Kombinatorika – možnosti využití v učivu matematiky na základní škole

Růžena Blažková, Irena Budínová

Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny. První kombinatorické poznatky můžeme najít již v nejstarších dochovaných textech ze staré Číny a Indie. Skutečná kombinatorika vzniká v 16. – 17. století v souvislosti s určením pravděpodobnosti výhry hazardních her a je spojena se jmény např. N. Tartaglii, B. Pascala, P. Fermata. K dalšímu vývoji kombinatoriky v 18. století přispěli zejména J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler.

Klasická kombinatorika se zabývá otázkou výběru a rozmístění prvků do tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi. Nejjednodušší typy konfigurací mají své specifické názvy – variace, permutace, kombinace. V současné době se kombinatorika prudce rozvíjí, aplikace tzv. kombinatorické analýzy zahrnují, mimo jiné, ekonomické problémy. Výrazné je její využití v teorii pravděpodobnosti, statistice, teorii informací, lineárním programování apod. Kombinatorické metody hrají významnou roli v teoretické matematice, např. v teorii grup.

Pro žáky základní školy je **význam kombinatoriky** jednak z hlediska výukového, jednak k rozvoji kombinačního myšlení.

- Kombinatorika je nástrojem ke zvládnutí dalších témat školské matematiky, např. algebry, teorie čísel, pravděpodobnosti a statistiky, dále pak kódování, šifrování.
- Výsledků kombinatoriky se využívá v dalších vědních oborech, jako jsou např. lingvistika, chemie, biologie, fyzika, spojová technika.
- Zvládnutí základů kombinatoriky má význam pro život člověka obecně, neboť jej učí vybírat a posuzovat všechny možnosti, které v dané situaci mohou nastat a volit optimální řešení. Ze široké škály užití kombinatoriky lze uvést např. sestavování rozvrhu hodin ve škole, sestavování jízdních řádů, optimální rozdělování práce mezi stroje, volba kombinací plodin při osevu zemědělských kultur na pozemcích, spojení mezi molekulami či atomy, určení počtu čísel tažených v různých hrách, výběr prvků v různých hrách apod.

Cíle v RVP

Rozvíjení kombinatorického a logického myšlení:

- ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci
- prostředek k řešení úloh

Pod pojmem „ **kombinační myšlení**“ rozumíme:

- schopnost uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,

- uvědomovat si, zda v daném souboru mohou existovat skupiny požadovaných vlastností,
- umět provádět výběr prvků z určité skupiny podle nějakého pravidla nebo podle daných vlastností,
- umět provádět rozdělování, uspořádání prvků dané skupiny,
- umět najít metodu vyhledávání všech skupin požadovaných vlastností (např. výčtem všech jejích prvků, graficky, použitím vzorců),
- posoudit, zda vybrané skupiny jsou uspořádané či neuspořádané,
- umět rozlišit, zda se ve skupinách prvky mohou nebo nemohou opakovat,
- umět zobecňovat a najít pravidlo pro určení počtu skupin dané úlohy.

Metodami práce na základní škole jsou především experiment, užití grafického znázornění, didaktická hra, sledování zákonitostí, posupné pronikání do vztahů a vzorců.

Kombinatorická pravidla

Na úvod připomeňme dvě důležitá kombinatorická pravidla – **pravidlo součtu a součinu**.

Pravidlo součtu: Jestliže A_1, A_2, ..., A_n jsou konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, ... p_n prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků sjednocení těchto množin $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven $p_1+p_2+... +p_n$.

Př. 1: Určete počet všech dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Př. 2: Čtverec o straně 4 jednotky je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 jednotkových čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců.

Pravidlo součinu: Jestliže vybíráme uspořádané k-tice čísel, přičemž první člen můžeme vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby, ... k-tý člen n_k způsoby, pak počet všech uspořádaných k-tic je roven $n_1 . n_2 ... n_k$.

Př. 1: Určete počet všech dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Př. 2: V košíku leží 12 jablek a 10 hrušek. Jirka si z něho bere jablko nebo hrušku, potom si Jana vybírá 1 jablko a 1 hrušku. Kdy má Jana větší možnost výběru?

Kombinace bez opakování

Motivační příklady, řešení experimentem a graficky

1. Kamarádi hrají tenis systémem každý s každým. Zvolte si postupně počet hráčů a sledujte, jak se mění počet zápasů v závislosti na počtu hráčů.

2. Kolik různých zápasů sehraje 5 hráčů tenisu, jestliže hraje každý s každým?

3. V rovině je dáno 5 různých bodů, které leží na jedné přímce. Kolik různých úseček je těmito body určeno?

4. V rovině je dáno 5 různých bodů, žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek a kolik různých úseček je těmito body určeno?

5. Kolik stran a úhlopříček má konvexní pětiúhelník?

6. Ve společnosti je 12 osob. Podají si ruce každý každému. Kolik podání ruky to bude?

7. Kolik úhlopříček má pravidelný šestiúhelník (n- úhelník)?

8. Kolik způsoby si můžete vybrat z osmi různých zákusků dva zákusky?

9. Jsou dány úsečky a = 6,4 cm, b = 4,7 cm, c = 50 mm, d = 32 mm. Vypočítejte obvody a obsahy všech obdélníků, jejich stranami mohou být úsečky *a, b, c, d.*

10. Zahradník vypěstoval 8 druhů růží. Kolik má možností výběru kytice ze tří druhů růží?

11. V turnaji bylo sehráno 28 zápasů. Kolik družstev se turnaje zúčastnilo, jestliže hrál každý s každým právě jednou?

12. Pět kamarádů A, B, C, D, E jelo stanovat. Měli jeden stan pro dvě osoby a jeden stan pro tři osoby. Kolika způsoby se mohli rozdělit?

13. Kuželky jsou sestaveny do čtverce tak, že v každé řadě jsou tři kuželky. Při házení koulí můžeme shodit 0 až 9 kuželek. Kolik je všech možností shození kuželek?

14. Šest kamarádek A, B, C, D, E, F se rozhodlo, že budou vytvářet všechny možné skupiny po jedné, po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti. Jak se mohly rozdělit? Kolik různých skupin vždy mohly vytvořit?

15. V rovině je dáno 7 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých trojúhelníků je těmito body určeno?

16. V rovině je dáno 9 různých bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi neprochází kružnice. Kolik různých kružnic je těmito body určeno?

17. Jsou dány úsečky délek 6 cm, 4 cm, 3 cm, 8 cm, 2 cm, 5 cm. Kolik různých trojúhelníků můžeme pomocí těchto úseček sestrojit?

K-členná **kombinace** z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. K-členná kombinace z n prvků je k-prvková podmnožina n-prvkové množiny.

Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo. Pro všechna celá nezáporná čísla $n,k,$ $n < k$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ se poprvé objevuje u L. Eulera v 18. století. Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Pro každé přirozené číslo n definujeme n faktoriál (značíme $n!$) takto: $n!=n(n-1) ... 2.1$, $0!=1$

Variace bez opakování

Motivační příklady

1. Kolik různých vlajek můžeme sestavit ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou-li k dispozici látky barev: červená, modrá, bílá, zelená, žlutá?

2. Kolik různých signálů (ze dvou tónů) můžeme vytvořit ze čtyř tónů c, e, g, h?

3. Kolik různých trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí číslic 8, 7, 6, 5, 2, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z těchto čísel je sudých?

4. Kolik různých čísel můžeme sestavit z číslic 3, 5, 4, 0, 9, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z nich je násobkem čísla 5?

5. Osm spolužáků si slíbilo, že si o prázdninách pošlou pohlednice. Kolik pohlednic tak bylo rozesláno?

6. Ve škole máme 10 vyučovacích předmětů, každý den máme 6 vyučovacích hodin. Každému předmětu se má vyučovat nejvýše jednu hodinu denně. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den?

7. Kolik přirozených šesticiferných čísel, v jejichž zápisu jsou všechny číslice navzájem různé, lze zapsat pomocí všech deseti cifer desítkové soustavy?

K-členná **variace** z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech k-členných variací z *n* prvků je:

$V(k,n) = n.(n - 1).(n - 2). \ldots . (n - k + 1)$

Ověřte na příkladech, že platí $V(k,n) = n.\ V(k-1, n-1)$

Pozn.: Promyslete, zda existuje vztah mezi kombinacemi a variacemi.

Př.: Ze čtyř závodníků vybíráme trojici, která a) obdrží medaile, b) dostane zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.

Permutace bez opakování

Motivační příklady

1. Zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se vyskytují číslice 5, 3, 8, každá právě jednou.

2. Kolik lichých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 3, 4, 6, 7, jestliže se v zápisu čísla vyskytuje každá číslice právě jednou?

3. Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí na jedné dlouhé lavici?

4. Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí kolem kulatého stolu?

5. Šest dětí se přesazuje ve školních lavicích každý den. Bude jim stačit na všechna možná rozesazení školní rok?

6. Kolik způsoby můžeme posadit 10 hostů na 10 židlí?

7. Zapište všechny permutace z čísel 1, 2, 3 do sloupců pod sebe. Dostanete tak 6 sloupců. Určete součet všech čísel v každém sloupci. Úlohu opakujte pro čísla 1, 2, 3, 4.

8. Kolik různých vět o sedmi slovech můžeme získat, máme-li k dispozici právě 7 různých slov? Pokuste se takovou větu sestavit.

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek právě jednou.

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Počet permutací:

$$P(n) = V(n,n) = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .\ 3\ .\ 2\ .\ 1 = n!$$

Hodnoty faktoriálů čísel rostou velmi rychle:

1! = 1, 4! = 24, 5! = 120, 10! = 3 628 800

Skupiny s opakovním

Variace s opakováním

Motivační příklady

1. Král posílá 6 spěšných zpráv. Každý ze 3 poslů může doručit libovolnou z nich. Kolik je možností, jak může rozdělit dopisy mezi kurýry?
2. Kolik značek Morzeovy abecedy je možno vytvořit, sestavíme-li tečky a čárky do skupiny o 1-4 prvcích?
3. Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9?
4. Kolik pěticiferných čísel můžeme poskládat z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, pokud se cifry mohou opakovat?
5. Kolik čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 3, 6?

K-členná **variace s opakováním** z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet variací s opakováním:

$$V'(k,n) = n^k$$

Permutace s opakováním

Příklady

1. Kolika způsoby můžeme sestavit 5 vagonů, když ve třech vagonech je písek a ve dvou je cement?

2. Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA?
3. Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen PARABOLA, požadujeme-li, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky.
4. Kolik různých anagramů můžeme získat ze slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna písmena O vedle sebe?
5. Pro 8 studentů je připraveno ubytování ve 3 pokojích, z nichž dva jsou trojlůžkové, jeden dvojlůžkový. Kolik je způsobů rozdělení do jednotlivých pokojů?
6. Matka má 2 stejná jablka, 3 stejné hrušky a 4 stejné pomeranče. Každý den dá synovi po jednom kousku ovoce. Určete, kolik je možností výdeje.

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek alespoň jednou.

Počet permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$ krát:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

Pozn.: Promyslete, jaký existuje vztah mezi permutacemi a permutacemi s opakováním.

Př.: a) Z číslic 1, 2, 3, 4 utvořte všechna čtyřciferná čísla (bez opakování cifer). b) Z číslic 1, 2 utvořte všechna čtyřciferná čísla, když se každá číslice opakuje dvakrát.

Kombinace s opakováním

Příklady

1. V sadě je 32 karet, 8 druhů, každá ve čtyřech barvách. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 karty, jestliže: a) rozlišujeme jen barvy, b) rozlišujeme barvy i hodnoty karet?
2. Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet a) všech možných rozdělení, b) počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.
3. Máme 12 druhů pohlednic. Kolika způsoby lze provést nákup 8 pohlednic, když jeden druh může být zakoupen vícekrát?
4. Kolika způsoby lze do 9 různých přihrádek rozmístit 7 bílých a 2 černé koule, a) nesmí-li žádná přihrádka zůstat prázdná, b) mohou-li některé přihrádky zůstat prázdné?

K-členná **kombinace s opakováním** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet kombinací s opakováním:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Toto číslo také udává, kolika způsoby můžeme rozmístit *k* identických předmětů do *n* přihrádek.

Využití kombinatorických úloh v učivu matematiky

6. ročník – numerace a početní výkony v oboru přirozených čísel

1. Kolik je všech trojciferných čísel zapsaných různými číslicemi?
2. Kolika způsoby můžeme zaplatit 50 Kč pomocí mincí: 20 Kč, 20 Kč, 5 Kč, 2 Kč?
3. Doplňte mezi čtyři dvojky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 1.
4. Doplňte mezi čtyři sedmičky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 14.
5. Z čísel 1 až 9 sestavte magický čtverec 3 krát 3 tak, aby se v každém řádku, sloupci i úhlopříčkách součty sobě rovnaly.

6. ročník – dělitelnost v oboru přirozených čísel

6. Určete všechny dělitele čísla 2730.
7. Kolik trojciferných přirozených čísel sestavených z číslic
    a. 1, 2, 3, 4, 5,
    b. 0, 1, 2, 3, 5

   je dělitelných pěti?

Algebraické výrazy

Všimněte si koeficientů u jednotlivých členů mocnin dvojčlenů a čísel v Pascalově trojúhelníku:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

V každém řádku tohoto trojúhelníku se vyskytují kombinační čísla. Pro žáky je trojúhelník důležitý v algebře - souvislost s koeficienty při výpočtu mocnin dvojčlenu $(a + b)^n$.

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Literatura

Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.

Divíšek, J., Dřízal, V., Koman, M.: Matematika pro 5. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů. Praha: Prometheus, 1991.

Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh II. Učební text. Brno: MU, 1997.

Fuchs, E.: Kombinatorika a teorie grafů. Praha: SPN, 1986.

Fuchs, E. a kolektiv: Standardy a testové úlohy z matematiky pro ZŠ a nižší ročníky víceletých gymnázií. Praha: Prometheus, 2000, 152 s.

Masiar, P., Bureš, F., Koman, M.: Matematika pro 6. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířeným vyučováním matematice a přírodovědným předmětům. Praha: Prometheus, 1992.

Sedláček, J.: Faktoriály a kombinační čísla. Praha: Mladá fronta, 1985.

Vilenkin, M., J.: Kombinatorika. Praha: SNTL, 1972.

Vrba, O.: Kombinatorika. Praha: Mladá fronta, 1980.