2

Matice

Definice: Obdélníkové schéma sestavené z reálných (komplexních) čísel tvaru

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazýváme reálnou (komplexní) maticí typu $m \times n$. Prvek a_{ij} se nazývá i, j-tý koeficient matice A. Množinu všech reálných (komplexních) matic typu $m \times n$ značíme $\mathbb{R}^{m,n}$ resp. $\mathbb{C}^{m,n}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu n.

Poznámky: Matice je matematickou formalizací tabulky. Vždy předpokládáme $m \geq 1$, $n \geq 1$; neuvažujeme tedy prázdné matice, značíme je velkými latinskými písmeny $A, B, \dots$, koeficienty matice A značíme a_{ij} a píšeme $A = (a_{ij})$.

Definice: Matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ se rovnají, což zapisujeme $A = B$, jestliže jsou stejného typu $m \times n$ a platí $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Poznámka: $A \neq B$ tedy znamená, že buďto matice jsou různých typů anebo jsou stejného typu a současně platí $a_{ij} \neq b_{ij}$ pro nějaké i a j.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$ $(A, B \in \mathbb{R}^{m,n})$. Potom jejich součtem $C = A \oplus B = (c_{ij})$ nazýváme matici typu $m \times n$ s koeficienty, pro které platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Poznámka: Jsou-li A, B různých typů, pak součet $A \oplus B$ není definován.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ $(A \in \mathbb{R}^{m,n})$, α číslo (skalár). Potom $C = \alpha \odot A = (c_{ij})$ je matice typu $m \times n$ s koeficienty

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Příklad:

$$2 \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Poznámky: Podobně jako u sčítání a násobení reálných čísel tečku a kroužek většinou vynecháváme a píšeme $A + B$ místo $A \oplus B$ resp. αA místo $\alpha \odot A$.

Poznámka: Definujeme nulovou matici typu $m \times n$ jako

$$\Theta_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

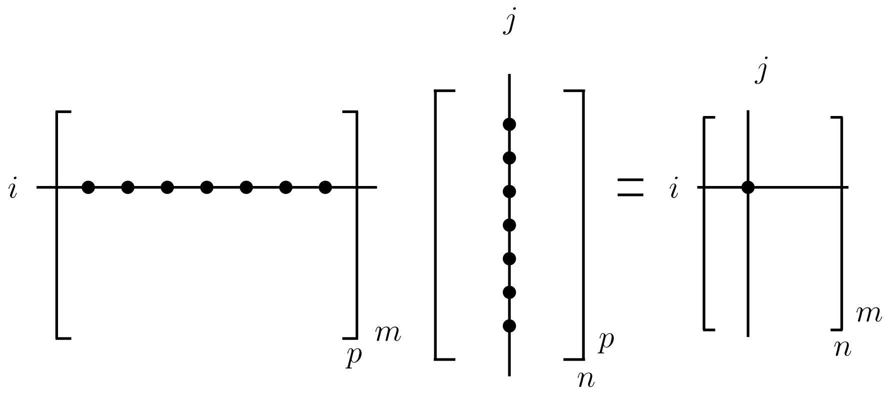
Místo $\Theta_{m,n}$ píšeme pouze Θ nebo 0 je-li typ z kontextu zřejmý, ve výrazu $0 \cdot 0$ je vlevo číslo 0 (skalár), vpravo nulová matice Θ.

Poznámka: Nechť A, B, C jsou matice typu $m \times n$ a α, β skaláry. Potom platí následující vztahy:

1) $A + B = B + A$ (komutativní zákon),
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativní zákon),
3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributivní zákon vzhledem ke sčítání matic),
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivní zákon vzhledem k násobení matic skaláry).

Definice: Je-li $A = (a_{ik})$ matice typu $m \times p$ ($A \in \mathbb{R}^{m,p}$) a $B = (b_{kj})$ matice typu $p \times n$ ($B \in \mathbb{R}^{p,n}$), potom $C = A \odot B = (c_{ij})$ je matice typu $m \times n$ ($C \in \mathbb{R}^{m,n}$) s koeficienty, pro které platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$



$A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ $\quad$ $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ $\quad$ $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Obrázek 2.1:

Poznámka: Nemůže-li dojít k nedorozumění, píšeme AB místo $A \odot B$. K proveditelnosti výrazu $\sum\limits_{k=1}^{p} a_{in} b_{nj}$ je třeba aby počet sloupců matice A se rovnal počtu řádků matice B. V opačném případě není součin $A \odot B$ definován.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ není definován.

Poznámka: Čtvercová matice řádu n s jedničkami na diagonále a nulami mimo ni

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá jednotková matice řádu n a označujeme ji jako $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$. Je-li řád zřejmý z kontextu, píšeme místo I_n pouze I.

Tvrzení: Je-li A typu $m \times n$ ($A \in \mathbb{R}^{m,n}$) pak $A + \Theta_{m,n} = \Theta_{m,n} + A = A$ a $I_m A = A I_n = A$. Jsou-li A a B čtvercové matice stejného řádu, obecně neplatí $AB = BA$.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: Matici typu $n \times 1$ nazýváme n-rozměrným vektorem a značíme ho $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ resp. $x = (x_i)$ místo $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$. Koeficienty x_i se nazývají složky vektoru x. Vektory značíme obvykle malými písmeny a množinu n-rozměrných reálných vektorů místo $\mathbb{R}^{n,1}$ označujeme $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení: Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$. Potom maticový zápis $Ax = b$ nebo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

rozepsáním po jednotlivých složkách znamená zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Definice: Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nazývá regulární, jestliže soustava

$$Ax = 0$$

má jediné řešení $x = 0$ (triviální řešení) a v opačném případě, tj. platí-li $Ax = 0$ pro nějaký netriviální vektor $x \neq 0$, se nazývá singulární.

Poznámka: Zápis $x \neq 0$ znamená $x_i \neq 0$ pro nějaké i, nikoliv pro všechna i.

Tvrzení: Je-li matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární, potom pro libovolnou pravou stranu $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ právě jedno řešení.

Definice: Počet nenulových řádků matice v horním stupňovitém tvaru, která vznikne konečným počtem ekvivalentních úprav původní matice A nazýváme hodností matice A a značíme ji $h(A)$ nebo $\text{rank}(A)$.

Poznámka: Pro $A = \Theta_{m,n}$ je tedy $h(A) = 0$, pro $A \neq \Theta_{m,n}$ je $1 \leq h(A) \leq m$.

Věta (Frobeniova): Soustava lineárních rovnic $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) má řešení právě tehdy, když

$$h(A, b) = h(A).$$

Tvrzení: Homogenní soustava lineárních rovnic $Ax = 0 \quad (A \in \mathbb{R}^{m,n})$ má jen nulové řešení právě když $h(A) = n$. Je-li $h(A) < n$ pak má soustava nekonečně mnoho řešení. Počet parametrů, které můžeme libovolně volit je pak roven $n - h(A)$ (počet neznámých minus počet rovnic ekvivalentní soustavy v horním stupňovitém tvaru).

Tvrzení: Jsou-li matice A, B stejného řádu a regulární, potom je regulární i matice AB.

Věta (o inverzní matici): Ke každé regulární matici $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ existuje právě jedna matice z $\mathbb{R}^{n,n}$ (označujeme ji A^{-1}) s vlastností

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Naopak, existuje-li k $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matice, splňující $AA^{-1} = A^{-1}A$, pak je A regulární.

Důkaz: *Existence:* Protože matice A je regulární má pro každou pravou stranu soustava $Ax = b$ jediné řešení. Označíme-li sloupce matice $I = I_n$

jako $e_1, e_2, \dots, e_n$ ($I = (e_1\, e_2 \dots e_n)$), má pro každé $j = 1, \dots, n$ soustava $Ax_j = e_j$ jediné řešení x_j. Nechť A^{-1} je matice o sloupcích $x_1, x_2, \dots, x_n$, tedy $A^{-1} = (x_1\, x_2 \dots x_n)$. Z definice rovnosti dvou matic a násobení plyne

$$AA^{-1} = A(x_1\, x_2 \dots x_n) = (e_1\, e_2 \dots e_n) = I$$

Dále platí, že $A(A^{-1}A - I) = (AA^{-1})A - A = I_nA - A = A - A = 0$. Protože je A regulární matice má $A^{-1}A - I$ nulové sloupce. Dokázali jsme, že matice A^{-1} splňuje $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Jednoznačnost: Nechť pro jistou matici X platí $AX = XA = I$. Potom je

$$X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

To znamená, že matice A^{-1} je vlastností $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ určena jednoznačně.
Existence inverze implikuje regularitu. Jestliže k A existuje matice A^{-1} s vlastností $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, potom z $Ax = 0$ plyne

$$x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1} \cdot 0 = 0\,,$$

takže matice A je regulární.

Definice: Matici A^{-1} s vlastností $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ nazýváme inverzní maticí k matici A.

Příklad (Případ $n = 1$): Matice $A = (a_{11})$ je regulární právě, když je $a_{11} \neq 0$. Je-li číslo $\det(A) = a_{11}$ nenulové, pak inverzní matice má tvar $A^{-1} = (\frac{1}{a_{11}})$.

Příklad (Případ $n = 2$): Je-li $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, potom má matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ inverzní matici tvaru

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

protože

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = I$$

Z toho plyne podmínka, že $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ implikuje regularitu A. Číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nazýváme determinantem matice A a označujeme ho $\det(A)$.

Příklad (Případ $n = 3$): (Sarusovo pravidlo). Determinant matice třetího řádu s koeficienty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

můžeme vypočítat pomocí Sarusova pravidla

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned}$$

Sarusovo pravidlo se nedá použít na počítání determinantu matic čtvrtého a vyšších řádů.

Tvrzení (Determinant trojúhelníkové matice): Nechť matice A je čtvercová řádu n a má pod hlavní diagonálou jen nulové prvky (je horní trojúhelníková), tedy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

pak je její determinant roven $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Je-li $a_{ii} = 0$ pro nějaký index $i = 1 \dots n$ (stačí jeden z nich), pak $\det(A) = 0$. Dalším důsledkem je vztah $\det(I_n) = 1$.

Věta: Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, když je její determinant $\det(A) \neq 0$.

Poznámka: Nenulovost determinantu je nejznámější kritérium regularity. Negací obou stran ekvivalence, dostáváme, že A je singulární právě když $\det(A) = 0$.

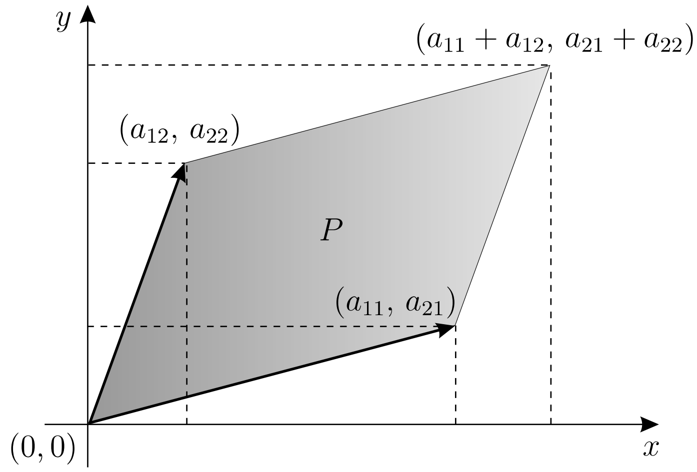
Poznámka (Geometrická interpretace determinantu): Determinant matice druhého řádu s koeficienty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lze geometricky interpretovat jako plochu rovnoběžníka, který je určen rovinnými vektory $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Jsou-li tyto vektory rovnoběžné pak je

$\mu(P) = 0$, jinak je plocha rovnoběžníka až na znaménko dána determinantem matice A

$$\mu(P) = \pm(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \pm = \det(A).$$



Obrázek 2.2:

Podobná vlastnost platí i pro matice řádu 3 s koeficienty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sloupce matice $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ určují v prostoru rovnoběžnostěn, jehož objem je rovněž až na znaménko dán determinantem matice

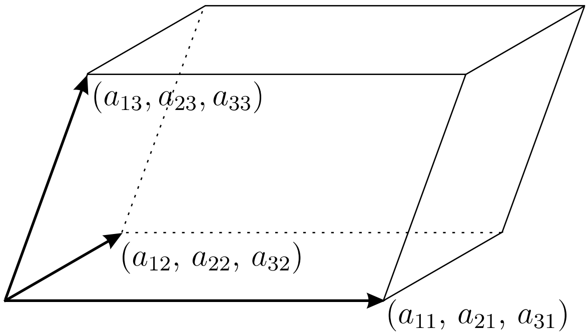
$$\mu(P) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Jsou-li vektory v jedné rovině, pak je $\mu(P) = 0$.
Obecně je-li A čtvercová matice řádu n a jsou-li sloupce vektory $a_1, \ldots, a_n$, pak je $\det(A) = \pm\mu(P)$, kde P je n-rozměrný rovnoběžnostěn daný popisem

$$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k | 0 \leq \alpha_k \leq 1, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Věta (Soustavy s regulární maticí): Je-li $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární, potom pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ je jediné řešení soustavy

$$Ax = b$$



Obrázek 2.3:

dáno vztahem $x = A^{-1}b$.

Důkaz: Je-li A regulární, potom má i inverzní matici a z rovnosti $Ax = b$ přenásobením inverzní maticí A^{-1} zleva dostáváme

$$A^{-1}b = A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ix = x$$

Tvrzení (Vlastnosti inverzní matice): Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou regulární matice. Potom platí: 1. $(A^{-1})^{-1} = A$; 2.$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Důkaz: 1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Z jednoznačnosti plyne, že $(A^{-1})^{-1} = A$ (viz věta o inverzní matici). 2. $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$ a $ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice: Při výpočtu inverzní matice postupujeme následujícím způsobem:

1. Dána čtvercová matice A.
2. Sestavení matice $(A \mid I)$.
3. Použití Gaussovy eliminace k převedení na horní stupňovitý tvar.
4. Je-li hodnost $h(A)$ menší než n: A je singulární a nemá inverzi.
5. Použití dalších ekvivalentních oprav k převedení na tvar $(I \mid X)$, kde $X = A^{-1}$.

Příklad: Dokažte, že následující matice je regulární a nalezněte k ní matici inverzní A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-2)(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \overset{(-6)(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

z čehož vyplývá, že je matice A regulární

$$\begin{aligned}
(A \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{(1)(-2)} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{(-4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1})
\end{aligned}$$

Inverzní matice má tedy tvar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a snadno lze ověřit, že splňuje

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Výpočtem inverzní matice ověřte, že platí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{|(-2)} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(-2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$