5

Vlastní čísla a vlastní vektory

Poznámka: Je-li $\mathcal{A}: V \to V$ lineární zobrazení z prostoru V do prostoru V (někdy se takové zobrazení nazývá lineárním operátorem), pak je přirozeným požadavkem najít takovou bázi prostoru V, že je matice zobrazení $\mathcal{A}$ v této bázi co nejjednodušší, např. má následující strukturu

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \boxed{A_3} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix},$$

kde A_k jsou čtvercové matice malého řádu (nejlépe 1 nebo 2) a ostatní prvky matice jsou nulové. Problém najít bázi, aby v ní matice zobrazení měla diagonální tvar (kde A_k jsou skaláry), vede k pojmu vlastní číslo a vlastní vektor matice.

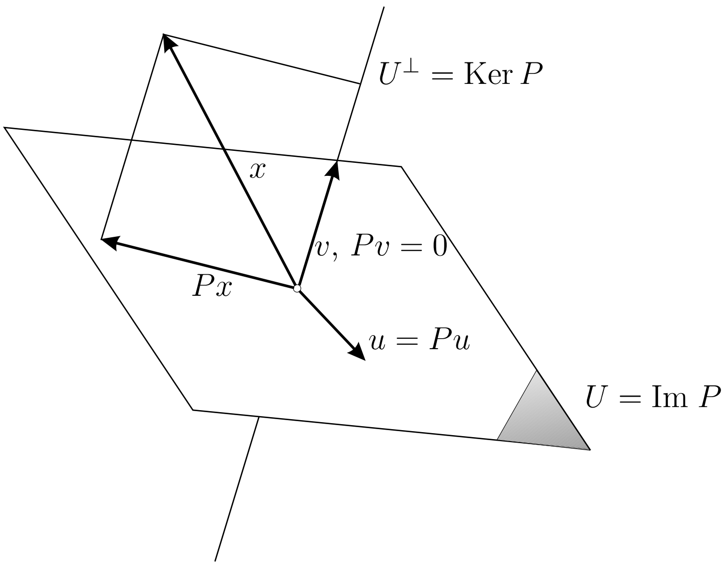
Definice: Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jestliže platí $Ax = \lambda x$ pro jisté komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a jistý nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \Theta$, potom číslo λ nazýváme vlastním číslem matice A a vektor x vlastním vektorem příslušným k tomuto vlastnímu číslu. Množinu všech vlastních čísel nazýváme spektrem matice A.

Poznámka: Všimněme si, že až dosud jsme uvažovali reálné matice. U vlastních čísel studium pouze reálných matic ztrácí smysl, protože i reálná matice může mít komplexní vlastní čísla. Proto uvažujeme obecně komplexní matice.

Poznámka: Podmínka existence nenulového vektoru $x \neq \Theta$ v definici vlastního čísla je nezbytná: kdybychom připustili i $x = \Theta$, potom by každé komplexní číslo bylo vlastním číslem a definice by ztratila smysl.

Poznámka: Odpovídá-li matice A matici nějakého zobrazení $\mathcal{A}$, pak každý nenulový vektor z jádra zobrazení Ker $\mathcal{A}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 0. Je-li Ker $\mathcal{A} = \{\Theta\}$ (je-li matice A regulární), pak 0 není vlastním číslem matice A.

Příklad: Je-li P je matice ortogonální projekce v prostoru $\mathbb{R}^3$ na nějaký podprostor U (U je tedy buď rovina nebo přímka procházející počátkem), pak pro každý vektor $u \in U$ platí $Pu = u$, všechny vektory z U (s vyjímkou nulového vektoru Θ) jsou vlastními vektory matice P příslušné vlastnímu číslu 1. Prostor $U^\perp$ je roven jádru projekce (nulovému prostoru matice P), a tedy každý vektor z ortogonálního doplňku U (s výjimkou Θ) je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu 0.



Obrázek 5.1:

Poznámka: Pro každý vlastní vektor čtvercové matice A platí $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, a tedy po složkách máme soustavu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $x_1, \dots, x_n$ jsou neznámé a λ parametr soustavy. Tato rovnice je ekvivalentní homogenní soustavě rovnic $(A - \lambda I)x = \Theta$ s parametrem λ

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Protože je tato soustava homogenní, mohou nastat dvě možnosti:

a) matice je regulární a má tedy pouze triviální řešení. V takovém případě neexistuje nenulový vektor $x \neq \Theta$ takový, že by platilo $Ax = \lambda x$; číslo λ není tedy vlastním číslem.

b) matice je singulární, a tedy její množina řešení obsahuje i nenulové vektory a její dimenze je nejméně 1. Číslo λ je tedy vlastním číslem matice a každý vektor z množiny řešení této homogenní soustavy je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ.

Hledáme-li vlastní čísla a vektory matice, musí být soustava s maticí $A - \lambda I$ singulární. Tento případ nastane právě když je nulový její determinant. Determinant matice

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

je polynom stupně n v proměnné λ, který nazýváme charakteristickým polynomem matice A. Je zřejmé, že vlastní čísla matice jsou jeho kořeny. Podle základní věty algebry má každý polynom n-tého stupně právě n (obecně komplexních kořenů), počítáme-li i jejich násobnosti. Platí tedy věta:

Tvrzení: Každá čtvercová matice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ má právě n vlastních čísel, počítáme-li každé vlastní číslo v jeho násobnosti (jakožto kořenu charakteristického polynomu).

Příklad: Reálná čtvercová matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ řádu 2×2 má charakteristický polynom tvaru

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - 1(-1) = \lambda^2 + 1$$

a jeho kořeny jsou čísla $\lambda_{1,2} = \pm i$ ($\lambda^2+1=0$). Tato reálná matice nemá tedy reálná vlastní čísla. Dosadíme-li za $\lambda = -i$ získáme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = -i$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že vlastní vektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ má také komplexní složky a platí

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Podobně postupujeme i pro vlastní číslo $\lambda_1 = i$ a vypočteme příslušný vlastní vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Příklad: Nechť $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A. Charakteristický polynom matice A je roven

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ 8 & -1-\lambda & 6 \\ -4 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 24 + 24 - 6(5-\lambda) \\ &- (-8)(-2-\lambda) - (-12)(-1-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

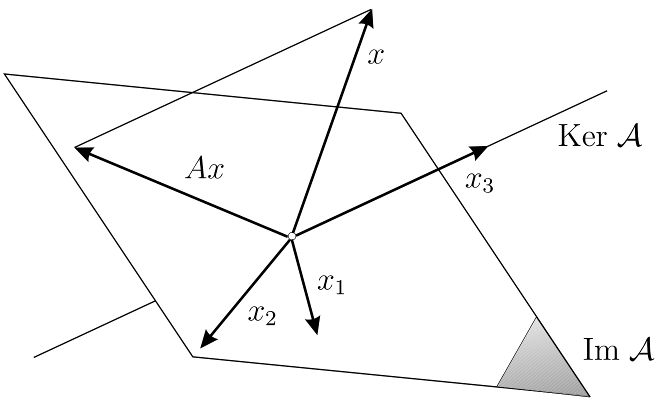
Řešením rovnice $\det(A-\lambda I) = 0$ hledáme kořeny charakteristického polynomu, které se postupně redukuje na řešení kubické rovnice $\lambda(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$, tedy $\lambda(\lambda-1)^2 = 0$, jejíž kořeny jsou jeden dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a jeden kořen $\lambda_3 = 0$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ získáme řešením soustavy $(A-\lambda_1 I)x = (A-\lambda_2 I)x = \Theta$, tedy

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ze které vyplývá, že každý vektor x, pro který je $Ax = x$, musí splňovat podmínku $x \in [(0,3,1),(1,4,0)]_\lambda$ a tedy lineárně nezávislými vlastními vektory jsou například $x_1 = (1,4,0)$ a $x_2 = (0,3,1)$. Podobně postupujeme i u vlastního čísla $\lambda_3 = 0$. Řešení rovnice $(A - \lambda_3 I)x = Ax = \Theta$ vede na hledání vektorů z nulového prostoru soustavy.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jedním z možných řešení je vektor $x_3 = (1, 2, -1)$. Indukuje-li matice A



Obrázek 5.2:

zobrazení $\mathcal{A}$ (tato matice je maticí lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ v standardních bázích), pak má matice zobrazení $\mathcal{A}$ v bázi x_1, x_2, x_3 diagonální tvar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Geometrická interpretace zobrazení $\mathcal{A}$ je, že se jedná o projekci na rovinu podél osy dané vektorem x_3.

Příklad: Určete vlastní čísla a příslušející vektory matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Postupujeme stejným způsobem, vypočteme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) \\ &+ 180 + 28(-4-\lambda) + 5(5-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) \end{aligned}$$

a nalezneme jeho kořeny $\lambda_1 = 1$, a protože je diskriminant $D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$ jsou další kořeny komplexně sdružené $\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ najdeme jako nenulové řešení homogenní soustavy $(A - \lambda_1 I)x = \Theta$

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -5 & 7 \\ 1 & -4-1 & 9 \\ -4 & 0 & 5-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

například $x_1 = (1, 2, 1)$. Řešením soustavy $(A - \lambda_2 I)x = \Theta$ získáme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2 + 3i$

$$\begin{pmatrix} 2-3i & -5 & 7 \\ 1 & -6-3i & 9 \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 0 & -24-12i & 39-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kterým může být vektor $x_2 = (3-3i, 5-3i, 4)$. Podobně vypočteme i vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2 - 3i$: $x_3 = (3 + 3i, 5 + 3i, 4)$.

Poznámka: Je-li λ_k násobný kořen charakteristického polynomu matice A, pak v obecném případě nemusí být násobnost vlastního čísla jako kořenu rovna počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných tomuto vlastnímu číslu. Pak matice A není diagonalizovatelná, tedy neexituje báze, ve které by měla matice zobrazení $\mathcal{A}$, které indukuje daná matice A, diagonální tvar.

Příklad: Matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ má charakteristický polynom tvaru $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$, a tedy číslo $\lambda = 0$ je vlastní číslo s násobností 2. Vlastní vektory matice, které přísluší tomuto vlastnímu číslu vypočteme ze soustavy $(A - \lambda I)x = \Theta$, tedy v našem případě řešením soustavy $Ax = \Theta$ ve tvaru

$$\begin{aligned} 0.x_1 + 0.x_2 &= 0, \\ 1.x_1 + 0.x_2 &= 0, \end{aligned}$$

které vede na $x_1 = 0$, $x = (x_1, x_2) \in [(0, 1)]_\lambda$, a tedy $\dim[(0, 1)]_\lambda = 1$ se nerovná násobnosti vlastního čísla $\lambda = 0$. Matice není tedy diagonalizovatelná, nelze nalézt bázi, ve které by měla matice diagonální tvar.

Symetrické matice a jejich vlastnosti

Definice: Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Matici $A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$, definovanou $(A^T)_{ji} = a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ nazýváme maticí transponovanou k matici A.

Poznámka: Slovně, j-tým řádkem matice A^T se stává j-tý sloupec matice A $(j = 1, \ldots, n)$ a i-tým sloupcem matice A^T se stává i-tý řádek matice A $(i = 1, \ldots, m)$.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

Definice: Matice A se nazývá symetrická, jestliže $A^T = A$.

Poznámka: Symetrická matice je tedy nutně čtvercová matice $(A \in \mathbb{R}^{n,n})$.

Poznámka: Ukázali jsme, že reálná matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ může mít obecně i komplexní vlastní čísla.

Tvrzení: Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ má všechna vlastní čísla reálná.

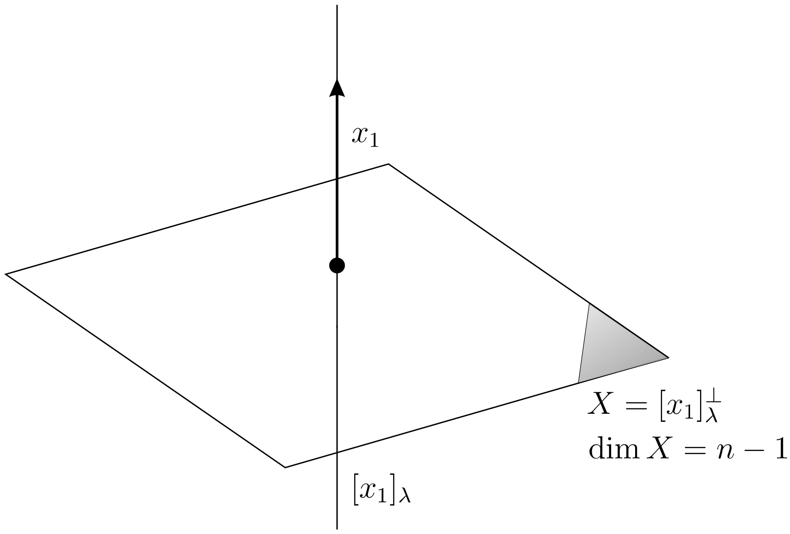
Tvrzení: Vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům každé reálné matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení: Vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou navzájem ortogonální (kolmé).

Příklad: Nechť $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $x_1 \neq \Theta$. Pak je ortogonální doplněk $X = [x_1]_\lambda^\perp$ invariantním podprostorem matice A, který splňuje podmínku $Ax \in X$ pro každé $x \in X$.

Příklad: Najděte charakteristický polynom, vlastní čísla a příslušné vlastní vektory symetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.3:

Postupujeme standardním způsobem: vypočteme charakteristický polynom

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 - 1 - (1-\lambda) - (-1-\lambda) - (1-\lambda) = \\
&= (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 3 + 3\lambda = \\
&= (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 3(1-\lambda) = \\
&= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 3] = \\
&= (1-\lambda)[-1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 - 3] = \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

a určíme jeho kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$ a příslušné vlastní vektory řešením homogenních soustav $(A - \lambda_i I)x = \Theta$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

získáme v tvaru $\tilde{x}_1 = (1, 1, 1)$, který splňuje $A\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1$,

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

řešením soustavy $(A-\lambda_2 I)x = \Theta$ je vektor $\tilde{x}_2 = (0, 1, -1)$ splňující $A\tilde{x}_2 = 2\tilde{x}_2$

$$\lambda_3 = -2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a řešením $(A - \lambda_3 I)x = \Theta$ získáme $\tilde{x}_3 = (-2, 1, 1)$, pro který platí $A\tilde{x}_3 = -2\tilde{x}_3$. Definujeme-li matici vlastních vektorů

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pak kromě identity vyplývající z definice vlastních vektorů

$$A\tilde{X} = \tilde{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

platí i vlastnost, že vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům jsou kolmé

$$\tilde{X}^T \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Když jednotlivé sloupce matice $\tilde{X}$ vynormujeme tak, aby měly výsledné vektory jednotkovou délku

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_2 &= \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ x_3 &= \frac{\tilde{x}_3}{\|\tilde{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pak pro matici $X = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ platí $X^T X = I$, tedy X je ortogonální matice (viz následující podkapitola). Základní vlastnost, že vektory x_1, x_2, x_3

vytváří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ je vidět z následujících rovností

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{pmatrix} (x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 & x_1^T x_3 \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 & x_2^T x_3 \\ x_3^T x_1 & x_3^T x_2 & x_3^T x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_1, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad: Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení se symetrickou maticí

$$A = \begin{bmatrix} -7/9 & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla matice najdeme jako kořeny charakteristického polynomu

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -7/9 - \lambda & 4/9 & 4/9 \\ 4/9 & -1/9 - \lambda & 8/9 \\ 4/9 & 8/9 & -1/9 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 . \end{aligned}$$

Protože je matice A symetrická, jsou tyto kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ reálná čísla. Vlastní vektor $x_1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ takový, že $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ je řešením homogenní soustavy

$$\begin{aligned} -16\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3 &= 0 \\ 4\beta_1 - 10\beta_2 + 8\beta_3 &= 0 \\ 4\beta_1 + 8\beta_2 - 10\beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

s hodností 2 a její řešení lze získat i přímo pomocí vektorového součinu jako

$$x_1 = \alpha_1(-16, 4, 4) \times (4, -10, 8) = \alpha_1(72, 144, 144).$$

Vektor $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ musí být totiž kolmý na vektory $(-16, 4, 4)$ a $(4, -10, 8)$. Koeficient α_1 zvolíme tak, aby byla norma vektoru x_1 rovna jedné, tedy $x_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$. Vlastní vektory příslušné dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ jsou řešeními homogenní soustavy

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3 &= 0 \\ 4\beta_1 + 8\beta_2 + 8\beta_3 &= 0 \\ 4\beta_1 + 8\beta_2 + 8\beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

s (garantovanou) hodností 1. Standardním postupem získáme soustavu v horním stupňovitém tvaru $\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 = 0$ s dvěma lineárně nezávislými řešeními $\tilde{x}_2 = (-2, 1, 0)$ a $\tilde{x}_3 = (-2, 0, 1)$. Tyto vektory lze normovat tak, aby jejich norma byla rovna jedné, tedy $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$. Protože obecně $\tilde{x}_3$ není kolmé na $\tilde{x}_2$ (a tedy není kolmé i na x_2), třetí vektor x_3 vypočteme pomocí Gram-Schmidtova orthogonalizačního procesu, kde $\tilde{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_3 - \alpha_2 x_2$, kde α_2 zvolíme tak, aby platilo že $\langle \tilde{\tilde{x}}_3, x_2 \rangle = 0$, tedy

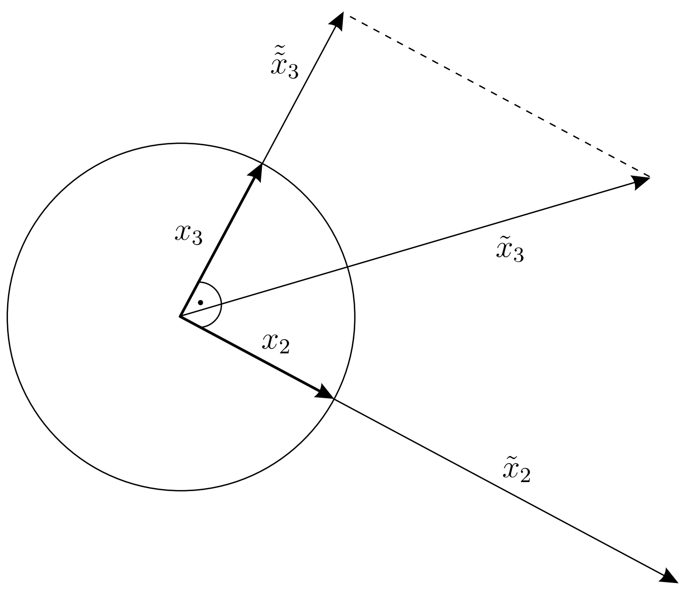
$$\langle \tilde{x}_3, x_2 \rangle - \alpha_2 \langle x_2, x_2 \rangle = 0\,.$$

Koeficient α_2 se rovná $\alpha_2 = \langle \tilde{x}_3, x_2 \rangle = 4/\sqrt{5}$ a vektor $\tilde{\tilde{x}}_3 = (-2, 0, 1) - \frac{4}{5}(-2, 1, 0) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right)$. Vektor x_3 pak vypočteme normováním vektoru $\tilde{\tilde{x}}_3$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{45}}(-2, -4, 5)$$

Vypočtené vektory x_1, x_2, x_3 jsou ortonormální bází, ve které má lineární zobrazení $\mathcal{A}$ diagonální tvar

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.4:

Ortogonální matice a jejich vlastnosti

Definice: Matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nazývá ortogonální, jestliže $A^T A = I$.

Tvrzení: 1. Každá ortogonální matice A je regulární a platí $A^{-1} = A^T$
2. Sloupce ortogonální matice A tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Je-li $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pak

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1 \ldots a_n) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & \ldots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & \ldots & a_2^T a_n \\ \vdots & & \\ a_n^T a_1 & \ldots & a_n^T a_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_2, a_n \rangle \\ \vdots & & \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

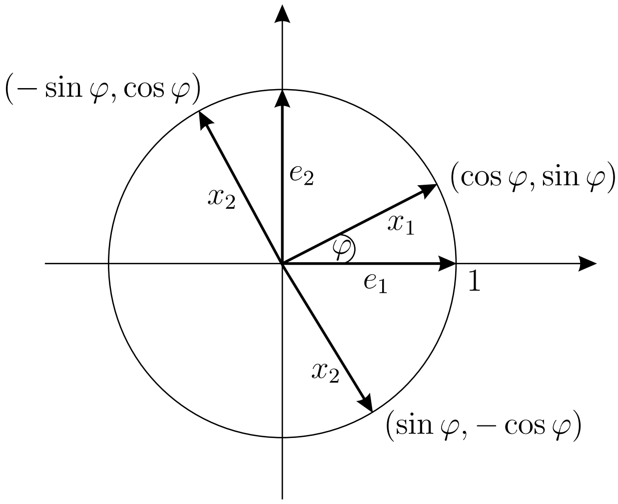
3. Podobně, řádky ortonormální matice tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Protože je $A^{-1} = A^T$, platí i vlastnost $AA^T = AA^{-1} = I$.

Tvrzení: Ortogonální matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ má všechna vlastní čísla ležící na jednotkové kružnici $|\lambda| = 1$.

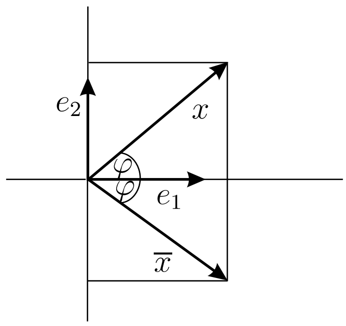
Příklad: (**Ortogonální matice řádu 2**) První vektor nejobecnější ortonormální báze x_1, x_2 v prostoru $\mathbb{R}^2$ je tvaru $x_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a druhý bazický vektor má nutně jeden ze dvou tvarů $\pm(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Odpovídající ortogonální matice jsou tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \in [0, 2\pi))$$

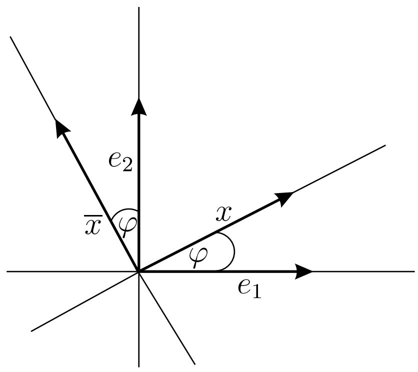
Poznámka: Matice tvaru $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ lze získat z matic $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ vynásobením maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Matice zobrazení $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ odpovídá zrcadlení vzhledem k ose dané vektorem e_1. Matice tvaru $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ odpovídá rotaci o úhel φ. Všechny ortogonální transformace v $\mathbb{R}^2$ lze tedy získat buď otočením o nějaký úhel φ a/nebo zrcadlením kolem osy e_1.



Obrázek 5.5:



Obrázek 5.6:



Obrázek 5.7:

Platí tedy transformační vztahy mezi souřadnicemi nejakého bodu v rovině (x_1, x_2) před otočením a/nebo zrcadlením a po otočení a/nebo zrcadlení

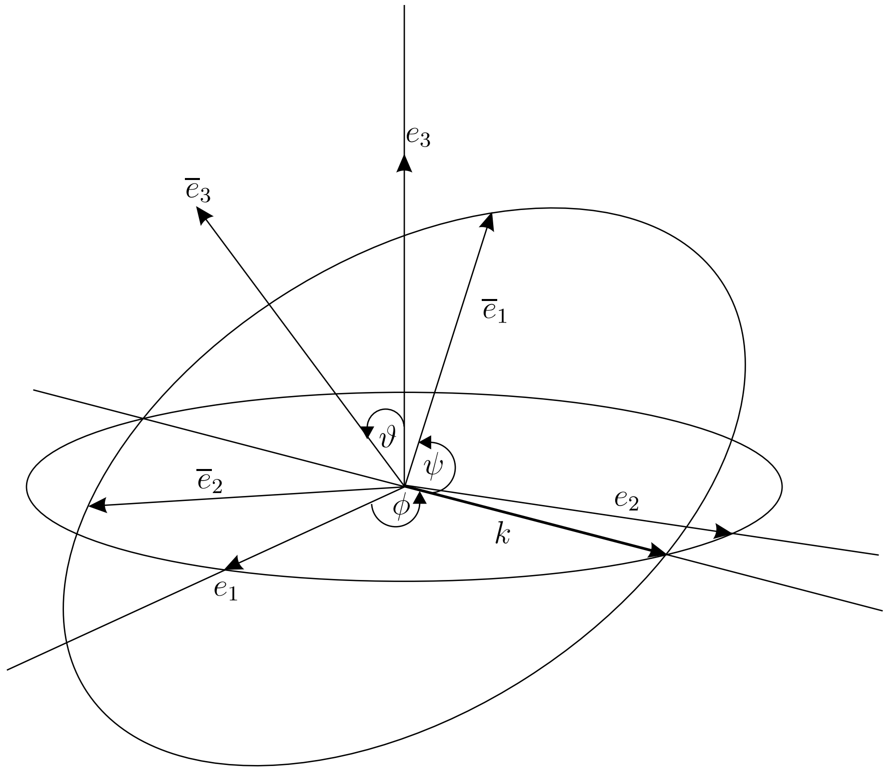
$(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

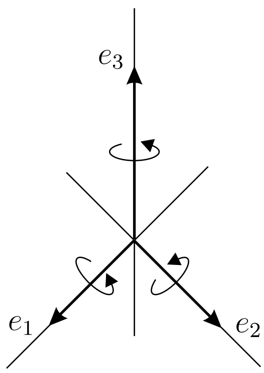
Příklad: Nejobecnější “kladně orientovanou” ortonormální bázi x_1, x_2, x_3 prostoru $\mathbb{R}^3$ lze získat následujícím způsobem: Nechť ϑ je úhel mezi vektory e_3 a x_3, pro který $0 < \vartheta < \pi$. Pak se roviny dané dvojicemi vektorů e_1, e_2 a x_1, x_2 protínají na přímce, ve které leží i vektor $k = \frac{e_3 \times x_3}{\sin\vartheta}$ s délkou 1 ležící na kružnici s poloměrem 1 v obou rovinách. Tedy existuje úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ takový, že $k = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$ a úhel $\psi \in [0, 2\pi)$ takový, že $k = \cos\psi\, x_1 - \sin\psi\, x_2$. Úhly φ, ϑ, ψ se nazývají Eulerovy úhly popisující transformaci souřadnic e_1, e_2, e_3 do nového systému daného vektory x_1, x_2, x_3, kterou lze rozdělit do třech kroků: a) rotace kolem vektoru e_3 o úhel φ; b) překlopení kolem vektoru k o úhel ϑ; c) rotace (otočení) kolem vektoru x_3 o úhel ψ. Transformační matici lze napsat tedy jako součin tří jednoduchých matic otočení

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Příklad: Matice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ popisuje pootočení roviny $x = 0$ kolem osy x o úhel φ (viděno pozorovatelem proti směru hodinových ručiček ve směru kladné osy). Podobně matice $\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ popisují rotace kolem osy y resp. osy z.



Obrázek 5.8:



Obrázek 5.9:

Kuželosečky a kvadratické plochy

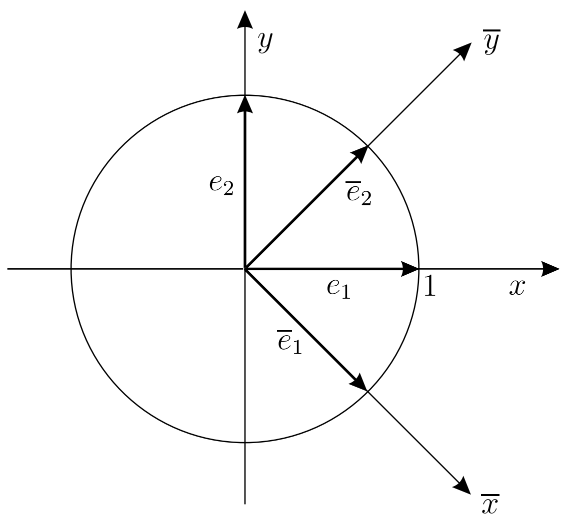
Příklad: Rovnice $5x^2+6xy+5y^2 = 8$ popisuje nějakou keželosečku v rovině a my máme vypočítat její typ a délky poloos. Zavedeme nový souřadný systém pomocí transformace souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{y} \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{y}\,, \end{aligned}$$

ve vektorovém zápisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

(jde tedy o pootočení o úhel $\pi/4$ ve směru hodinových ručiček). Po dosazení



Obrázek 5.10:

do rovnice získáme rovnici kuželosečky v nových souřadnicích $\overline{x}$ a $\overline{y}$

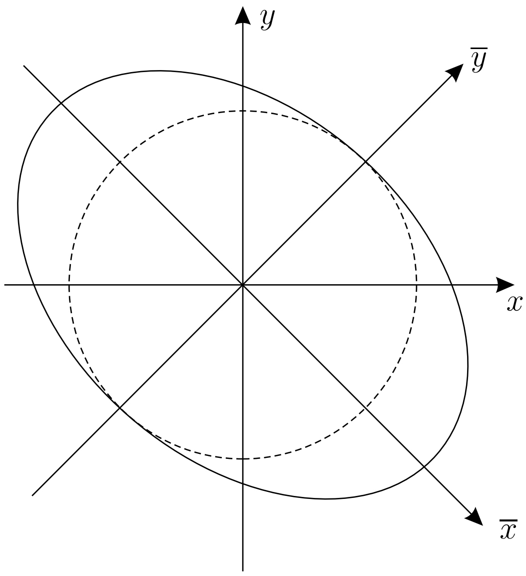
$$5 \cdot \frac{1}{2}(\overline{x}^2 + 2\overline{xy} + \overline{y}^2) + 6 \cdot \frac{1}{2}(-\overline{x}^2 + \overline{y}^2) + 5 \cdot \frac{1}{2}(\overline{x}^2 - 2\overline{xy} + \overline{y}^2) = 8,$$

$$4\overline{x}^2 + 16\overline{y}^2 = 16,$$

$$\frac{\overline{x}^2}{4} + \overline{y}^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy s délkami poloos $a = 2$, $b = 1$. Obecně převedeme-li rovnici do standardní formy

$$\frac{5}{8}x^2 + 2\frac{3}{8}xy + \frac{5}{8}y^2 = 1,$$



Obrázek 5.11:

pak ji lze psát pomocí symetrické matice jako výraz ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Nyní známým způsobem najdeme vlastní čísla a vektory matice $\begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5/8-\lambda & 3/8 \\ 3/8 & 5/8-\lambda \end{vmatrix} = (5/8-\lambda)^2 - \frac{9}{64} = \frac{16}{64} - \frac{10}{8}\lambda + \lambda^2 = $$
$$= \left(\lambda - \frac{8}{8}\right)\left(\lambda - \frac{2}{8}\right) = 0,$$

ze kterého vyplývá, že $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Vlastní čísla jsou kladná $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$, a současně $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a tedy se jedná o elipsu ve tvaru

$$\lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 = 1,$$

$$\overline{x}^2 + \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^2 = 1\,,$$

kde vztah mezi souřadnicemi $\overline{x}$, $\overline{y}$ a x, y získáme pomocí matice vlastních vektorů $(x_1,\, x_2)$ příslušných vlastním číslům $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} -3/8 & 3/8 \\ 3/8 & -3/8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

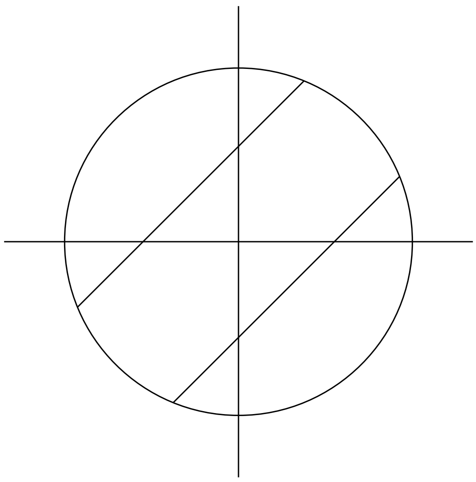
Kuželosečky: obecný postup Obecný tvar kuželosečky (elipsy, paraboly nebo hyperboly se středem symetrie v počátku souřadného systému) je

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 1.$$

Splňuje-li bod (x, y) tuto rovnici, pak i bod $(-x, -y)$ leží tedy na dané kuželosečce. Cílem je převést kuželosečku do tvaru

$$\overline{a}_{11}\overline{x}^2 + \overline{a}_{22}\overline{y}^2 = 1\,,$$

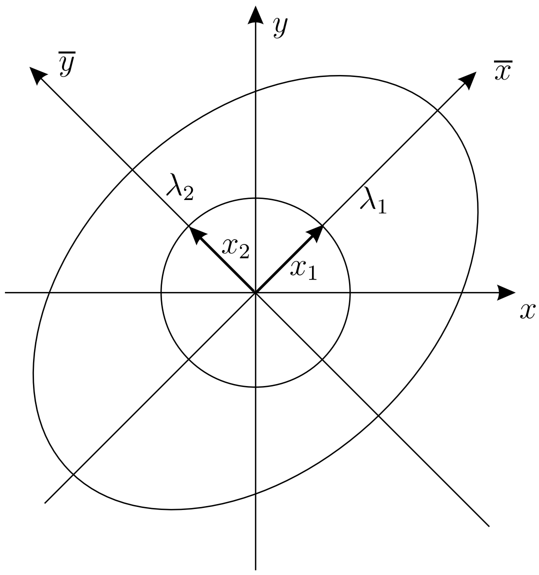
kde $\overline{x}$ a $\overline{y}$ jsou souřadnice bodu v souřadném systému daném hlavními poloosami nebo asymptotami kuželosečky. Jsou-li $\overline{a}_{11}$ a $\overline{a}_{22}$ kladná čísla, pak se jedná o elipsu, mají-li různá znamínka, jde o hyperbolu. Jednotlivé případy jsou znázorněny graficky na následujícím obrázku:



Obrázek 5.12:

Použijeme následující postup: definujeme symetrickou matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Rovnici $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 1$ lze pak přepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$



Obrázek 5.13:

. Protože je matice A symetrická, lze nalézt ortonormální bázi, ve které má tato matice diagonální tvar, tedy platí, že existují vektory x_1, x_2 tak, že $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ a $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. V maticovém tvaru $AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kde $X = (x_1, x_2)$ a současně platí $X^T X = I$. Pak po substituci $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ do rovnice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ získáme rovnici kuželosečky v nových souřadnicích $(\overline{x}, \overline{y})$ ve tvaru

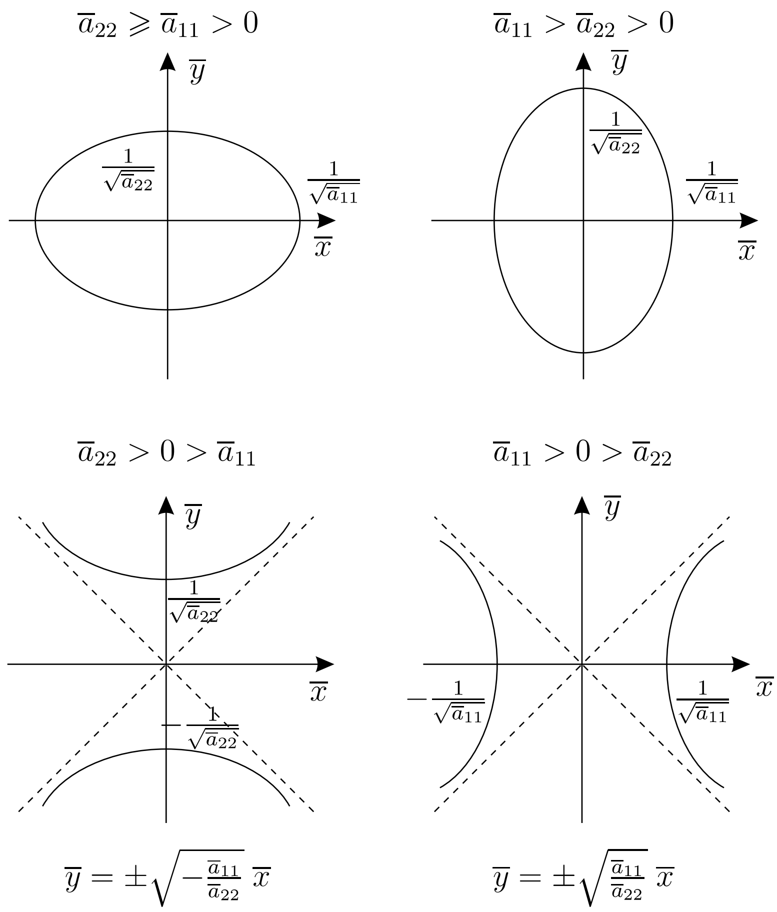
$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = 1,$$

tedy $\lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 = 1$. Vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A určují typ kuželosečky a příslušné vlastní vektory x_1, x_2 určují směr hlavních poloos (asymptoty) kuželosečky.

Kvadratické plochy (plochy 2. stupně) v prostoru: obecný postup
Rovnice s kvadratickými členy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 1$$

popisuje elipsoid, hyperboloid, paraboloid, válcovou plochu a jejich různé varianty. Z uvedené rovnice je zřejmé, že počátek je středem symetrie dané



Obrázek 5.14:

plochy, t.j. je-li bod (x, y, z) řešením dané rovnice, pak je řešením i bod $(-x, -y, -z)$. V maticovém zápisu má rovnice tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Řešení problému vlastních čísel symetrické matice A vede k reálným vlastním číslům λ_1, λ_2, λ_3 s ortonormálními vlastními vektory x_1, x_2, x_3. Zavedeme-li nové souřadnice pomocí transformace

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \quad X = (x_1, x_2, x_3)$$

získáme rovnici kvadratické plochy v standardním tvaru

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = 1\,,$$

tedy $\lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + \lambda_3\overline{z}^2 = 1$. Typ kvadratické plochy zjistíme, podle toho zda jsou všechna vlastní čísla kladná (pak rovnice popisuje elipsoid) nebo se liší znaménkem (pak jde o hyperboloid) nebo se jedná o některou jinou variantu kvadratické plochy.

Příklad: Nechť rovnice $2(x^2 - xy - xz + y^2 - xz) = 1$ popisuje nějakou kvadratickou plochu. O jaký typ kvadratické plochy jde a jaké jsou její hlavní osy?

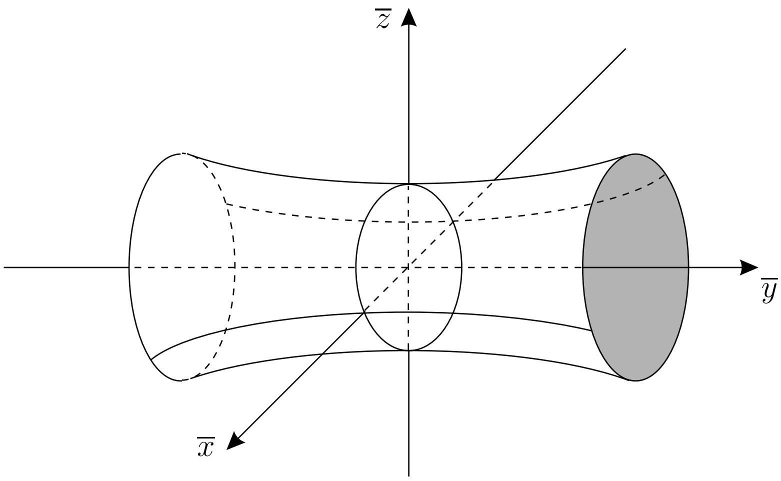
Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Transformace do nových souřadnic vede na rovnici kvadratické plochy v standardní formě

$$2\overline{x}^2 - \overline{y}^2 + 3\overline{z}^2 = 1.$$

Jedná se tedy o rotační hyperboloid, jehož průnik s rovinou $\overline{x}, \overline{y}$ je hyperbola protínající osu $\overline{x}$. Průnik hyperboloidu s rovinou $\overline{x}, \overline{z}$ je elipsa s větší poloosou na ose $\overline{x}$ a průnik s rovinou $(\overline{y}, \overline{z})$ je opět hyperbola protínající osu $\overline{y}$.



Obrázek 5.15: