4

Lineární zobrazení

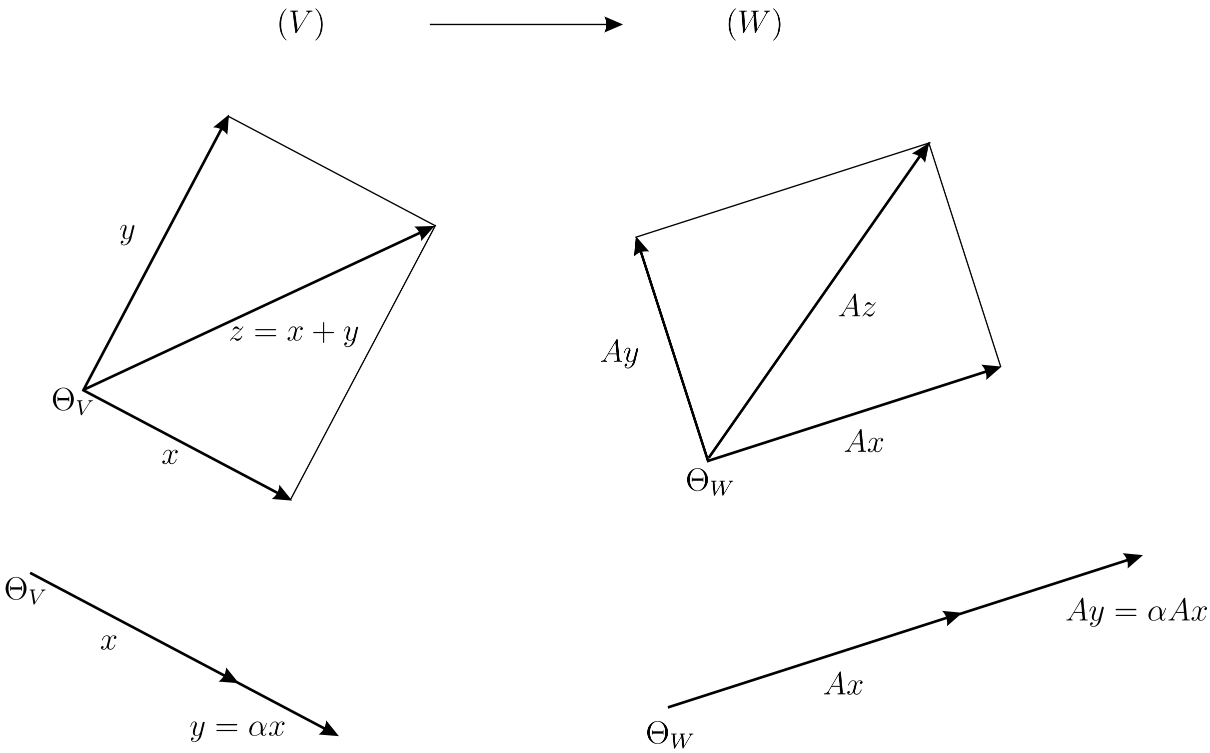
Definice: Nechť V a W jsou vektorové prostory. Zobrazení $\mathcal{A} : V \to W$ (zobrazení z V do W) nazýváme lineárním zobrazením, pokud pro všechna $x \in V$, $y \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

1. $\mathcal{A}(x \oplus y) = \mathcal{A}(x) \oplus \mathcal{A}(y)$ (vlastnost aditivity)
2. $\mathcal{A}(\alpha \odot x) = \alpha \odot \mathcal{A}(x)$ (vlastnost homogenity)

Poznámka: Lineární zobrazení zachovává operace sčítání dvou vektorů a násobení vektoru skalárem. Sečteme-li dva prvky z V a výsledek převedeme prostřednictvím lineárního zobrazení do W, vyjde totéž jako kdybychom nejprve jednotlivé prvky nejdřív převedli prostřednictvím zobrazení do W a tam je sečetli. Podobně je tomu i u operace násobení vektoru skalárem.

Poznámka: Všimněme si, že první operace $\oplus$ ve vlastnosti aditivity (1) je sčítáním definovaným na lineárním prostoru V, zatímco druhá operace $\oplus$ v této vlastnosti je sčítáním definovaným na lineárním prostoru W, tedy $\mathcal{A}(x \oplus_V y) = \mathcal{A}(x) \oplus_W \mathcal{A}(y)$. Protože obecně mohou být lineární prostory V a W různé, mohou být i tyto operace definovány zcela rozdílným způsobem. Podobně u vlastnosti homogenity (2) je první operace $\odot$ násobením definovaným na V, zatímco druhá operace $\odot$ je násobením definovaným na W, tedy platí $\mathcal{A}(\alpha \odot_V x) = \alpha \odot_W \mathcal{A}(x)$. Obvykle ovšem píšeme $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ a $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}(x)$.

Poznámka: Nechť V a W jsou vektorové prostory. Zobrazení $A : V \to W$ je tedy lineární právě tehdy když pro vektor $z = x+y$ platí $A(z) = A(x)+A(y)$ a



Obrázek 4.1:

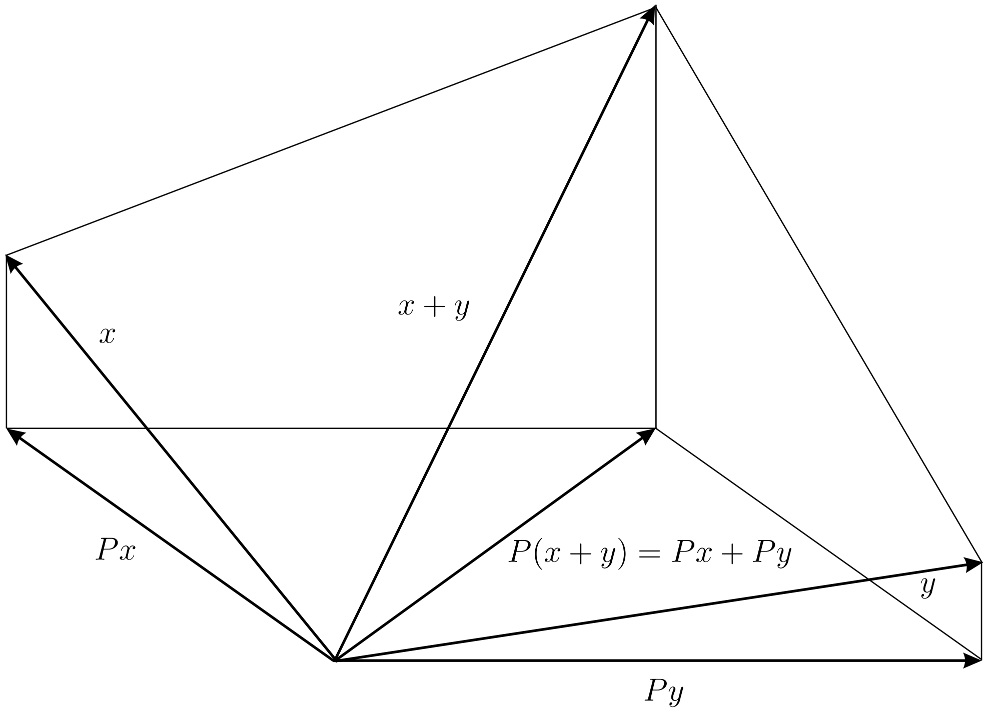
pro vektor $y = \alpha x$ platí $A(y) = \alpha A(x)$. Graficky lze tyto vlastnosti znázornit následujícím způsobem:

Příklad: Každá matice A řádu $m \times n$ indukuje lineární zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^n$ do prostoru $\mathbb{R}^m$ (linearita tohoto zobrazení vyplývá z vlastností násobení matic):

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n \to y = Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Příklad: Nechť U je rovina v třírozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ procházející jeho počátkem a tedy je jeho podprostorem. Nechť P je ortogonální projekce prostoru $\mathbb{R}^3$ na rovinu U. P je pak lineárním zobrazením $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nebo z prostoru $\mathbb{R}^3$ do prostoru U.



Obrázek 4.2:

Příklad: Nechť e je vektor v třírozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$, φ úhel a transformace D nechť je rotace (pootočení) prostoru $\mathbb{R}^3$ kolem osy dané vektorem e o úhel φ. Transformace D je lineárním zobrazením.

Věta: Nechť $\mathcal{A}$ je lineární zobrazení z prostoru V do prostoru W. Pak platí následující tvrzení:
1. $\mathcal{A}(\Theta_V) = \Theta_W$, kde Θ_V je nulový vektor lineárního prostoru V a Θ_W je nulový vektor lineárního prostoru W, protože

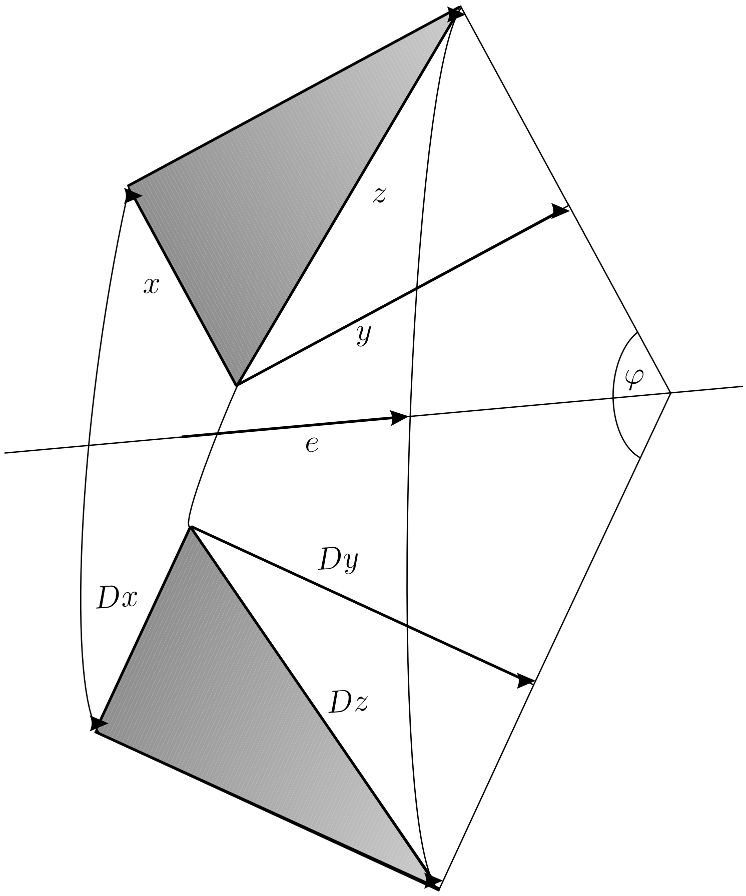
$$\mathcal{A}(\Theta_V) = \mathcal{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \mathcal{A}(x) = \Theta_W \quad \forall x \in V$$

2. Vlastnosti aditivity a homogenity (1) a (2) lze shrnout jedinou vlastností (princip superpozice): pro všechna $x \in V$, $y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y).$$

3. Opakovaným použitím principu superpozice lze předchozí tvrzení rozšířit na libovolný soubor vektorů $x_1, \dots, x_n \in V$ a libovolná $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A}(x_j)$$



Obrázek 4.3:

Tvrzení: (Lineární zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v bázi.) Nechť V a W jsou vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathcal{A}$ je lineární zobrazení z V do W, nechť $x_1, \ldots, x_n$ je báze prostoru V a $y_1, \ldots, y_m$ je báze prostoru W. Libovolný vektor $x \in V$ lze napsat jako lineární kombinaci pomocí vektorů báze $x_1, \ldots, x_n$, tedy $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Protože je $\mathcal{A}$ lineární zobrazení, platí

$$y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A}(x_j),$$

tedy obraz libovolného vektoru, lze získat pomocí obrazů bázických vektorů $\mathcal{A}(x_1), \ldots, \mathcal{A}(x_n)$. Protože jsou to vektory z prostoru W, lze tyto vektory vyjádřit pomocí lineárních kombinací bázických vektorů $y_1, \ldots, y_m$

$$\mathcal{A}(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i.$$

Tedy platí

$$y = \mathcal{A}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j \right) y_i$$

Tedy i-tou souřadnici vektoru $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i$ v bázi $y_1, \ldots, y_m$, kterou jsme označili β_i, lze získat jako $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j$, tedy vynásobením

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

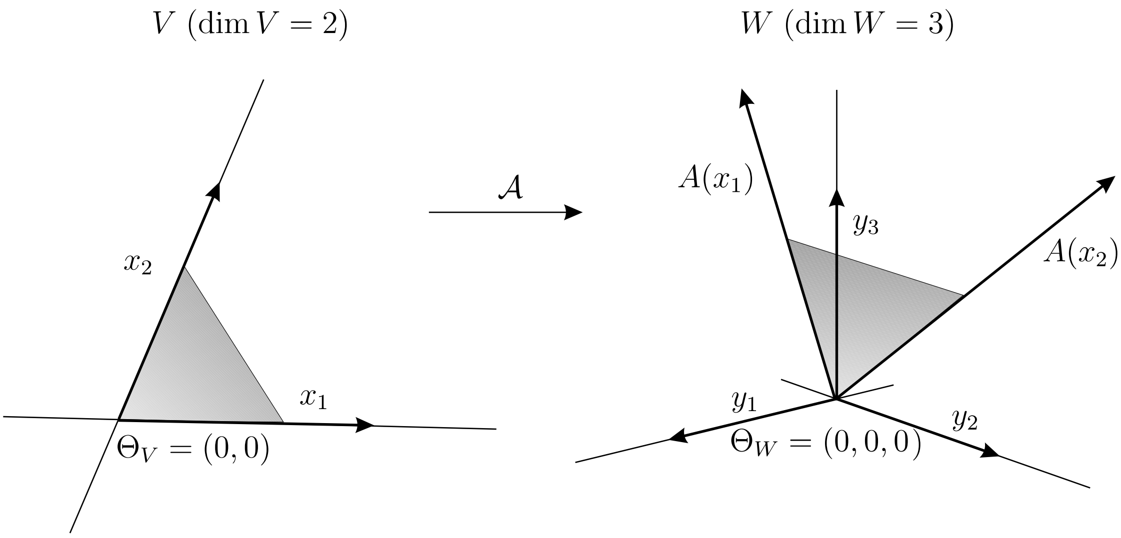
Definice: Matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ typu $m \times n$ definovanou předchozím způsobem nazýváme maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$.

Příklad: Lineární zobrazení $\mathcal{A}$ z prostoru V do prostoru W je zobrazením roviny (celého prostoru V) na rovinu (nebo v speciálních případech na přímku nebo bod) v třírozměrném prostoru W danou vektory $\mathcal{A}(x_1)$ a $\mathcal{A}(x_2)$.

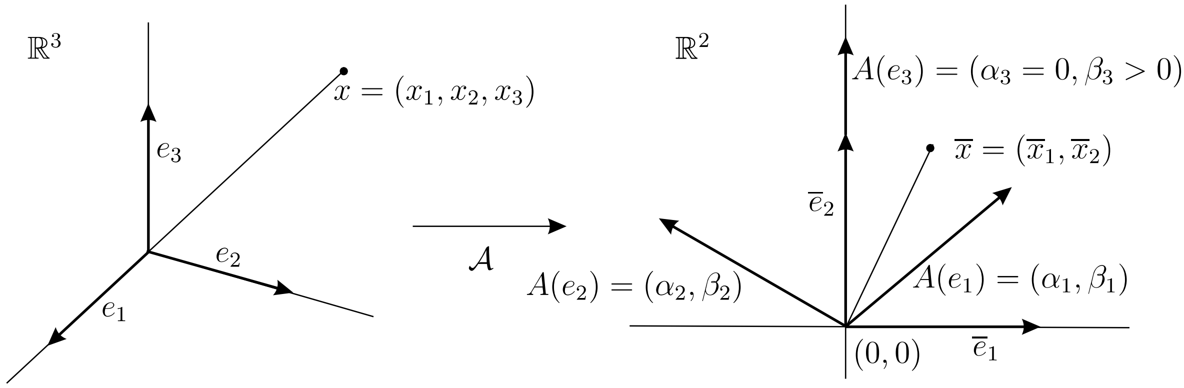
Příklad: Obecné axonometrické zobrazení Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které každému bodu (x_1, x_2, x_3) v třírozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ přiřadí bod $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ v rovině (v dvourozměrném prostoru $\mathbb{R}^2$) umožňuje konstruovat dvourozměrné obrazy třírozměrných objektů.

Obraz jakéhokoliv vektoru lze získat pomocí obrazů bazických vektorů standardní báze $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$, tedy pomocí vektorů $A(e_1) = (\alpha_1, \beta_1)$, $A(e_2) = (\alpha_2, \beta_2)$ a $A(e_3) = (\alpha_3, \beta_3)$, kde koeficienty α_1, α_2, α_3 a β_1, β_2, β_3 dané axonometrické zobrazení určují. Matice zobrazení (v standarních bazích $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$ a $\overline{e}_1 = (1, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1)$) má tvar

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$



Obrázek 4.4:



Obrázek 4.5:

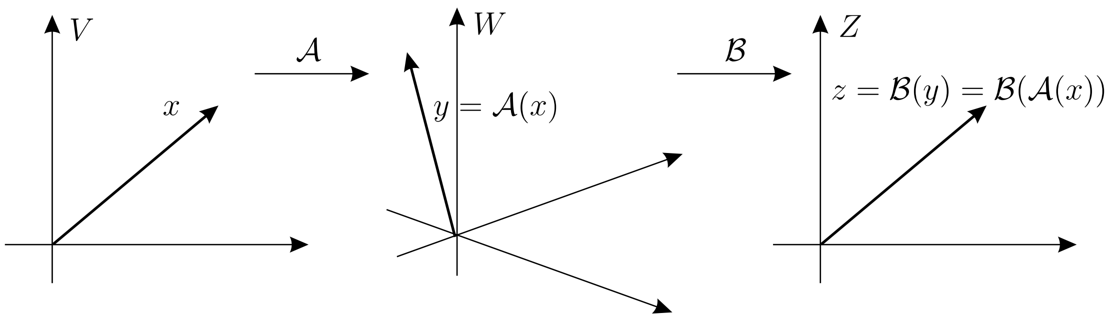
a určuje vzájemnou souvislost mezi souřadnicemi libovolného bodu $x = (x_1, x_2, x_3)$ v třírozměrném prostoru a jeho axonometrickým obrazem $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ v rovině. Tímto lze získat transformační vztah $\overline{x} = Ax$, který po rozepsání po složkách má tvar

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \overline{x}_2 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \end{aligned}$$

Příklad: Nechť $\mathcal{A}$ je lineární zobrazení z prostoru V do W ($A : V \to W$) a $\mathcal{B}$ je lineární zobrazení z prostoru W do prostoru Z ($B : W \to Z$). Pak je lineární i složené zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$, což je zobrazení z prostoru V do prostoru Z, které je definováno předpisem

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : V \to Z, \quad (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) \quad \forall x \in V$$



Obrázek 4.6:

Tvrzení: Nechť A je matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_m$ a nechť B je matice zobrazení $\mathcal{B}$ vzhledem k bázím $y_1, \ldots, y_m$ a $z_1, \ldots, z_k$. Pak matice BA je maticí zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ vzhledem k bázím $x_1, \ldots, x_n$ a $z_1, \ldots, z_k$.

Příklad: Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem k ose z (dané vektorem e_3) o úhel $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$ a nechť $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je axonometrické zobrazení dané obrazy bazických vektorů $\mathcal{B}(e_1) = (-2, -2)$, $\mathcal{B}(e_2) = (5, -1)$ a $\mathcal{B}(e_3) = (0, 5)$. Pak i $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je také axonometrické zobrazení, které odpovídá zobrazení objektu, který byl předtím pootočen k osy z o úhel α. Matice zobrazení $\mathcal{A}$ v standardních bazích e_1, e_2, e_3 a e_1, e_2, e_3 má tvar

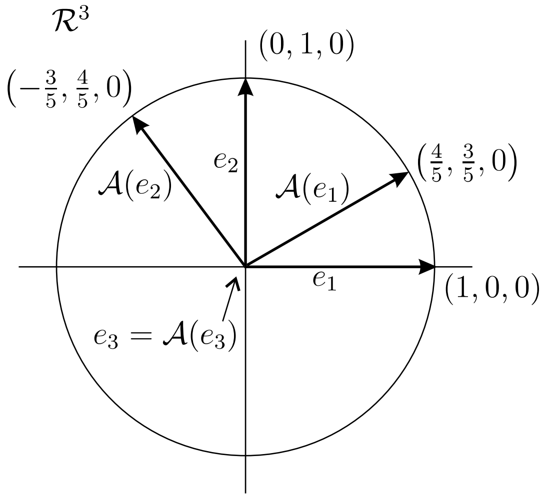
$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matice zobrazení $\mathcal{B}$ v standardních bazích e_1, e_2, e_3 a e_1, e_2 je

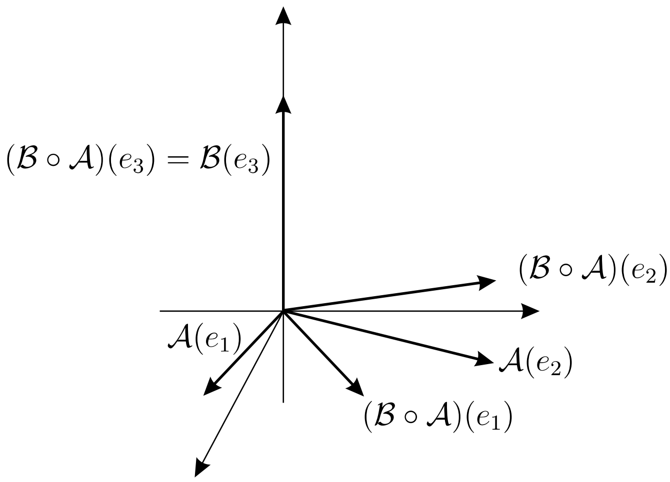
$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matici zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ v standardních bazích e_1, e_2, e_3 a e_1, e_2 lze pak získat prostým vynásobením matic A a B, tedy

$$C = BA = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{26}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} & 5 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4.7:



Obrázek 4.8:

Definice: Nechť V a W jsou vektorové prostory a $\mathcal{A} : V \to W$ je lineární zobrazení. Množinu $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V; \mathcal{A}(x) = \Theta_W\}$ nazýváme jádrem lineárního zobrazení $\mathcal{A}$.

Příklad: Nechť $\mathcal{A}$ je zobrazení z $\mathcal{P}$ do $\mathcal{P}$, které každému polynomu $x \in \mathcal{P}$ přiřadí jeho derivaci, tj.

$$x \in \mathcal{P}, \quad x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}(x) = x', \quad x'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + n a_n t^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j t^{j-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zobrazení $\mathcal{A}$ je lineární. Platí totiž, že derivace funkce je lineární vzhledem k součtu funkcí a násobení funkce konstantou

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x+y) &= (x+y)' = x' + y' = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) \\ \mathcal{A}(\alpha x) &= (\alpha x)' = \alpha x' = \alpha \mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

Jádrem tohoto zobrazení je množina všech konstantních polynomů, protože to jsou jediné polynomy, které po zderivování dávají nulovou funkci (nulový polynom).

Příklad: Nechť $\mathcal{B}$ je zobrazení z $\mathcal{P}$ do $\mathcal{P}$, které každému polynomu $x \in \mathcal{P}$ přiřadí jeho primitivní funkci, t.j.

$$x \in \mathcal{P}, \quad x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}(x) = \int x dx, \int x(t)dt = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} t^{j+1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Jádro tohoto zobrazení obsahuje pouze nulový polynom $\operatorname{Ker} \mathcal{B} = \{\Theta\}$, $\Theta(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Tvrzení: Jádro lineárního zobrazení $\mathcal{A} : V \to W$ tvoří podprostor vektorového prostoru V.

Důkaz: Z definice jádra plyne $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{x \in V \;\; \mathcal{A}(x) = \Theta_W\} \subset V$. Jsou-li $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x) = \Theta_W$ a $y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(y) = \Theta_W$, pak

$$\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = \Theta_W + \Theta_W = \Theta_W \Rightarrow x + y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x) = \alpha \Theta_W = \Theta_W \Rightarrow \alpha x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$$

Definice: Defekt lineárního zobrazení $\mathcal{A} : V \to W$ je definován jako $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ a značíme jej $d(\mathcal{A})$.

Poznámka: Předchozí tvrzení zaručuje smysluplnost definice defektu.

Příklad: (**Jak najít jádro lineárního zobrazení pomocí matice zobrazení?**) Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ je lineární zobrazení splňující $\mathcal{A}(1,2,0) = x_1$,

$\mathcal{A}(1,1,1) = x_2$, $\mathcal{A}(-1,3,-1) = x_3$, kde $x_1(t) = 2+3t$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = 1+t$. Nalezněte matici zobrazení ve standardních bázích e_1, e_2, e_3 a e_1, e_2. Pomocí této matice nalezněte jádro a defekt zobrazení $\mathcal{A}$.

Řešení této úlohy lze najít v zásadě dvojím způsobem: Protože máme k dispozici obrazy vektorů $\mathcal{A}(y_1) = x_1$, $\mathcal{A}(y_2) = x_2$ a $\mathcal{A}(y_3) = x_3$ můžeme hledat všechna α_1, α_2,α_3 taková, že postupně platí rovnosti

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) &= \Theta \\ \alpha_1\mathcal{A}(y_1) + \alpha_2\mathcal{A}(y_2) + \alpha_3\mathcal{A}(y_3) &= \Theta \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \Theta. \end{aligned}$$

Protože jde o rovnost dvou polynomů, musí se rovnat jejich funkční hodnoty v každém bodě $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) &= \Theta(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \alpha_1(2+3t) + \alpha_2 t + \alpha_3(1+t) &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + (3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tato rovnost pak vede na homogenní soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé α_1, α_2 a α_3

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

kterou řešíme standardním způsobem pomocí převodu do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení této soustavy má obecný tvar $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = u$ a $\alpha_3 = -2u$, kde $u \in \mathbb{R}$ lze volit libovolně. Dosazením za koeficienty α_1, α_2 a α_3 získáme obecný tvar vektoru z jádra

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = u y_1 + u y_2 - 2u y_3 = u(y_1 + y_2 - 2y_3) \\ &= u\left((1,2,0) + (1,1,1) - 2(-1,3,-1)\right) = u(4,-3,3), \end{aligned}$$

ze kterého přímo vyplývá, že $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = [(4,-3,3)]_\lambda$, a tedy $d(\mathcal{A}) = 1$.

Druhou možností je nalézt obrazy $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\mathcal{A}(e_3)$ pomocí známých obrazů $\mathcal{A}(y_1)$, $\mathcal{A}(y_2)$, $\mathcal{A}(y_3)$. K tomu ale potřebujeme znát souřadnice vektorů

e_1, e_2, e_3 v bázi y_1, y_2, y_3, které zjistíme jako řešení tří soustav se stejnou maticí a různými pravými stranami e_1, e_2, e_3

$$e_i = \alpha_{i1}y_1 + \alpha_{i2}y_2 + \alpha_{i3}y_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} e_1 &= 1\cdot y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ e_2 &= 0\cdot y_1 + \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3 \\ e_3 &= -1\cdot y_1 + \frac{5}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3 \end{aligned}$$

Obrazy bazických vektorů standardní báze $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\mathcal{A}(e_3)$ mají pak tvar

$$\mathcal{A}(e_i) = \alpha_{i1}\mathcal{A}(y_1) + \alpha_{i2}\mathcal{A}(y_2) + \alpha_{i3}\mathcal{A}(y_3) = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3$$

$$\begin{aligned} A(e_1) &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 2e_1 + 3e_2 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_1 - e_2 = \frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2 \\ A(e_2) &= \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{1}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{3}{4}e_2 \\ A(e_3) &= -x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = -2e_1 - e_2 + \frac{5}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = -\frac{7}{4}e_1 - \frac{5}{4}e_2. \end{aligned}$$

Matice zobrazení v standardních bazích e_1, e_2, e_3 a e_1, e_2 je

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Hledáme takové vektory $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pro které platí $\mathcal{A}(x) = \Theta$, tedy

$$\mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1\mathcal{A}(e_1) + \alpha_2\mathcal{A}(e_2) + \alpha_3\mathcal{A}(e_3) = \Theta$$

Po dosazení za vektory $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\mathcal{A}(e_3)$ získáme homogenní soustavu $Ax = \Theta$ s maticí A a jejím řešením získáme tvar jádra a jeho dimenzi.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \left[\left(\frac{4}{3}, -1, 1\right)\right]_\lambda, \quad d(\mathcal{A}) = 1.$$

Příklad: Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení definované předpisem $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1)$, kde $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Nalezněte jádro a defekt tohoto zobrazení.

Hledáme takové koeficienty $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, že platí $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = (0, 0)$, tedy

$$(\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1) = (0, 0).$$

Řešení této rovnosti vede na homogenní soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= 0, \end{aligned}$$

což je homogenní soustava $Ax = \Theta$, jejíž maticí je matice zobrazení ve standardních bázích

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

které sloupce ve tvaru $\mathcal{A}(e_1) = (1, -1)$, $\mathcal{A}(e_2) = (0, 1)$, $\mathcal{A}(e_3) = (-1, 0)$ získáme dosazením bazických vektorů e_1, e_2, e_3 do předpisu. Hledáme tedy řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

které má obecné řešení $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = u$, $\alpha_3 = u$ a každý vektor z jádra má tvar $x = (u, u, u) = u(1, 1, 1)$, $u \in \mathbb{R}$, z čehož plyne, že $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = [(1, 1, 1)]_\lambda$ a $\mathrm{d}(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 1$.

Definice: Nechť V a W jsou vektorové prostory a $\mathcal{A} : V \to W$ je lineární zobrazení. Definujeme obraz zobrazení $\mathcal{A}$ jako množinu

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{y \in W \,|\, \exists x \in V, \mathcal{A}(x) = y\}$$

Tvrzení: Obraz zobrazení $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ tvoří podprostor prostoru W.

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
&y_1 \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \exists x_1 \in V,\ \mathcal{A}(x_1) = y_1\\
&y_2 \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \exists x_2 \in V,\ \mathcal{A}(x_2) = y_2\\
&y_1 + y_2 = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) \;\Rightarrow y_1 + y_2 \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}\\
&\alpha y_1 = \alpha\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}(\alpha x_1) \;\Rightarrow \alpha y_1 \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

Definice: Hodnost lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ je definována jako $\dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ a značíme ji jako $h(\mathcal{A}) = \dim \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$.

Příklad: Jak nalézt obraz lineárního zobrazení? Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, pro které platí $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_2)$. Vyšetříme jak vypadá $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. Budeme se ptát, pro které hodnoty $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ existuje dvojice (α_1, α_2) taková, že $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Po dosazení do předpisu $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_2) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

získáme soustavu tří rovnic s parametrickým vektorem pravé strany

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 &= \beta_1\\
-\alpha_2 &= \beta_2\\
2\alpha_1 - 3\alpha_2 &= \beta_3
\end{aligned}
$$

a protože $\mathcal{A}(e_1) = (1, 0, 2)$, $\mathcal{A}(e_2) = (2, -1, -3)$ je matice výše uvedené soustavy tří rovnic o dvou neznámých α_1, α_2 maticí zobrazení $\mathcal{A}$ v standardních bázích e_1, e_2 a e_1, e_2, e_3

$$
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & \beta_1\\ 0 & -1 & \beta_2\\ 2 & -3 & \beta_3 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & \beta_1\\ 0 & -1 & \beta_2\\ 0 & -7 & \beta_3 - 2\beta_1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & \beta_1\\ 0 & -1 & \beta_2\\ 0 & 0 & \beta_3 - 2\beta_1 - 7\beta_2 \end{array}\right)
$$

Vektor $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ bude ležet v $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$, je-li tato soustava řešitelná. Tedy musí platit rovnice $\beta_3 - 2\beta_1 - 7\beta_2 = 0$, která má obecné řešení

$$
\begin{pmatrix} \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\\ v\\ 2u + 7v \end{pmatrix}.
$$

Prostor $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ má pak tvar $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = [(1, 0, 2), (0, 1, 7)]_\lambda$ a dimenzi 2. Tento prostor lze napsat i jiným způsobem, a to pomocí obrazů $\mathcal{A}(e_1)$ a $\mathcal{A}(e_2)$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{A} \;=\; [\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2)]_\lambda = [(1, 0, 2), (2, -1, -3)]_\lambda\,.$$

Z uvedeného vyplývá, že $h(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2$ a $d(\mathcal{A}) = 0$ (tedy $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \{(0,0)\}$).

Obecný postup: Je-li V prostor konečné dimenze, zvolíme v něm nějakou (nejlépe standardní) bázi, a nalezneme matici zobrazení $\mathcal{A}$ v této bázi prostoru V a v nějaké (nejlépe v standardní) bázi prostoru W. Hodnost zobrazení $\mathcal{A}$ zjistíme jako hodnost matice zobrazení (počet nenulových řádků matice po úpravě do horního stupňovitého tvaru) a defekt vypočteme jako dimenzi nulového prostoru matice zobrazení, tedy platí, že $d(\mathcal{A}) = \dim V - h(\mathcal{A})$.

Věta: Nechť V a W jsou prostory konečné dimenze a nechť $\mathcal{A} : V \to W$ je lineární zobrazení. Pak $d(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A}) = \dim V$.

Příklad: Lineární zobrazení $\mathcal{A}$ z prostoru $\mathbb{R}^4$ do prostoru $\mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\mathcal{A}(x) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 7\alpha_4, 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)$$

kde $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Vypočtěte matici zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem ke standardním bázím a najděte $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ a $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Dosazením do předpisu získáme obrazy $\mathcal{A}(e_1) = (1,1,2)$, $\mathcal{A}(e_2) = (2,2,4)$, $\mathcal{A}(e_3) = (2,4,3)$ a $\mathcal{A}(e_4) = (3,7,4)$. Matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem ke standardním bázím má tedy tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Obvyklým způsobem převedeme matici do horního stupňovitého tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ze kterého zjistíme obecné řešení $\mathcal{A}(x) = \Theta$ následujícího tvaru

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (-2v + u, v, -2u, u) = v(-2,1,0,0) + u(1,0,-2,1).$$

Jádro $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = [(-2,1,0,0), (1,0,-2,1)]_\lambda$ má dimenzi $d(\mathcal{A}) = 2$. Z předchozí věty dále vyplývá, že

$$h(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Obraz zobrazení Im$\mathcal{A}$ získáme znovu z matice v horním stupňovitém tvaru, ze které plyne, že

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3), \mathcal{A}(e_4)]_\lambda = [\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_3)]_\lambda = [(1,1,2),(2,4,3)]_\lambda$$

a pro dimenzi obrazu máme $h(\mathcal{A}) = 2$.

Příklad: (**Vektorový součin vektorů**) Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení indukované vektorovým součinem $\mathcal{A}(x) = a \times x = (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)$ a $a = (a_1, a_2, a_3)$. Zvolíme-li specielně $a = (4, 3, 12)$, pak je zobrazení $\mathcal{A}(x) = a \times x$ dáno předpisem

$$\mathcal{A}(x) = (3x_3 - 12x_2, 12x_1 - 4x_3, 4x_2 - 3x_1),$$

ze kterého plyne, že matice zobrazení v standardních bázích má tvar (obrazy vektorů standardní báze jsou postupně $\mathcal{A}(e_1) = (0, 12, -3)$, $\mathcal{A}(e_2) = (-12, 0, 4)$, $\mathcal{A}(e_3) = (3, -4, 0)$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 3 \\ 12 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

ze kterého je přímo vidět, že její hodnost musí být nejméně $h(\mathcal{A}) \geq 2$. Protože je $a \times a = 0$, musí být ale $d(\mathcal{A}) \geq 1$, a tedy platí

$$h(\mathcal{A}) = 2,\ d(\mathcal{A}) = 1.$$

Z vlastností vektorového součinu vyplývá, že $\forall x \in V,\ \langle a \times x, a \rangle = 0$, což lze ověřit následujícím výpočtem

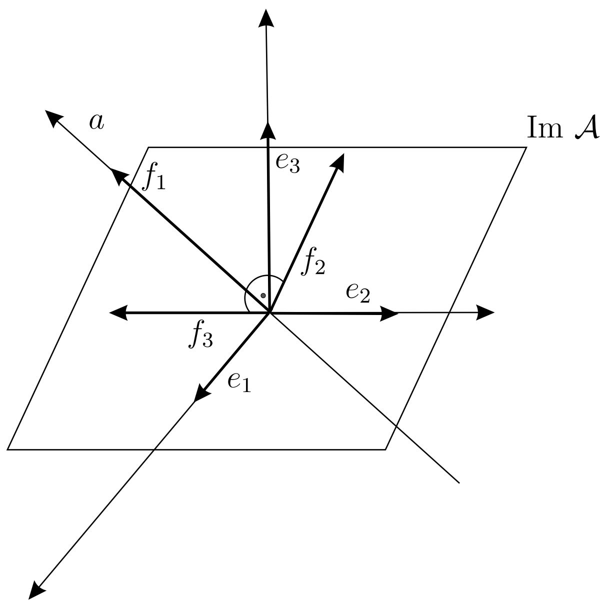
$$\begin{aligned} & a_1(a_2x_3 - a_3x_2) + a_2(a_3x_1 - a_1x_3) + a_3(a_1x_2 - a_2x_1) = \\ & = (a_2a_3 - a_3a_2)x_1 + (a_3a_1 - a_1a_3)x_2 + (a_1a_2 - a_2a_1)x_3 = \\ & = 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = 0. \end{aligned}$$

Množina Im $\mathcal{A}$ musí být tedy rovina procházející počátkem a kolmá na vektor a. Zvolíme novou bázi f_1, f_2, f_3 prostoru $\mathbb{R}^3$

$$f_1 = \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{13}(4, 3, 12), \quad \mathcal{A}(f_1) = 0,$$

f_2 volíme jako kolmý k vektoru a jako $f_2 = \frac{1}{5}(-3, 4, 0)$ a f_3 položíme $f_3 = f_1 \times f_2 = \frac{1}{65}(-48, -36, 25)$. Navíc platí $f_1 \times f_3 = -f_2$ a pro obrazy vektorů f_1, f_2, f_3 máme vztahy

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f_1) &= a \times f_1 = 0, \\ \mathcal{A}(f_2) &= a \times f_2 = \|a\| f_1 \times f_2 = 13 f_3, \\ \mathcal{A}(f_3) &= a \times f_3 = \|a\| f_1 \times f_3 = -13 f_3. \end{aligned}$$



Obrázek 4.9:

Matice zobrazení $\mathcal{A}$ v bázi f_1, f_2, f_3 má následující (jednodušší) tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

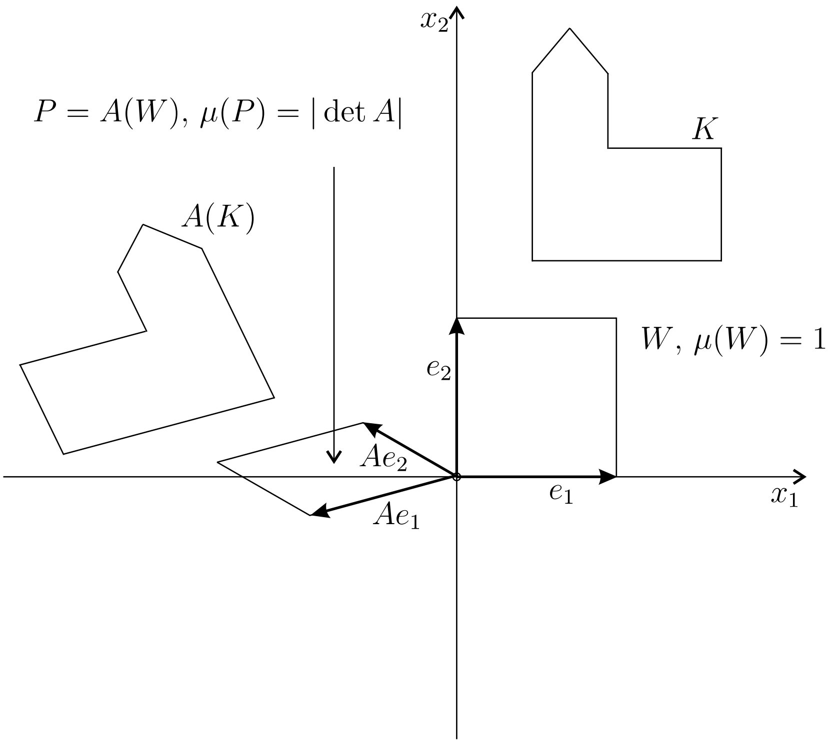
Příklad: Je-li A čtvercová matice řádu n a jsou-li její sloupce vektory $a_1, \ldots, a_n$, pak je $\det A = \pm\mu(P)$ až na znamínko roven objemu rovnoběžnostěnu P, který je daný popisem

$$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k a_k | \ 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, \ldots, n \right\}$$

Sloupce matice a_k lze interpretovat jako obrazy bazických vektorů standardní báze $a_k = Ae_k = \mathcal{A}(e_k)$. Pak $\det A$ lze též vyjádřit jako obraz n-rozměrné krychle

$$W = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ 0 \leq x_k \leq 1, k = 1, \ldots, n\}$$

a tedy platí $\mu(A(W)) = |\det A| \cdot \mu(W)$, kde $\mu(W) = 1$ je objem W a $\mu(A(W))$ objem $P = A(W)$. Podobně lze odvodit vztah pro objem obrazu libovolného tělesa K. Platí totiž, že $\mu(A(K)) = |\det A| \cdot \mu(K)$, kde $\mu(K)$ je objem daného tělesa a $\mu(A(K))$ objem jeho obrazu. Graficky lze tento případ znázornit následujícím způsobem.



Obrázek 4.10: