Maticový zápis soustavy rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť **A** je **regulární matice** řádu n a $\mathbf{A}_i$ je čtvercová matice řádu n vzniklá z matice **A** nahrazením i-tého sloupce matice **A** vektorem **b**. Potom jediné řešení $\mathbf{x} = (x_1,..., x_n)^T$ je dáno vztahem:

$$\boxed{x_i = \frac{\det \mathrm{A}_i}{\det \mathrm{A}}}$$

Příklad: Řešte soustavu rovnic pomocí **Cramerova pravidla**:

$$\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & - & 6x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

$$\det \mathrm{A} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -36$$

Matice **A** je regulární. Můžeme tedy pokračovat dále.

$$\det A_1 = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 36 \qquad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{36}{-36} = -1$$

$$\det A_2 = \det\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -18 \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-18}{-36} = \frac{1}{2}$$

$$\det A_3 = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12 \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

Řešení dané soustavy je tedy:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$$

- Pokud je matice **A** **<u>singulární</u>**, je lepší dále počítat pomocí **<u>Gaussovy eliminační metody</u>**.
- Pokud je matice **A** sigulární matice a ostatní matice $\mathbf{A}_i$ jsou taktéž singulární, má soustava nekonečně mnoho řešení.
- Pokud je matice **A** sigulární matice a alespoň je jedna z matic $\mathbf{A}_i$ je **<u>regulární</u>**, pak daná soustava nemá řešení.

Úkolem je řešit soustavu rovnic Craemerovým pravidlem a Gaus. elim. metodou

1.

$$x + y = 3$$
$$x - 2y = 1$$

2. x + 2y = 5

4x + 3y = 15

3. –x + 2y + 3z = 3

x - 6z = -3

2x + 4y = 0

Definice

Algebraickým doplňkem prvku a_{lk} matice $\mathbf{A} =$ nazýváme číslo $A_{lk} = -$, kde M_{lk} je subdeterminant vzniklý z matice $\mathbf{A}$ vynecháním l-tého řádku a k-tého sloupce.

Výpočet inverzní matice

Věta

Inverzní matice k regulární matici $\mathbf{A} =$ řádu n má tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \quad ,$$

kde A_{lk} jsou algebraické doplňky prvků a_{lk}.

Definice

Matice $A_{lk}{}^{\mathrm{T}}$, tj. transponovaná matice algebraických doplňků je ***matice adjungovaná***.

Počítání pomocí této metody je obvykle zdlouhavé, hodí se především pro strojové zpracování, protože je velmi přímočaré.

Řešený příklad najdete na http://www.matematika-lucerna.cz/lingebra/inverzni-matice-algeb-d.pdf

Vypočtěte inverzní matici, do třetího řádu oběma metodami, čtvrtého řádu pouze Gaussovou metodou

a) , b) , c) ,d) , e) ,

f) .

Řešení úloh

1a) , 1b) $\frac{1}{2}$, 1c) ; 1d) neexistuje,

http://homel.vsb.cz/~ber95/LAIT/Cviceni/lacv13.pdf