Rozvoj matematických představ 2.

Helena Durnová

březen 2012

Přehled okruhů - RMP 2

U zkoušky se očekává, že následující pojmy budete umět vysvětlit vlastními slovy.

1. Bod. Přímka. Rovina. Úsečka. Polopřímka. Polorovina. Poloprostor. Vzájemná poloha dvou a tří přímek, dvou a tří rovin, přímky a roviny.

   Trojúhelník (definice, vlastnosti trojúhelníka, střední příčky, výšky, osy úhlů a osy stran).

   Kruh, kužnice (defnice, vzájemná poloha přímky a kružnice, dvou kružnic).

2. Čtyřúhelník (definice, vlastnosti; třídění).

   Velikosti geometrického útvaru (porovnávání, měření, délka úsečky, obsah a obvod rovinného obrazce, objem a povrch tělesa, úhly a jejich velikosti — tupý a ostrý úhel, pravý úhel).

3. Shodná zobrazení (definice; druhy: posunutí, otáčení, identita, osová souměrnost (v rovině), střeová souměrnost, souměrnost podle roviny (v prostoru)).

4. Tělesa: koule, kužel, krychle, hranol, válec, kvádr, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn. Sítě těles. Praktické činnosti směřující k vytváření elementárních představ a pojmů k rozvoji prostorové představivosti.

V následujícím textu najdete stručné shrnutí látky.

Literatura

Základní:

1 Růžena Blažková: *Rozvoj matematických pojmů a představ u dětí předškolního věku.*

`http://is.muni.cz/elportal/?id=893208`

Doporučená:

2 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. Č. 1.* 1. vyd. Brno: UJEP Brno, 1987. 97 s.

3 Hejný, Milan - Stehlíková, Naďa, *Číselné představy dětí.* Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

4 Hejný, Milan - Kuřina, František. *Dítě, škola a matematika :konstruktivistické přístupy k vyučování.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 187 s. ISBN 80-7178-581-4.

5 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

6 Zuzana Kolláriková - Branislav Pupala, eds., *Predškolská a elementárna pedagogika.* Vyd. 1. Praha: Portál, 2001. 455 s. ISBN 80-7178-585-7.

7 Blažková, Růžena - Matoušková, Květoslava - Vaňurová, Milena, *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy.* Brno: Paido, edice pedagogické literatury, 2007. 96 s. Dotisk 1. vydání. ISBN 80-85931-89-3.

8 Drábek, Jaroslav - Viktora, Václav, *Základy elementární aritmetiky: pro učitelství 1. stupně ZŠ a.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. 223 s.

Definice pojmů

1.1 Základní geometrické pojmy

1.1.1 Axiomy eukleidovské geometrie

Axiomy incidence

I1 Dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.

I2 Na každé přímce leží alespoň dva různé body.

I3 Existuje alespoň jedna trojice bodů, které neleží na téže přímce.

I4 Třemi body, které neleží v žádné přímce, prochází jediná rovina.

I5 V každé rovině leží alespoň jeden bod.

I6 Jestliže dva různé body přímky leží v rovině, pak v této rovině leží všechny body této přímky.

I7 Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společný ještě aspoň jeden další bod.

I8 Existuje alespoň jedna čtveřice bodů, které neleží v žádné rovině.

Axiomy uspořádání

U1 Leží-li bod B mezi body A, C, jsou A, B, C tři různé body přímky a platí také, že bod B leží mezi body C, A.

U2 Jsou-li A, B dva různé body, pak na přímce procházející body A, B existuje alespoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C.

U3 Ze tří různých bodů přímky leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.

U4 Jsou-li A, B, C tři body, které neleží v přímce, a p přímka roviny určené body A, B, C, která neprochází žádným z bodů A, B, C a která obsahuje jistý bod D neležící mezi body A, B, potom obsahuje přímka p buď jistý bod E ležící mezi body B, C nebo jistý bod F ležící mezi body C, A.

Definice 1 Úsečka AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje body A, B a dále všechny body, které leží mezi body A, B.

Definice 2 Polopřímka AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje všechny body úsečky AB a dále všechny takové body X, pro které platí, že bod B leží mezi body A, X-

Definice 3 Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Polorovinou pA nazýváme množinu všech bodů x roviny pA, pro které platí, že mezi body A, X neleží žádný bod přímky p.

Přímku p nazýváme haniční přímka poloroviny.

Definice 4 Poloprostor. Nechť α je rovina a A bod, který v ní neleží. Poloprostorem αA nazýváme množinu všech bodů X prostoru, pro které platí, že mezi body A a X neleží žádný bod roviny α.

Rovinu α nazýváme hraniční rovinou poloprostoru.

Konvexní a nekonvexní množiny bodů

Definice 5 Množina bodů se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva její body X, Y platí, že úsečka XY je její podmnožinou.

- prázdnou množinu a jednobodové množiny považujeme za konvexní

Definice 6 Množina bodů, která není konvexní, se nazývá nekonvexní.

Definice 7 Nechť A, V, B jsou tři libovolné navzájem různé body. Konvexním úhlem AVB nazýváme:

1. Průnik polorovin AVB a BVA, pokud body A, V, B neleží v přímce,
2. Každou polorovinu s hraniční přímkou AB, pokud leží body A, V, B v přímce a bod V leží mezi body A, B
3. Leží-li body A, V, B v přímce a bod V neleží mezi body A, B, nazýváme konvexním úhlem AVB
   - každou rovinu obsahující příklu AB,
   - polopřímku AB.

Vrcholem konvexního úhlu AVB je bod V, ramena jsou AV, BV.

Definice 8 Nekonvexní úhel je doplňkem konvexního úhlu.

Definice 9 Dva úhly nazýváme styčné právě tehdy, když jejich průnikem je polopřímka VB a zároveň leží v téže rovině.

Definice 10 Dva styčné úhly, jejichž sjednocením je přímý úhel (180 stupňů) nazýváme vedlejší úhly.

Axiom rovnoběžnosti. Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené bodem A a přímkou p leží nejvýše jedna přímka procházející bodem A, která nemá s přímkou p žádný společný bod.

Pro libovolné tři přímky p, q, r platí: jsou-li přímky p a q rovnoběžné a také q a r rovnoběžné, pak jsou i p a r rovnoběžné.

Vzájemná poloha dvou přímek v rovině a v prostoru.

- splývající – rovnoběžné splývající
- mají jeden společný bod – různoběžné
- nemají společná bod a leží ve stejné rovině – rovnoběžné nesplývající
- nemají společný bod a neleží ve stejné rovině – mimoběžné

Vzájemná poloha tří přímek v rovině.

- jeden společný bod
- každé dvě mají společný bod, ale ne všechny tři (tvoří „trojúhelník“)
- navzájem rovnoběžné
- dvě rovnoběžné a třetí s nimi různoběžná

Vzájemná poloha přímky a roviny.

- splývající – rovnoběžné splývající
- mají jednu společnou přímku – různoběžné
- nemají společnou přímku – rovnoběžné nesplývající

Vzájemná poloha dvou rovin.

- přímka leží v rovině
- přímka má s rovinou jediný společný bod (je s rovinou různoběžná)
- přímka nemá s rovinou žádný společný bod (je s rovinou rovnoběžná)
- splývající – rovnoběžné splývající
- mají jednu společnou přímku – různoběžné
- nemají společnou přímku – rovnoběžné nespývající

Vzájemná poloha tří rovin.

- každé dvě z daných rovin jsou rovnoběžné
- dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
- všechny tři roviny procházejí jedinou přímkou
- každé dvě roviny se protínají, každé dvě průsečnice jsou různé rovnoběžky
- všechny tři roviny mají jediný společný bod

1.2 Trojúhelník

Definice 11 Nechť A, B, C jsou tři body neležící v přímce. Troujúhelníkem ABC nazveme průnik polorovin ABC, ACB, BCA.

Trojúhelník je geometrický útvar v rovině, který má nejmenší možný počet vrcholů.

Vnitřní úhly trojúhelníka ABC jsou úhly CAB (při vrcholu A), ABC (při vrcholu B) a BCA (při vrcholu C).

Definice 12 Vnějším úhlem trojúhelníka nazýváme úhel, který je vedlejší k jeho vnitřnímu úhlu.

Vlastnosti trojúhelníka. Máme trojúhelníky

- rovnostranné
- rovnoramenné
- pravoúhlé
- ostroúhlé
- tupoúhlé

Definice 13 Střední příčky jsou spojnice středů stran trojúhelníka.

Definice 14 Výšky trojúhelníka jsou kolmice k přímce, na níž leží protilehlá strana.

Definice 15 Osy stran trojúhelníka procházejí středem strany trojúhelníka a jsou na ni kolmé.

Definice 16 Osy úhlů dělí vnitřní úhly trojúhelníka na dva stejně velké úhly.

Definice 17 Těžnice trojúhelníka jsou spojnice vrcholu a protilehlé strany trojúhelníka.

- osy stran se protínají v jednom bodě; ten je středem kružnice opsané (leží na ní všechny tři vrcholy trojúhelníka)
- osy výšek se protínají v jediném bodě (průsečík výšek neboli ortocentrum)
- osy úhlů se protínají v jediném bodě; ten je středem kružnice trojúhelníku vepsané (tato kružnice se dotýká všech stran troúhelníka)
- těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě – těžišti
- každému trojúhelníku lze vepsat i opsat kružnici

1.3 Kruh, kružnice, koule, kulová plocha

Definice 18 Nechť je dán bod S v rovině a vzdálenost r. Kružnicí o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů v rovině, které mají od středu S vzdálenost právě r.

Definice 19 Nechť je dán bod S v rovině a vzdálenost r. Kruhem o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů v rovině, které mají od středu S vzdálenost nejvýše r.

Definice 20 Nechť je dán bod S v prostoru a vzdálenost r. Kulovou plochou o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů v prostoru, které mají od středu S vzdálenost právě r.

Definice 21 Nechť je dán bod S v prostoru a vzdálenost r. Koulí o středu S a poloměru r se nazývá množina všech bodů v prostoru, které mají od středu S vzdálenost nejvýše r.

Vzájemná poloha přímky a kružnice, dvou kružnic

- přímka je tečnou ke kružnici: jeden společný bod
- přímka je sečnou kružnice: dva společné bod
- přímka kružnici neprotíná
- dvě kružnice se dotýkají v jediném bodě
- dvě kružnice se protínají ve dvou bodech
- dvě kružnice nemají žádný společný bod (dva případy: jedna kružnice leží uvnitř druhé nebo leží vně)

Definice 22 Jsou-li A, B dva různé body kružnice, jejich spojnice úsečka AB se nazývá tětiva.

Jestliže tětiva AB obsahuje střed kružnice S, nazýváme ji průměr.

Definice 23 Část kružnice, která leží v jedné polorovině s hraniční přímkou AB se nazývá oblouk kružnice. Body A, B se nazývají krajní body oblouku

Je-li AB průměr, nazýváme tento oblouk polokružnice.

Není-li AB průměr, pak oblouk, který leží v polorovině ABS se nazývá větší oblouk, a oblouk, který leží v opačné polorovině, se nazývá menší oblouk.

Definice 24 Úhel ASB, kde S je střed kružnice a AB její tětiva, nazýváme středovým úhlem. (Ve shodě s předchozí definicí rozlišujeme mezi středovým úhlem příslušným většímu a menšímu oblouku.)

Definice 25 Úhel AXB, kde X je bod ležící na oblouku kružnice a AB je její tětiva, nazýváme obvodovým úhlem. Leží-li středový úhel ASB a obvodový úhel AXB v opačných polorovinách oddělených přímkou AB, říkáme, že ASB je středový úhel příslušný obvodovému úhlu AXB.

Platí, že velikost středového úhlu je dvojnásobkem velikosti obvodového úhlu.

Definice 26 Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a její dva rúzné body A, B. V bodě A je sestrojena tečna AC ke kružnici k. Potom úhel BAC nazýváme úsekový phel příslušný k tomu oblouku AB kružnice k, který v tomto úhlu leží.

1.4 Čtyřúhelníky

Definice 27 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body v téže rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Sjednocení trojúhelníků ABC a BDC nazveme čtyřúhelníkem ABCD právě tehdy, když průnikem těchto trojúhelníků je úsečka BD.

Čtyřúhelníky dělíme na roznoběžníky a čtyřúhelníky s rovnoběžnými stranami.

Čtyřúhelníky s rovnoběžnými stranami dále dělíme na lichoběžníky a rovnoběžníky.

Rovnoběžníky dále dělíme na pravoúhelníky (obdélníky a čtverce) a kosoúhelníky (kosodélníky a čtverce).

Úkol: nakreslete si jednotlivé čtyřúhelníky.

Podle úhlopříček čtyřúhelníka lze rozhodnout, o který čtyřúhelník se jedná:

- úlopříčky jsou na sebe kolmé
  - úhlopříčky jsou shodné
    - úhlopříčky se půlí (čtverec)
    - úhlopříčky se nepůlí
  - úhlopříčky nejsou shodné
    - úhlopříčky se půlí (kosočtverec)
    - úhlopříčky se nepůlí
- úhlopříčky na sebe nejsou kolmé
  - úhlopříčky jsou shodné
    - úhlopříčky se půlí (obdélníky)
    - úhlopříčky se nepůlí
  - úhlopříčky nejsou shodné
    - úhlopříčky se půlí (kosodélníky)
    - úhlopříčky se nepůlí

Definice 28 Nechť ABCD je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která prochází body A, B, C, D, nazýváme tento čtyřúhelník tětivový.

Definice 29 NechŤ ABCD je čtyřúhelník. Existuje-li kružnice, která se dotýká všech jeho stran, nazýváme tento čtyřúhelník tečnový.

1.5 Shodná zobrazení

Definice 30 (Shodné zobrazení v rovině) Zobrazení, které každému bodu X dané roviny přiřazuje jistý bod X' této roviny, nazýváme shodné právě tehdy, když pro každé dva body X, Y roviny platí, že $|XY| = |X'Y'|$ (tj. zobrazení zachovává vzdálenosti).

Shodná zobrazení v rovině:

- identita
- osová souměrnost
- otočení (rotace)
- středová souměrnost

- posunutí
- posunutá souměrnost

Definice 31 (Shodné zobrazení v prostoru) Zobrazení, které každému bodu X prostoru přiřazuje jistý bod X' prostoru, nazýváme shodné právě tehdy, když pro každé dva body X, Y platí, že $|XY| = |X'Y'|$ (tj. zobrazení zachovává vzdálenosti).

Shodná zobrazení v prostoru:

- souměrnost podle roviny
- středová souměrnost
- ... a další

1.6 Tělesa

Definice 32 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body neležící v jedné rovině. Čtyřstěnem ABCD nazveme průnik poloprostorů ABCD, ABDC, CDBA, ACDB.

Body A, B, C, D nazýváme vrcholy, úsečky AB, BC, CA, AD, BD, CD hrany a trojúhelníky ABC, BCD, CDA, ABD stěny čtyřstěnu ABCD.

Čtyřstěn je mnohostěn se stejným počtem vrcholů.