2 Maticová algebra

Matematika pro ekonomy

Jaro 2012

Ivana Vaculová

Osnova

1 Matice – základní pojmy (definice, typ matice, řádkové a sloupcové vektory)

2 Druhy matic - nulová matice,
- jednotková matice,
- transponovaná matice,
- čtvercová matice - regulární, singulární,
- trojúhelníková matice.

3 Základní maticové operace – rovnost matic,
- součet matic,
- reálný násobek matice,
- součin matic.

4 Determinant

5 Inverzní matice

6 Hodnost matice

7 Soustava lineárních rovnic

1 Matice – základní pojmy

<u>Definice 1.1:</u>

Schéma *m.n* reálných (komplexních) čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí A typu (m, n).**

<u>Poznámky:</u>

1. *Čísla* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *jsou* ***prvky matice****. Přitom* a_{ij} *značí prvek, který leží v* ***i-tém řádku*** *a* ***j-tém sloupci*** *matice A. Index* ***i*** *se proto nazývá řádkový index prvku* a_{ij} *a* ***j*** *sloupcový index prvku* a_{ij}.

2. *Je-li* ***m = n****, pak matici A nazýváme* ***čtvercovou maticí*** *řádu* ***n****.*

3. *Je-li A* ***matice řádu n****, pak aritmetický* ***vektor*** $(\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, a_{nn}})$ *se nazývá její* ***hlavní diagonála*** *a aritmetický* ***vektor*** $(\boldsymbol{a_{1n}, a_{2,\, n-1}, \dots , a_{n1}})$ *její* ***vedlejší diagonála****.*

4. *Každý z* ***m řádků*** *matice A můžeme chápat jako* ***n-rozměrný aritmetický vektor****, každý z* ***n sloupců*** *můžeme chápat jako* ***m-rozměrný aritmetický vektor****.*

5. *Matice budeme označovat velkými písmeny A, B, ... nebo* (a_{ij})*.*

2 Druhy matic

- ***Nulová matice 0*** je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule**.**

- ***Jednotková matice E*** je čtvercová matice řádu n, jejíž všechny **prvky v hlavní diagonále** se rovnají **1 *(a_{ii} = 1)*** a **ostatní prvky** jsou rovny **0 *(a_{ij} = 0 pro i ≠ j).***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - jednotková matice 3. řádu.

- Maticí ***transponovanou A^T*** k matici A typu ***(m, n)*** rozumíme matici typu ***(n, m),*** kterou získáme z matice A **výměnou řádků za sloupce**.

- Matice A se nazývá ***symetrická,*** platí-li ***$A = A^T$.*** Je to tedy ***čtvercová matice,*** jejíž **prvky symetricky** umístěné vzhledem k **hlavní diagonále** jsou **stejné.**

- Matice A typu (m, n), která má **pod**, resp**. nad diagonálními prvky** a_{ii} samé **nuly**, takže a_{ij} = 0 pro i > j, resp. i < j, se nazývá ***trojúhelníková.***

3 Základní operace s maticemi

3.1 Rovnost matic

Definice 3.1

Dvě matice A, B stejného typu (m, n) považujeme za sobě **rovné** a píšeme **A = B**, mají-li všechny odpovídající prvky stejné, tj. $\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$, pro všechna i = 1, ... , m, j = 1, ... , n.

3.2 Součet matic

Definice 3.2

Nechť matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, jsou téhož typu (m, n). Pak jejich **součtem** rozumíme matici $\mathbf{C = A + B}$, kde $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

3.3 Násobení matic reálným číslem

Definice 3.3

Součinem matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) a reálného čísla $\mathbf{k}$ nazýváme matici $\mathbf{B = k \cdot A}$, kde $\mathbf{b_{ij} = ka_{ij}}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Pravidla pro sčítání matic a násobení matice reálným číslem:

- **Komutativní zákony**

$$A + B = B + A, \qquad k.A = A.k, \quad k \in \mathbf{R}.$$

- **Asociativní zákony**

$$(A + B) + C = A + (B + C), \qquad k.(l.A) = (k.l).A, \; k, l \in \mathbf{R}.$$

- **Distributivní zákony**

$$k.(A + B) = k.A + k.B, \qquad (k + l)A = k.A + l.A, \; k, l \in \mathbf{R}.$$

- **Existence nulové matice**

  Existuje taková matice 0, že pro každou matici A platí:

$$A + 0 = A.$$

- **Existence opačné matice**

  Ke každé matici A existuje taková matice -A, že

$$A + (-A) = 0.$$

Pozn.: Z uvedeného vyplývá, že množina všech matic typu (m, n) tvoří vzhledem k operacím sčítání matic a násobení matice reálným číslem **vektorový prostor**.

3.4 Součin matic

<u>Definice 3.4</u>

Nechť $A = (a_{ij})$ je maticí typu (m, n) a $B = (b_{jk})$ je matice typu (n, p).
Součinem matic A.B (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C = A.B = (c_{ik})}$ typu **(m, p)**, kde

$$c_{ik} = a_{jn} = \Sigma 1_{ij} . b_{jk} = a_{i1} . b_{1k} + a_{i2} . b_{2k} + \ldots + a_{in} . b_{nk} .$$

Pravidla pro násobení matic:

- **Asociativní zákon**

$$(A.B).C = A.(B.C).$$

- **Distributivní zákony**

$$(A + B).C = A.C + B.C \text{ (pro násobení zprava)},$$

$$C.(A + B) = C.A + C.B \text{ (pro násobení zleva)}.$$

- **Násobení jednotkovou maticí E**

$A.E = E.A = A$ *pro každou čtvercovou matici* A *řádu n.*

- **Násobení nulovou maticí 0**

$$A.0 = 0.A = 0.$$

- **Je-li A.B = 0**, *pak nemusí být ani* $A = 0$, *ani* $B = 0$.

- Obecně **neplatí komutativní zákon**, tj. obecně $A.B \neq B.A$.

- Existuje-li součin matic A.B, pak $\mathbf{(A.B)^T = B^T . A^T}$.

4 Determinanty

Definice 4.1:

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice A** řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme **číslo**, které značíme **det A**; **|A|** a definujeme takto:

1. Je-li n = 1, pak det A = a_{11}.
2. Pro n ≥ 2 je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

kde matice A_{1j} vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

4.1 Výpočet determinantu matice A řádu n = 2

Při výpočtu det A (n = 2) postupujeme tak, že od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.2 Výpočet determinantu matice A řádu n = 3

A) <u>Užitím definice pro výpočet det A, kde A je řádu n ≥ 2:</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

B) <u>Pomocí tzv. *Sarrusova pravidla*:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

4.2 Výpočet determinantu matice A vyšších řádů

Věta (Laplaceův rozvoj)

Pro čtvercovou matici A řádu n platí:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle i-tého řádku,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$ - rozvoj determinantu podle j-tého sloupce,

kde matice A_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Poznámky

1. Determinant matice A_{ij} nazýváme ***subdeterminantem*** *vzhledem* ***k prvku a_{ij}.***

2. Součin $(-1)^{i+j}$. det A_{ij} nazýváme ***algebraickým doplňkem prvku a^{ij} a značíme***

4.2 Pomocné věty pro výpočet determinantu

Věta 4.2.1

Vyměníme-li ve čtvercové matici A navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici B platí: **det B = - det A**.

Věta 4.2.2

Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak **det A = 0**.

Věta 4.2.3

Nechť matice B vznikne tak, že k p-tému řádku (sloupci) čtvercové matice A řádu n přičteme k násobek, $k \in R$, q-tého řádku (sloupce), $p \neq q$.
Pak platí **det A = det B**.

Poznámka

Čtvercová matice A řádu $n \geq 2$, jejíž determinant **det A ≠ 0**, se nazývá ***regulární***. *V opačném případě jí říkáme* ***singulární*** *(**det A = 0**).*

5 Inverzní matice

Definice 5.1

Inverzní maticí k čtvercové matici A řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici A^{-1} řádu n, pro kterou platí:

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E},$$ kde E je jednotková matice řádu n.

6 Hodnost matice

<u>Definice 6.1</u>

Nechť A = (a_{ij}) je matice typu (m, n). Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V^n. **Hodnost matice A** je **r** (značíme **h(A) = r**), existuje-li **r** **lineárně nezávislých řádků** matice A a každých r+1 řádků je lineárně závislých.

Poznámka

Hodnost matice A typu (m, n) bychom mohli definovat pomocí sloupcových vektorů z vektorového prostoru V^m. Obě definice vedou k témuž výsledku h(A) = r.

<u>Věta 6.1</u>

Nechť A je libovolná matice typu (m, n). **Hodnost matice A** se **nezmění** při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

a) záměně pořadí řádků (sloupců),
b) násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
c) přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
d) vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

7 Soustava lineárních rovnic

Mějme soustavu **m** lineárních rovnic o **n** neznámých $\mathbf{x_1, \dots, x_n \in R}$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

Označme:

matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

rozšířená matice soustavy

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_3 \end{array}\right)$$

Pak **A.X=B** je ***maticový zápis rovnice.***

Je-li matice A regulární, pak má soustava lineárních rovnic A.X = B právě jedno řešení:

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

(U rozsáhlejších soustav je však řešení pomocí inverzní matice náročné, proto častěji využíváme tzv. Gaussovu eliminační metodu.)

<u>Poznámka:</u>

Jestliže $b_k = 0$ pro k = 1, ... , m, pak soustavu (1) nazýváme soustavou **homogenních rovnic**. Jestliže je alespoň jedno $b_k \neq 0$, hovoříme o soustavě **nehomogenních rovnic.**

7.1 Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Předpokládejme, že matice $A'|B'$ vznikne z rozšířené matice soustavy $A|B$ úpravami:

a) výměnou dvou řádků,
b) vynásobením řádku číslem různým od nuly,
c) vynecháním řádků se samými nulami,
d) přičtením k-násobku ($k \neq 0$) řádku k jinému řádku.

Pak soustavy **A . X = B** a **A´. X = B′** mají stejná řešení. Správnost úvahy vyplývá z toho, že *každý řádek rozšířené matice soustavy odpovídá příslušné rovnici*. Uvedené úpravy můžeme s rovnicemi provádět.

Úpravy a) až d) **nemění hodnost** matice A ani matice $A|B$.
Užitím úprav a) až d) budeme **postupně upravovat** rozšířenou matici soustavy **na trojúhelníkový tvar** tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$.

Na takto upravenou soustavu rovnic poté aplikujeme **Frobeniovu větu:**
1) Soustava AX = B má řešení ⇔ h (A) = h (A│b) = k
2) Pokud k < n …soustava má nekonečně mnoho řešení.
Pokud k = n ….soustava má právě jedno řešení.

Literatura

- Kaňka M. a kol. Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Praha: Victoria Pubishing, 1996.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrle, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/08_MI_KAP%202_1.pdf