1

Soustavy lineárních rovnic

Příklad: Uvažujme jednoduchý příklad soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y:

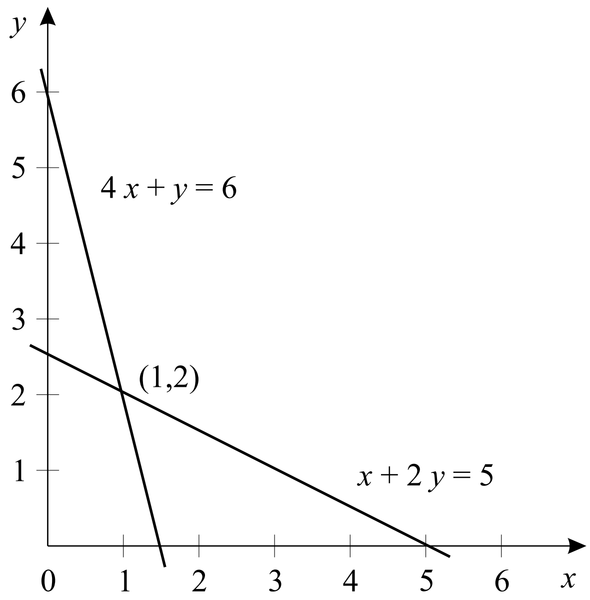
$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 4x + y &= 6 \end{aligned}$$

Ze střední školy známe několik metod, jak takové soustavy řešit: buď geometricky, nebo postupným dosazením, nebo násobením rovnic konstantami a vzájemným sčítáním či odčítáním rovnic. První postup je založen na tom, že každá rovnice tvaru $ax + by + c = 0$ reprezentuje graf přímky v rovině. Opačně platí, že každou přímku v rovině lze popsat nějakou rovnicí tvaru $ax + by + c = 0$. Každá ze dvou rovnic tedy určuje přímku a jediné co potřebujeme je najít průsečík těchto přímek, který pak odpovídá danému řešení (viz obr. 1.1).

Přirozeně mohl by nastat případ, že každá ze dvou rovnic reprezentuje stejnou přímku (pak je jedna nenulovým násobkem druhé a soustava má nekonečně mnoho řešení) nebo popisují různé navzájem rovnoběžné přímky (pak soustava nemá řešení). Tyto případy lze v jistém smyslu považovat za výjimečné (někdy je nazýváme jako degenerované); ve většině případů lze očekávat, že řešení bude pouze jedno. Naši soustavu lze řešit i algebraicky. Metoda "postupného dosazování" by mohla vypadat takto:

$$\begin{array}{lll} x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y & & \\ 4x + y = 6 & \Rightarrow 4(5 - 2y) + y = 6 & \\ & \qquad\Updownarrow & \Rightarrow x = 5 - 2 \cdot 2 = 1 \\ & -7y = -14 \Rightarrow y = 2 & \end{array}$$

V metodě „odečítání“ rovnic měníme postupně soustavu rovnic na jinou soustavu se stejným řešením. Nejprve jsme vynásobíme první rovnici číslem 4,



Obrázek 1.1:

pak obě rovnice odečteme a výsledek napíšeme na místo druhé rovnice a nakonec druhou rovnici vynásobíme číslem 1/7 a získáme výraz pro neznámou y. Pak násobek druhé rovnice odečteme od rovnice první a nakonec vynásobíme číslem. Z poslední rovnice pak čteme přímo řešení. Jednotlivé modifikace soustavy od sebe oddělujeme znakem $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{l} x+2y=5 \mid \cdot 4 \\ 4x+y=6 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+8y=20 \\ 4x+y=6 \end{array}\right| - \Rightarrow \begin{array}{l} 4x+8y=20 \\ 0x+7y=14 \mid \cdot \frac{1}{7} \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 4x+8y=20 \\ 0x+1y=2 \mid \cdot 8 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+8y=20 \\ 0x+8y=16 \end{array}\right| - \Rightarrow \begin{array}{l} 4x+0y=4 \mid \cdot \frac{1}{8} \\ 0x+8y=16 \mid \cdot \frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}$$

Příklad: Máme řešit následující soustavu lineárních rovnic pro neznámé x, y a z:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x+2y+5z & = & 11 \\ 4x+6y+8z & = & 24 \end{array}$$

Geometrický postup se příliš nehodí pro určení přesného řešení soustavy, nicméně geometrická interpretace nám poskytuje určitý pohled do problému bez toho, abychom ho museli řešit. Ze střední školy je známo, že rovnice tvaru $ax+by+cz+d=0$ popisuje rovinu v třírozměrném prostoru. Opačně, každou rovinu lze v prostoru popsat rovnicí tohoto tvaru. Obecně lze říci, že se dvě roviny protínají v přímce, i když ve výjimečných případech mohou být rovnoběžné, a to buď identické anebo různé. Řešení soustavy prvních dvou rovnic tedy může být: přímka, rovina nebo prázdná množina. Když přidáme třetí rovnici, pak se tato množina s rovinou protíná buď v jednom bodě; ve výjimečných případech jsou přímka s rovinou rovnoběžné, pak jejich průnik bude buď přímka sama nebo prázdná množina. Řešením soustavy tří rovnic o třech neznámých tedy může být jeden bod, přímka, rovina nebo prázdná množina (pak soustava nemá řešení). Algebraický postup ze střední školy je následující (metoda "postupného dosazování"):

$$\begin{array}{lll}
x+y+z=4 & \Rightarrow x=4-y-z & \\
2x+2y+5z=11 & & \Rightarrow 2(4-y-z)+2y+5z=11 \Rightarrow \\
4x+6y+8z=24 & & \Rightarrow 4(4-y-z)+6y+8z=24
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
3z=3 & \Rightarrow z=1 & & \\
2y+4z=8 & & \Rightarrow 2y+4\cdot 1=8 \Rightarrow y=2 & \\
 & & & \Rightarrow x=4-2-1=1
\end{array}$$

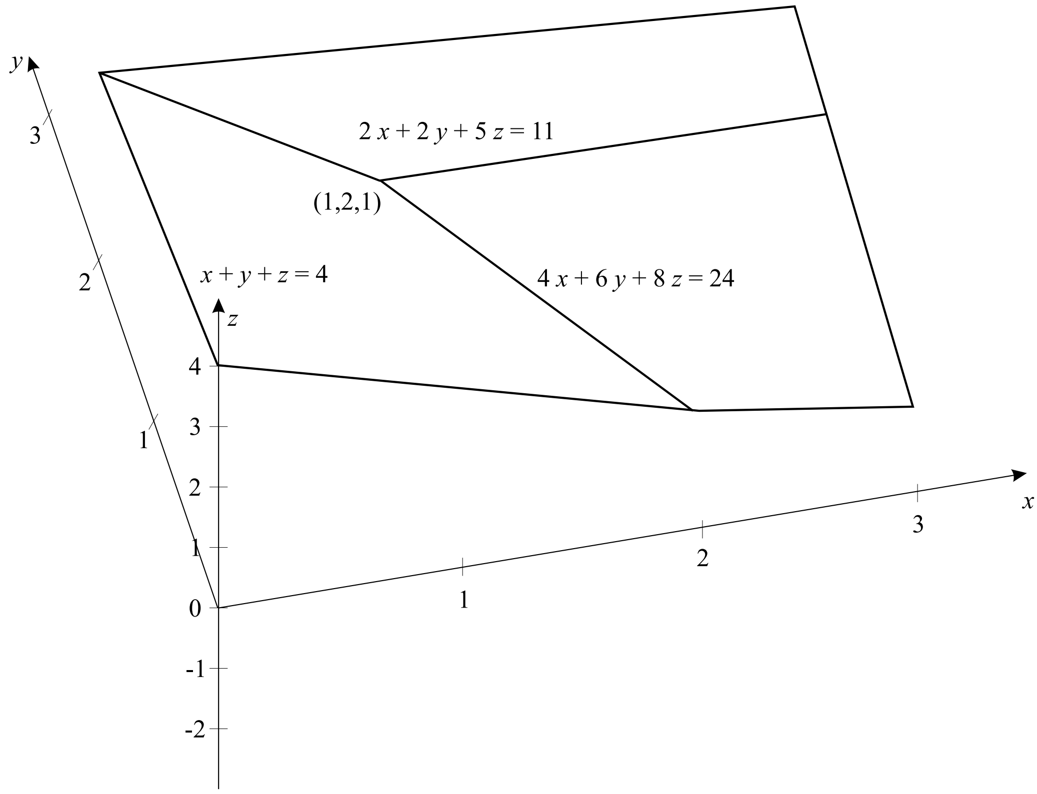
Definice: Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nazveme systém rovnic

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Značení: Množinu reálných čísel značíme $\mathbb{R}$, množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$. Reálná (komplexní) čísla z $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ se obvykle označují malými latinskými písmeny nebo řeckými písmeny, chceme-li vyjádřit, že jde o samostatnou konstantu (skalár). Proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme neznámé, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ koeficienty (vektoru) pravé strany, a_{ij} koeficienty (matice) soustavy (a_{ij} je j-tý koeficient v i-té rovnici odpovídající neznámé x_j).

Definice: Každou n-tici čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, která splňuje soustavu rovnic (1.1) nazveme řešením, množinu všech řešení soustavy (1.1) označíme S.

Definice: Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, nazýváme soustavu (1.1) homogenní soustavou, jinak je soustava (1.1) nehomogenní. Množinu všech řešení homogenní soustavy označíme S_0.



Obrázek 1.2:

Tvrzení: 1. Každá homogenní soustava má alespoň jedno (triviální) řešení. Platí totiž, že n-tice čísel $(0, \ldots, 0) \in S_0$, protože pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = 0$.

2. Jsou-li uspořádané n-tice $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(y_1, \ldots, y_n)$ řešeními homogenní soustavy, pak jsou řešeními homogenní soustavy i n-tice $(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ a $(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ pro libovolné reálné (komplexní) číslo α. Platí tedy

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) \in S_0 \text{ a } (y_1, \ldots, y_n) \in S_0 \quad \Rightarrow \quad & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in S_0, \\ & (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in S_0\end{aligned}$$

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z následujících rovností, které platí pro každé $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= 0 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = 0 \\ &\Rightarrow \quad a_{i1}(\alpha x_1) + a_{i2}(\alpha x_2) + \cdots + a_{in}(\alpha x_n) = 0 \end{aligned}$$

3. Nechť je uspořádaná n-tice čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ řešením nehomogenní soustavy (často se toto řešení nazývá partikulární řešení). Pak pro množinu řešení S platí, že $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) | (y_1, y_2, \ldots y_n) \in S_0\} := (x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_0$, t.j. každé řešení nehomogenní soustavy se dá vyjádřit jako součet nějakého jejího partikulárního řešení a nějakého řešení homogenní rovnice.

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení lze rozdělit do dvou částí: Nejdříve dokážeme, že $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_0 \subset S$. Tato vlastnost vyplývá z následujících rovností:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S &\iff a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \forall i \\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S_0 &\iff a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = 0, \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = b_i, \\ &\Rightarrow \quad (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in S. \end{aligned}$$

V druhé části ukážeme, že platí i opačná inkluze $S \subset (x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_0$:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in S &\iff a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n = b_i, \forall i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S &\iff a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a_{i1}(z_1 - x_1) + a_{i2}(z_2 - x_2) + \cdots + a_{in}(z_n - x_n) = 0, \forall i \\ &\Rightarrow \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots, z_n - x_n) \in S_0 \\ &\Rightarrow \quad (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in (x_1, x_2, \ldots, x_n) + S_0 \end{aligned}$$

Definice: Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají ekvivalentní, mají-li stejné množiny řešení.

Tvrzení: Množina řešení S soustavy lineárních rovnic se nemění, provedeme-li na ní libovolnou z následujících tzv. ekvivalentních úprav:

1. záměna pořadí dvou rovnic nebo neznámých soustavy,
2. vynásobení libovolné rovnice soustavy nenulovým číslem,
3. přičtení libovolného násobku některé rovnice k libovolně jiné rovnici,
4. odstranění nulového řádku.

Důkaz: V následujícím textu dokážeme pouze třetí bod tohoto tvrzení, důkaz ostatních bodů je jednoduchý. Nechť S' je množina všech řešení modifikované soustavy odpovídající úpravě v bodě 3. Je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, pak pro indexy i, j a číslo α platí

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \mid \cdot\,\alpha \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + (a_{j2} + \alpha a_{i2})x_2 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n = b_j + \alpha b_i$$

a tedy $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S' \Rightarrow S \subset S'$. Opačně předpokládejme, že $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in S'$. Pak platí

$$\left.\begin{array}{ll} (a_{j1} + \alpha a_{i1})x'_1 + (a_{j2} + \alpha a_{i2})x'_2 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x'_n & = b_j + \alpha b_i \\ a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \cdots + a_{in}x'_n & = b_i \mid \cdot\,\alpha \end{array}\right| -$$

z čehož vyplývá, že $(x'_1, x'_2, \ldots x'_n) \in S$ a tedy $S' \subset S$.

Definice: Říkáme, že soustava lineárních rovnic je v horním stupňovitém tvaru, právě když její koeficienty mají následující vlastnosti:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{a_{1k_1}} & & & & & & & \\
0 & 0 & \mathbf{a_{2k_2}} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{pk_p}} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
a_{i,k_i} \neq 0 & i = 1, \ldots, p, & k_1 < k_2 < \cdots < k_p, \\
a_{i,j} = 0, & j = 1, \ldots, k_i - 1, & i = 1, \ldots, p, \\
a_{i,j} = 0, & i = p + 1, \ldots, m, & j = 1, \ldots, n.
\end{array}$$

Tvrzení: Každou soustavu lze ekvivalentními úpravami převést na soustavu v horním stupňovitém tvaru.

Příklad (Gaussova eliminační metoda): Máme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 &= -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Koeficienty soustavy přepíšeme do tabulky čísel, společně s koeficienty pravé strany (pravou stranu oddělíme svislou čarou), které budeme říkat matice rozšířené soustavy. Tuto matici převedeme do horního stupňovitého tvaru následujícími ekvivalentními úpravami (převod na soustavu v horním stupňovitém tvaru se někdy nazývá přímým chodem Gaussovy eliminační metody):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \overset{|.(-2).(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \overset{|.(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Pak následuje řešení ekvivalentní soustavy v horním stupňovitém tvaru, která má stejnou množinu řešení jako původní soustava:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -4x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Tato část postupu se nazývá zpětný chod Gaussovy eliminační metody, kdy postupně odzadu dosazujeme již vypočtené hodnoty neznámých a počítáme hodnoty následujících neznámých

$$\begin{aligned} &-4x_3 = -4 \iff x_3 = 1 \Rightarrow \\ &-x_2 - 2x_3 = -4 \iff -x_2 = -4 + 2x_3 = -4 + 2 \cdot 2 = -2 \iff x_2 = 2 \Rightarrow \\ &2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \iff 2x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - 2 - 1 = -2 \iff x_1 = -1 \end{aligned}$$

Soustava má tedy jednoznačné řešení $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$.

Příklad: Pomocí Gaussovy eliminační metody máme řešit následující soustavu lineárních rovnic (4 rovnice o 5 neznámých):

$$\begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &= -11 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 &= 4 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= -3 \\ -6x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 - 12x_5 &= -7 \end{aligned}$$

Nejdříve ekvivalentními úpravami získáme soustavu v horním stupňovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 4 & -1 & 1 & -7 & -11 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 1 & -12 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -1 & 1 & -7 & -11 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 1 & -12 & -7 \end{array}\right) \overset{|2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -4 & 5 & 1 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 1 & -12 & -7 \end{array}\right) \overset{|(-2)(3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{(-3)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Tímto způsobem jsme získali ekvivalentní soustavu tří rovnic o pěti neznámých tvaru:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 &= 4 \\ x_3 + x_4 - x_5 &= -3 \\ x_4 - 2x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení, které ovšem není jednoznačné (má nekonečně mnoho řešení). Některé z neznámých lze volit libovolným způsobem (obvykle se používají parametry $u, v, \ldots$) a zbývající lze pak vypočítat obvyklým postupným dosazováním ve zpětném chodu Gaussovy eliminační metody (V našem případě volíme libovolně vždy jednu neznámou z dvojic x_4, x_5 a x_1, x_2):

$$\begin{aligned} & x_5 = u \Rightarrow \\ & x_4 - 2x_5 = 1 \iff x_4 - 2u = 1 \iff x_4 = 1 + 2u \Rightarrow \\ & x_3 + x_4 - x_5 = -3 \iff x_3 + (1 + 2u) - u = -3 \iff x_3 = -4 - u \Rightarrow \\ & x_2 = v \Rightarrow \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 4 \iff 2x_1 - 2v - 4 - u + 3u = 4 \\ & \iff x_1 = 4 - u + v \end{aligned}$$

Tím lze získat řešení naší soustavy v následujícím tvaru (všimněme si, že počet volných parametrů je roven počtu neznámých minus počet rovnic soustavy v horním stupňovitém tvaru):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-u+v \\ v \\ -4-u \\ 1+2u \\ u \end{pmatrix}, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a lze ji řešit i jiným způsobem. Lze využít vlastnost, že množina řešení soustavy S je rovna $(x_1,\dots,x_5) + S_0$, kde $(x_1,\dots,x_5)$ je nějaké (partikulární) řešení a S_0 je množina všech řešení homogenní soustavy. Partikulární řešení vypočteme například tímto způsobem:

$$\begin{aligned}
&x_5 = 0 \Rightarrow \\
&x_4 - 2x_5 = 1 \iff x_4 - 0 = 1 \iff x_4 = 1 \Rightarrow \\
&x_3 + x_4 - x_5 = -3 \iff x_3 + 1 - 0 = -3 \iff x_3 = -4 \Rightarrow \\
&x_2 = 0 \Rightarrow \\
&2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 4 \iff 2x_1 - 4 = 4 \iff x_1 = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V dalším kroku se hledá množina řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned}
2y_1 - 2y_2 + y_3 + 3y_5 &= 0 \\
y_3 + y_4 - y_5 &= 0 \\
y_4 - 2y_5 &= 0
\end{aligned}$$

následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&y_5 = u \Rightarrow \\
&y_4 = 2u \Rightarrow \\
&y_3 = -y_4 + y_5 = -2u + u = -u \Rightarrow \\
&y_2 = v \Rightarrow \\
&2y_1 = 2y_2 - y_3 - 3y_5 = 2v + u - 3u = 2v - 2u \iff \\
&y_1 = v - u
\end{aligned}$$

kde u a v jsou volné parametry, které lze libovolně zvolit. Množina řešení nehomogenní soustavy S pak obsahuje vektory tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v-u \\ v \\ -u \\ 2u \\ u \end{pmatrix}.$$

Příklad: Řešte následující soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Postupujeme stejným způsobem a převedeme soustavu do horního stupňovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right) \overset{(-2)(-1)(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \overset{(-1)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Tvrzení: Rovnici $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = c$, $c \neq 0$ nelze splnit pro žádná $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Poznámka: V našem případě má čtvrtá rovnice tento tvar pro $n = 4$ a $c = -3$. Výše uvedená soustava tedy nemá řešení.

Definice: Má-li soustava lineárních rovnic alespoň jedno řešení, nazýváme ji konzistentní, v opačném případě je nekonzistentní.

Poznámka: Každá homogenní soustava je konzistentní (každá homogenní soustava má alespoň triviální řešení, triviální řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ určitě patří do množiny řešení soustavy S_0) .

Tvrzení: Soustava lineárních rovnic nemusí být obecně řešitelná (může být inkonzistentní). Je-li soustava konzistentní, může mít buď jedno nebo nekonečně mnoho řešení. Má-li konzistentní soustava lineárních rovnic více neznámých než rovnic, pak má nekonečně mnoho řešení. .tex