 % obyvatel více než v roce 1950.

- Př.: Jedním z nejužívanějších postupů posuzování přiměřené tělesné hmotnosti je stanovení indexu tělesné hmotnosti BMI (Body Mass Index)



a) Zjisti pomocí tabulky svoji hodnotu BMI. Stačí najít v tabulce průsečík své výšky a hmotnosti.

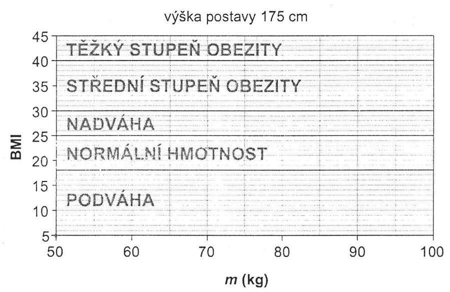
b) Vypočítej pro kontrolu svoji hodnotu BMI pomocí následujícího vztahu:

BMI = m / v²

(m – hmotnost v kg, v – výška postavy v m)

c) Sestrojte graf závislosti hodnoty BMI na hmotnosti jedince, jehož výška je 175 cm. (řešení zakreslete do obrázku)

d) Určete maximální interval, ve kterém by se měla pohybovat hmotnost jedince 175 cm vysokého, aby bylo možné zařadit ho do skupiny lidí s normální hmotností.



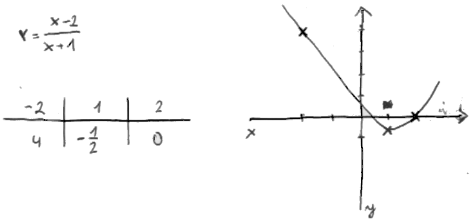
Literatura:

- Fuchs, E. a kol.: *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*, Prometheus
- Kubínová, M.: *Klíč k matematice aneb přijdu na to sám!* Albatros
- Odvárko, Kadleček: *Matematika pro 9. ročník základní školy. Funkce; Podobnost, Goniometrické funkce.* Prometheus

Lineární funkce

- Při výuce lineární funkce máme v podstatě dvě možnosti, jak postupovat:
  1. Vycházíme rovnou ze zápisu y=ax+b a naučíme žáky zakreslovat graf tak, že za x dosadí 2 různé hodnoty, které spojí úsečkou. Tento postup budeme nazývat **statický**.
  2. Vycházíme z konkrétních situací, které lze popsat lineární funkcí a zakreslujeme jejich grafy. Na těchto příkladech se žáci seznámí se základními pojmy a pochopí vztah závislosti v zápisu y=ax+b. Tímto způsobem se vyvodí význam symbolů *a* a *b* (směrnice, posunutí). Tento postup nazveme **dynamický**.

- Statický postup je možná pro učitele méně pracný, ale má přinejmenším dvě velké nevýhody:
  - Neumožní pochopení vztahu závislosti
  - Žáci dosazování několika bodů aplikují i pro další funkce a dostávají nesmysly. Např. často se s tím setkáváme u lineárně lomené funkce:

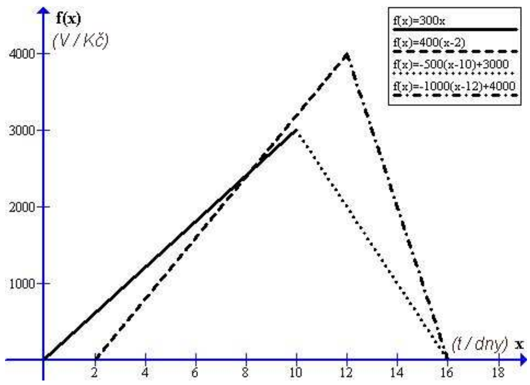


Osvojení základních pojmů

1. **Učivo:** Závislosti dvou proměnných – vztah závisle a nezávisle proměnné. Jak poznat, která je která? Je podstatné je odlišovat? Graf funkce.
   - **Metoda:** Odvozování základních pojmů na časových závislostech.
   - **Úloha 1:** Alice chodí na brigádu. Každý odpracovaný den vydělá průměrně 300 Kč. Zapiš tabulku závislosti vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů a zakresli graf.
   - **Úloha 2:** Bára začala chodit na brigádu o 2 dny později, ale denně vydělá průměrně 400 Kč. Zapiš tabulku, zakresli graf a zjisti, který den má Bára stejně peněz jako Alice.

- **Úloha 3:** Alice chodila na brigádu 10 dnů a pak začala peníze utrácet. Za jak dlouho by všechny utratila, kdyby denně utratila průměrně 500 Kč? Zakresli graf.
- **Úloha 4:** Bára pracovala také 10 dnů. Kolik by mohla denně utratit, aby všechny peníze utratila zároveň s Alicí? Zakresli graf.

2. **Učivo:** Funkční předpis pomocí rovnice – pochopení významu zápisu $y = ax + b$.
   - **Metoda:** Zobecnění výsledků předchozích příkladů.
   - **Úloha 5:** Nalezni funkční předpis pro závislost vydělaných peněz na počtu odpracovaných dnů ve všech předešlých případech.



Grafy pro úlohy 1 – 4. Pro větší přehlednost je zde uveden spojnicový graf. Při práci v hodině sestrojili žáci graf pomocí izolovaných bodů (tak jak odpovídá danému diskrétnímu jevu) a při zobecnění konkrétních úloh na funkční předpis již pracovali se spojnicovým grafem.

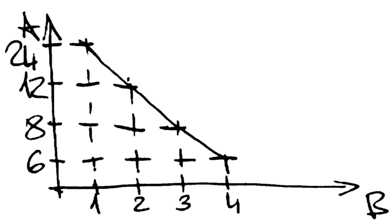
3. **Učivo:** Definiční obor a obor hodnot. Co je a není funkce.
   - **Metoda:** Zavedení důležitých pojmů na konkrétních příkladech, kterým žáci porozuměli.
   - **Úloha 6:** Zapiš definiční obory (tj. všechny hodnoty, kterých může nabývat nezávisle proměnná) a obory hodnot (tj. všechny hodnoty, kterých nabývá závisle proměnná) v předešlých případech.
   - **Úloha 7:** Zakresli graf se svislou úsečkou a interpretuj jej

- Zakreslení grafu lineární funkce pomocí dynamického postupu (na příkladu funkce $y=2x+1$)
  a) Žáci nakreslí graf funkce $y=x$.
  b) Nakreslí graf funkce $y=2x$, který má oproti předchozí funkci dvojnásobnou směrnici. Na tento fakt přišli bez větších potíží sami žáci, neboť pro ně nebyl problém představit si, že tato funkce roste dvakrát rychleji.
  c) Nakreslí graf funkce $y=2x+1$, který je oproti předchozímu posunut o 1 na ose y. Tento fakt vyplynul z aplikačních úloh, kdy žáci sami učinili závěr, co ve funkčním předpisu znamená koeficient „b". Také byli upozorněni, že zápis si můžou přepsat jako $y=2(x+\frac{1}{2})$, z čehož poznají posunutí po ose x. I tento fakt vyplynul z aplikačních úloh.

  Dále žáci u každého zadání určí vlastnosti funkce.

- Ukázka dynamického a statického postupu na příkladu funkce nepřímá úměrnost:

Př.: Zakreslete závislost šířky obdélníka daného obsahu na jeho délce. (Vlevo správně zakreslený graf dynamickou metodou, vpravo žák spojí zvolené body úsečkou – nezná tedy závislost nepřímá úměrnost)



- Vědomosti o lineární, kvadratické, racionálně lomené a goniometrických funkcích si zopakujte z učebnice pro gymnázia.

Literatura:

Budínová, I.: Osvojování vědomostí o lineárních funkcích žáky gymnázia. In: *Učitel matematiky.* JČMF, Praha. Ročník 20, č. 1, říjen 2011