Pravděpodobnost a popisná statistika

Helena Durnová

22. dubna 2016

Obsah

Úvodní poznámky

Toto je pracovní verze studijního textu pro předmět *Pravděpodobnost a popisná statistika* pro studenty matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. Obtížnější příklady jsou označeny hvězdičkou (*). Připomínky vítám. Pište, prosím, na adresu hdurnova@ped.muni.cz

1 Z historie pravděpodobnosti

Od poloviny 17. do poloviny 19. století

- korespondence Blaise Pascal (1623-1662) a Pierre Fermat (1601 nebo 1607/8 – 1665) v r. 1654
- Christian Huygens (1629-1695): *De ratiociniis in ludo aleae* (1657)

- pozorování demografického vývoje — vedoucí k pojistné matematice — 17. století (Anglie, Nizozemí)
- Jakob Bernoulli, *Ars conjectandi* (1713), napsána v 80. letech 17. století
- Abraham de Moivre (1667–1754): pronikání metod diferenciálního a integrálního počtu do teorie pravděpodobnosti
- Karl Friedrich Gauss (1777–1855): uplatňoval teorii pravděpodobnosti při zpracování výsledků astronomických a geoetických pozorování
- Thomas Bayes (1701/1702–1761): Bayesova věta (podmíněná pravděpodobnost)
- George Louis Leclerc Buffon (1707-1788): úloha o jehle
- Pierre Simon Laplace (1749–1827): *Théorie analytique des probabilités* (1812)
- Siméon Denis Poisson (1781–1840): *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités* (1837)

Konec 19. století

- teorie markovských řetězců
- matematická statistika: Karl Pearson (1857–1936), Francis Galton (1822–1911)
- statistická fyzika: Ludwig Boltzmann (1844–1906), James Clerk Maxwell (1831–1879)

(Podrobněji viz např. *Mačák*)

2 Náhodné jevy

Motivační úloha Jaká je pravděpodobnost toho, že při současném hodu dvěma kostkami padne součet 10? (Jinými slovy: padnou dvě čísla, jejichž součet je 10.)

Možné součty: $10 = 6 + 4 = 5 + 5$

Jaká je pravděpodobnost toho, že při současném hodu dvěma kostkami padne součet 9?

Možné součty: $9 = 6 + 3 = 5 + 4$

Možných rozkladů čísel 9 a 10 je stejně, přesto součet 9 padá častěji než součet 10. Proč? Součty 9 a 10 musí padat stejně často, máme-li dvě kostky jedné barvy, nebo máme-li kostky dvou různých barev.Z kombinatorického hlediska se tedy musí jednat o počet kompozic čísla 9, popř. 10, ze dvou sčítanců menších nebo rovných 6, nikoliv o počet rozkladů. Pro obě čísla existují dva takové rozklady, ale počty možných kompozic se liší. Nezáleží-li na pořadí sčítanců, máme v obou případech dvě možnosti, avšak pokud na pořadí záleží,máme tři možnosti v případě součtu 10 a čtyři v případě součtu 9:

$10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6$

$9 = 6 + 3 = 5 + 4 = 4 + 5 = 3 + 6$

Při výpočtu pravděpodobnosti bereme v úvahu celkový počet kompozic ze dvou sčítanců hodnoty 1 až 6; těch je 36.

Vyzkoušejte sami: Házejte dvěma kostkami a počítejte, kolikrát vám padly jednotlivé součty. Výsledky zapište do tabulky:

součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
počet											

Náhodný pokus

Definice 1 Neprázdnou množinu všech možných výsledků náhodného pokusu nazýváme *základní prostor* a označujeme Ω.

Prvky množiny Ω označujeme ω_t, kde $t \in T$ je vhodný index.

Definice 2 Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru Ω, který

a) obsahuje základní prostor;

b) s každými dvěma podmnožinami obsahuje i jejich rozdíl; a

c) s každým konečným [spočetným] systémem množin obsahuje i jejich sjednocení

nazýváme *jevové pole.*

Jevové pole pro náhodný pokus „házení kostkou“:

Možné výsledky: 1, 2, 3, 4, 5, 6; tj. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (jednotlivá čísla označují skutečnost, že padlo dané číslo)

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ — triviální jevové pole

[Kontrolní otázka: musí být prázdná množina prvkem $\mathcal{A}$?]

$\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}\}$

$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$
$\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$
Náhodný jev: libovolný prvek jevového pole (množina).
[Úkol: Popište vlastními slovy některé náhodné jevy podle $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.]

Označení: *Jev jistý:* Ω
Jev nemožný: $\emptyset$
Jev elementární: ω_i pro $\omega_i \in \Omega$
Společné nastoupení jevů A a B: $A \cap B$
Nastoupení alespoň jednoho z jevů A, B: $A \cup B$
Jev opačný k jevu A: $\overline{A_i} = \Omega \setminus A_i$
Je zřejmé, že jev nemožný a jev jistý jsou navzájem jevy opačné.

Definice 3 Pravděpodobností *rozumíme funkci* $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *(z množiny všech jevů do množiny reálných čísel), která je*

a) nezáporná [pravděpodobnost nemůže nabývat záporných hodnot];

b) spočetně aditivní [pravděpodobnosti sčítáme]; a

c) normovaná [pravděpodobnost jevu jistého je rovna 1].

Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *(tj. základní prostor, jevové pole, pravděpodobnostní funkce) nazýváme* pravděpodobnostní prostor.

Zřejmě $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (součet pravděpodobností daného jevu a jevu k němu opačného je rovna 1, neboť jejich sjednocení je Ω - jev jistý).

3 Klasická pravděpodobnost

Klasická definice pravděpodobnosti považuje všechny elementární jevy za stejně možné. Pravděpodobnost toho, že nastane jev A, pak vypočteme podle vzorce

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

(A je množina počet příznivých jevů, Ω množina všech možných jevů). Vzorec lze použít pro takové situace, kdy dokážeme vypsat všechny případy, které mohou nastat; např. hra v kostky, hody mincí, výběry kared, výběry kuliček z klobouků a další.

Geometrická pravděpodobnost je speciálním případem klasické pravděpodobnosti. Název vychází z toho, že některé úlohy lze snáze řešit pomocí výpočtu obsahu nějakého útvaru (popř. objemu).

Vzorec pro výpočet geometrické pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(E)}$$

Podle tohoto vzorce postupujeme v případě, že např. daný okamžik může nastat v libovolnou chvíli se stejnou pravděpodobností (čekání na kamaráda). Načrtneme si obrázek tak, aby odpovídal situaci. Každý bod útvaru představuje jev, který mohl nastat, a to pro všechny možné jevy. V tomto útvaru pak ohraničíme množinu (měřitelnou) všech příznivých jevů. Známá je např. Buffonova úloha o jehle.

Pravděpodobnosti (funkční hodnoty pro jednotlivé jevy) můžeme sčítat, počítáme-li pravděpodobnost sjednocení dvou disjunktních jevů. Abychom mohli použít vzorce, je dobré si jednotlivé jevy symbolicky zapsat (jevy jsou množiny, můžeme je tedy sjednocovat, hledat jejich průnik, rozdíl atd.)

Sčítání pravděpodobností Vyjdeme-li z klasické definice pravděpodobnosti, zřejmě lze pravděpodobnost jevu A spočítat jako součet pravděpodobnosti toho, že nastane jev A a přitom nastane jev B a pravděpodobnosti toho, že nastane A a přitom nenastane B, tj.:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

kde $\overline{B}$ je doplněk jevu B. Tedy

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Dále zřejmě pravděpodobnost toho, že nastane alespoň jeden z obou jevů lze vypočítat analogicky jako počet prvků sjednocení dvou množin, tedy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pro pravděpodobnost sjednocení více jevů použijeme tzv. princip inkluze a exkluze, známý z kombinatoriky.

Vzhledem k tomu, že jsme si výše ukázali, jak vyjádřit jevy pomocí množinové symboliky, můžeme vyslovit následující věty:

Věta 4 (Věta o sčítání pravděpodobností pro dva jevy) Nechť $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ jsou dva libovolné jevy. Pak platí:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Věta 5 (Věta o sčítání pravděpodobností (zobecnění pro n jevů)) : Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou libovolné jevy. Pak platí:

$$P(\bigcup_{i\in I}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

4 Podmíněná pravděpodobnost

Úplná pravděpodobnost. Někdy lze pravděpodobnost lépe vypočítat, pokud si jediný náhodný jev rozdělíme do několika skupin.

Příklad 6 *Máme dva klobouky, v prvním i ve druhém je 5 kuliček černých a 5 bílých. Z prvního klobouku vyndáme kuličku (nepodíváme se na ni) a dáme ji do druhého. Z druhého klobouku vyndáme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá?*

Ptáme se nejprve, co se mohlo stát, pokud kulička vytažená ze 2. klobouku byla bílá. Můžeme vyslovit dvě hypotézy: H_C (z prvního do druhého klobouku jsme přendali černou kuličku) a H_b (z prvního do druhého klobouku jsme přendali bílou kuličku.

Je vhodné si situaci rozložit na dvě disjuktní množiny: přenám-li černou kuličku, bude pravděpodobnost, že ze druhého klobouku vytáhnu bílou, rovna $\frac{5}{11}$; přendám-li bílou, bude tato pravděpodobnost rovna $\frac{6}{11}$. Každý z obou případů může nastat se stejnou pravděpodobností, neboť bílých a černých kuliček je v prvním klobouku stejně. Dohromady tedy je pravděpodobnost toho, že vytáhnu blou kuličku, rovna

$$P(B) = \frac{5}{10}\frac{5}{11} + \frac{5}{10}\frac{6}{11}.$$

Analogicky pak postupujeme, když si situaci rozložíme na n disjunktních podmnožin, tedy:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

První Bayesova věta odpovídá na otázku, jaká je pravděpodobnost, že nastal jev H_i, víme-li, že nastal jev A:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

(Známe celkovou pravděpodobnost jevu A, vypočtenou podle vzorce pro úplnou pravděpodobnost, a chceme znát pravděpodobnost, že nastala jedna z hypotéz, nastal-li jev A.)

Druhá Bayesova věta odpovídá na otázku, jaká je pravděpodobnost, že nastal jev H, víme-li, že nastal jev A:

$$P(B|A) = \frac{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)P(B|A \cap H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

(V tomto vzorci nás navenek nezajímají pravděpodobnosti jednotlivých hypotéz, počítáme pouze pravděpodobnost jevu B za podmínky, že nastal jev A. Hypotézy vstupují do hry pouze za účelem usměrnění našeho uvažování.)

5 Nezávislé jevy

Z klasické definice pravděpodobnosti víme, že

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$$

Problém: jak určit $|A \cap B|$, pokud nechci vypisovat všechny možnosti??

Ze vzorce pro klasickou pravděpodobnost při našem běžném označení plyne, že

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

odkud jednoduchou úpravou dostáváme

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

a analogicky

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

(Tyto vztahy platí vždy - je to tzv. věta o násobení pravděpodobností.)

Pro pravděpodobnost průniku 3 a více jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pak platí:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Uvědomíme si nyní, jak definujeme nezávislé jevy slovně: říkáme, že pravděpodobnost jevu A nezávisí na jevu B a naopak; tedy pravděpodobnost, že nastane jev A je táž jako pravděpodobnost toho, že nastane jev A, nastal-li jev B (a naopak). Vyjádříme-li toto tvrzení formálně, dostáváme definici:

Definice 7 (Nezávislé jevy) *Říkáme, že jev A nezávisí na jevu B, pokud platí $P(A|B) = P(A)$ (a pak tedy také $P(B|A) = P(B)$).*

Zřejmě potom platí, že $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Nechť je dán základní prostor Ω, jev A a jev B. Pravděpodobnost toho, že za podmínky B nastal jev A, vypočteme takto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Např. $\Omega\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - výsledky hodu kostkou
jev $A = \{3, 4, 5, 6\}$ - padne číslo větší než 2
jev $B = \{1, 6\}$ - padne 1 nebo 6

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

6 Zajímavé úlohy

Rytíř de Méré byl hazardní hráč, který své domněnky sděloval Pascalovi nebo Fermatovi (OVĚŘ). Některé z domněnek byly správné, jiné nesprávné.

Úloha rytíře de Méré č. 1 (o házení třemi kostkami): Házíme-li třemi kostkami současně, je pravděpodobnost, že součet ok na všech kostkách bude 11 stejná jako pravděpodobnost toho, že součet ok na všech kostkách bude 12. Praxe hazardního hráče to však nepotvrzuje.

Neboli: co je špatně na této úvaze? Součet 12 dostaneme ze tří sčítanců od 1 do 6 šesti způsoby: 6+5+1; 6+4+2; 6+3+3; 5+5+2; 5+4+3; 4+4+4; analogicky součet 11 dostaneme ze tří sčítanců od 1 do 6 také šesti způsoby: 6+4+1; 6+3+2; 5+5+1; 5+4+2; 5+4+2; 4+4+3.

Řešení: součet 6+3+2 padá šestkrát častěji než součet 4+4+4, součet 5+5+1 padá třikrát častěji než součet 4+4+4. (Ověřte si prakticky.)

Úloha rytíře de Méré č. 2 (o házení jednou kostkou): Chceme-li hodit aspoň jednu šestku při opakovaném házení kostkou, máme nadpoloviční pravděpodobnost počínaje čtyřmi hody. Je to pravda?

Řešení: při jednom hodu je pravděpodobnost, že padne šestka, rovna $frac16$. Analogicky pro více hodů - šestka padne nejpozději:

- druhým hodem: $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$
- třetím hodem: $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{91}{216}$
- čtvrtým hodem: $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$

Buffonova úloha o jehle: Rovina je rozdělena stejně od sebe vzdálenými rovnoběžkami. Hodíme na ni jehlu menší než je vzdálenost rovnoběžek. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku, jestliže každou polohu jehly považujeme za stejně nadějnou? [$2l/\pi d$, kde l je délka jehly a d vzdálenost rovnoběžek]

7 Popisná statistika

Kdy nestačí klasická definice pravděpodobnosti?

- geometrická pravděpodobnost je jen model klasické pravděpodobnosti

- podstatné pro klasickou pravděpodobnost je toto: nastoupení lib. jevu má stejnou možnost, tj. žádný jev nemá přednost před ostatními

Jinými slovy, klasickou definici pravděpodobnosti můžeme použít, pokud předem dokážeme popsat všechny možnosti, které mohou nastat, a s jakou pravděpodobností (můžeme pravděpodobnost určit *a priori*). V takovém případě můžeme také vždy odhadnout pravděpodobnost na základě opakování náhodného pokusu: házíme-li kostkou delší dobu, všechna čísla budou padat *přibližně* stejně často.

Statistická definice pravděpodobnosti - nazývaná také frekvenční či empirická (určená na základě pozorování - *a posteriori*).

Opakujeme-li n-krát nezávisle daný pokus a nastane-li v těchto pokusech sledovaný jev A m-krát, potom jeho relativní četnost je rovna zlomku m/n. Bude-li při rostoucím počtu pokusů relativní četnost kolísat ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme předpokládat, že toto číslo je pravděpodobností jevu A.

- absolutní četnost

- relativní četnost

Náhodná veličina nám dovoluje zavést funkce a posléze popisovat náhodné děje pomocí těchto funkcí. Může být diskrétní (počet šestek při hodu šesti kostakmi; počet líců při určitém počtu hodu mincí) nebo spojitá (výška postavy náhodně vybraného člověka, ...). Lze také říci, že to je funkce, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

Distribuční funkce

- neklesající
- zprava spojitá
- $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$
- $0 \leq \Phi(x) \leq 1$

- pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí: $P(X = x) = \Phi(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} \Phi(x)$
- pro $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ platí $P(a < X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Diskrétní náhodná veličina

- pravděpodobnostní funkce $\pi(x)$
  - nezáporná
  - normovaná, tj. $\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(x) = 1$
- distribuční funkce: $\Phi(x) = \sum_{t=-\infty}^{x} \pi(t)$

Spojitá náhodná veličina

- hustota pravděpodobnosti $\varphi(x)$
  - nezáporná
  - normovaná, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) = 1$
- distribuční funkce $\Phi(x) = \int_{t=-\infty}^{x} \varphi(t) dt$

Základní a výběrový soubor

- základní soubor E (neprázdná množina)
- podmnožina základního souboru G - prvky s danou vlastností
- výběrový soubor (neprázdná podmnožina výběrového souboru)
- rozsah výběrového souboru n
- absolutní četnost G ve výběrovém souboru $N(G)$
- relativní četnost G ve výběrovém souboru $p(G) = \frac{N(G)}{n}$

Vlastnosti relativní četnosti

- $p(\emptyset) = 0$
- $0 \leq p(G) \leq 1$
- $p(E) = 1$
- $p(G) \leq 1$
- $p(G) + p(\overline{G}) = 1$
- $p(G_1 \cup G_2) + (G_1 \cap G_2) = p(G_1) + p(G_2)$

- $1 + (G_1 \cap G_2) \geq p(G_1) + p(G_2)$
- $p(G_1 \cup G_2) + 0 \leq p(G_1) + p(G_2)$
- $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow p(G_2 \setminus G_2) = p(G_2) - p(G_1)$
- $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow p(G_1) \leq p(G_2)$

Podmíněná relativní četnost podobně jako podmíněná pravděpodobnost (klasická definice pravděpodobnosti)

$$p(G_1|G_2) = \frac{N(G_1 \cap G_2)}{N(G_2)}$$

Četnostně nezávislé podmnožiny G_1, G_2 Říkáme, že G_1 a G_2 jsou četnostně nezávislé, platí-li

$$p(G_1 \cap G_2) = p(G_1)p(G_2)$$

Nominální znaky - hodnoty znaku představují jen číselné kódy kvalitativních pojmenování (např. čísla tramvají)

Ordinální znaky - uspořádání znaků má smysl (např. známky ve škole)

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_c \leq x_\vartheta \leq x_{c+1} \leq \ldots \leq x_n$$

Intervalové znaky - připouštějí uspořádání a navíc operaci rozdílu (např. teplota)

Poměrové znaky
- připouštějí uspořádání, operaci rozdílu a navíc i operaci podílu

Alternativní znaky
- nabývají pouze dvou hodnot (úspěch-neúspěch, žena-muž)

Charakteristiky znaků:

- modus: nejčetnější hodnota (pro nominální znaky)
- dolní kvartil
- medián
- horní kvartil
- percentily
- kvartilová odchylka

Charakteristiky polohy

- aritmetický průměr

Charakteristiky variability

- průměrná odchylka
- rozptyl
- směrodatná odchylka

Literatura

1. Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký: *Popisná statistika.* PřF MU Brno 1998.
2. Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Sbírka příkladů.* PřF MU Brno 1996.
3. Jaroslav Hátle, Jana Kahounová: *Úvod do teorie pravděpodobnosti.* Praha: SNTL, 1987.
4. Karel Mačák: *Počátky teorie pravděpodobnosti.* Praha: Prometheus, 1997.

8 Příklady k procvičení (z písemek z minulých let

(*) Máme 3 klobouky, v každém 5 bílých a 8 černých kuliček. z prvního klobouku náhodně vybereme kuličku, vložíme do druhého, zamícháme, náhodně vytáhneme kuličku z druhého klobouku, vložíme do třetího, zamícháme a ze třetího klobouku náhodně vytáhneme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá?

(*) Tři střelci střílí do terče. Pravděpodobnost zásahu prvního střelce je 0,8, druhého 0,5, třetího 0,6. Každý vystřelil jednou a v terči jsou dva zásahy. Jaká je pravděpodobnost, že se netrefil první?

(*) z lístků označených čísly 2 až 100 náhodně vybereme lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na lístku bude prvočíslo?

(*) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami je součet ok dělitelný pěti? Je-li součet ok dělitelný pěti, jaká je pravděpodobnost, že nepadly tři pětky?

(*) Dva hráči házejí střídavě kostkou. Vyhrává ten, komu padne dřív liché číslo. Určete pravděpodobnosti výher obou hráčů.

(*) Při hodu třemi kostkami padl součet ok dělitelný třemi. Jaká je pravděpodobnost, že padla tři stejná čísla?

(*) z klobouku, který obsahuje 6 bílých a 6 černých koulí, náhodně vytáhneme kouli a nevrátíme ji zpět. Víme, že je bílá. náhodně vytáhneme ještě jednu kouli. jaká je pravděpodobnost, že je druhá vytažená koule černá?

(*) Zasadíme 5 semínek rajčat. Pravděpodobnost, že jednotlivá semínka vyklíčí, je pro všechna semínka stejná a je rovna 0,6. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedno semínko vyklíčí?

(*) Střelec střílí do terče, dokud se alespoň jednou netrefí. Pravděpodobnost, že se trefí, je při každém pokusu 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že mu bude stačit 10 nábojů?

(*) Na úsečce dlouhé 20 cm zvolíme náhodně dva (vnitřní) body, které rozdělí úsečku na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že prostřední díl je nejméně 5 a nejvíce 10 cm dlouhý?

(*) Na úsečce dlouhé 15 cm zvolíme náhodně dva (vnitřní) body, které rozdělí úsečku na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že prostřední díl je nejméně 3 a nejvíce 5 cm dlouhý?

(*) Na úsečce dlouhé 10 cm zvolíme náhodně dva (vnitřní) body, které rozdělí úsečku na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že prostřední díl je nejméně 2 a nejvíce 3 cm dlouhý?

(*) Házíme pětkrát falešnou kostkou. Pravděpodobnost, že padne 6, je v každém hodu stejná. Víme, že pravděpodobnost, že 6 padne aspoň jednou, je rovna 0,9. Jaká je pravděpodobnost toho, že v jednotlivém hodu padne 6?

(*) Dva hráči hrají tuto hru: jeden si myslí číslo od 11 do 20 (včetně), druhý hádá. Jaká je pravděpodobnost, že druhý uhodne, co si první myslí, na (a) první, (b) čtvrtý, (c) desátý pokus?

(*) Máme balíček 32 karet (osm hodnot: A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7 a čtyři barvy: herce, káry, piky, kříže). Nechť A označuje jev "tažený karta je král (K)"a jev B "tažená karta je kříže". Rozhodněte, zda jsou jevy A a B nezávislé.

(*) Máme dva druhy jabloní. Plody jednoho druhu mají s pravděpodobností 0,8 průměr větší než 5cm, plody druhého druhu s pravděpodobností 0,2. Máme 500 kusů jablek od každého druhu. Náhodně vybereme jablko. Jeho průměr je větší než 5cm. Jaká je pravděpodobnost, že se jedná o jablko první odrůdy?

(*) z urny, která obsahuje 6 bílých a 6 černých koulí, náhodně vytáhneme kouli a nevrátíme ji zpět. Víme, že je bílá. náhodně vytáhneme ještě jednu kouli. jaká je pravděpodobnost, že je druhá vytažená koule černá?

(*) Dva kamarádi hrají hru s kartami: první vyhraje, když bude mít mezi 8 kartami alespoň 4 karty stejné barvy, zatímco druhý vyhraje, když bude mít mezi 4 kartami 2 karty stejné hodnoty. Který z kamarádů má větší šanci vyhrát?

(*) Dva kamarádi si domluvili, že se sejdou mezi 14. a 15. hodinou a že každý z nich bude čekat na druhého 15 minut a pak odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?

(*) Na výměnnou stáž přijelo 30 studentů, 10 z Francie, 10 z Německa a 10 z Anglie. Mezi Francouzi bylo 8 dívek a 2 hoši, mezi Němci 4 dívky a 6 hochů a mezi Angličany 7 dívek a 3 hoši. Náhodně zvolíme skupinu a z ní náhodně vybereme studenta. Je to dívka. Jaká je pravděpodobnost, že je to (a) Francouzka, (b) Němka, (c) Angličanka?

(*) 4. V košíku je 10 jablek. Pravděpodobnost, že aspoň jedno z nich je shnilé, je 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že vybrané jablko je shnilé?

(*) Při hodu třemi kostkami padl součet ok, který je druhou mocninou nějakého čísla. Jaká je pravděpodobnost, že padla tři po sobě jdoucí čísla?

(*) V obchodě mají boty deseti různých značek. Osm z nich je kvalitních, zbylé dvě jsou nekvalitní, přičemž nevíme dopředu, které značky jsou kvalitní a které ne. Pravděpodobnost toho, že boty kvalitní značky bude třeba do 2 měsíců reklamovat, je 0,2, zatímco pravděpodobnost toho, že bude třeba reklamovat boty nekvalitní značky, je 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že zakoupený pár bot budeme muset do 2 měsíců reklamovat?

(*) Z balíčku 32 karet vybereme náhodně čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že mají všechny čtyři karty (a) stejnou barvu; (b) stejnou hodnotu?

(*) Máme 6 stejných klobouků, v každém 3 žluté kuličky a 7 modrých. Z každého klobouku vytáhnu jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna ze šesti vytažených kuliček je žlutá?

(*) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličny "počet ok při hodu dvěma kostkami". Stanovte pravděpodobnost toho, že při náhodném hodu padne součet mezi 8 a 11.

(*) Při hodu třemi kostkami padl prvočíselný počet ok. Jaká je pravděpodobnost, že padla tři po sobě jdoucí čísla?

(*) Máme 3 klobouky, v každém 5 bílých, 5 modrých a 5 červených kuliček. Z prvního klobouku náhodně vybereme kuličku, vložíme do druhého, zamícháme, náhodně vytáhneme kuličku z druhého klobouku, vložíme do třetího, zamícháme a ze třetího klobouku náhodně vytáhneme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že je modrá?

(*) Tři kamarádi chodí často pozdě do školy. A přijde pozdě jedenkrát týdně, B dvakrát týdně a C třikrát týdně. Dnes přišli pozdě dva z nich. Určete pravděpodobnost, že C dnes pozdě nepřišel.

(*) Dva hráči házejí střídavě dvojicí mincí. Vyhrává ten, komu padnou dřív dvě stejná strany. Určete pravděpodobnosti výher obou hráčů.

(*) Pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň jedno semínko ze šesti, je rovna 10^{-6}. Určete pravděpodobnost toho, že vyklíčí jedno semínko, víme-li, že všechna semínka jsou stejně kvalitní.

(*) Při hodu třemi kostkami padl prvočíselný součet ok. Jaká je pravděpodobnost, že padla tři po sobě jdoucí čísla?

(*) Dva kamarádi hrají hru se šesti kostkami. První vyhraje, pokud mu v jednom hodu padnou samá různá čísla, druhý vyhraje, pokud mu padnou samá sudá čísla. Který z kamarádů má větší šanci vyhrát?

(*) Střelec střílí do terče o průměru 30 cm. Trefí se se stejnou pravděpodobností do libovolného místa terče. Určete pravděpodobnost, že se trefí do kruhu o průměru 10cm, který je umístěn ve středu terče.

(*) Zasejeme 6 semínek, která mají stejnou klíčivost. Pravděpodobnost, že alespoň jedno ze semínek vyklíčí, je 0,7. Určete pravděpodobnost toho, že jednotlivé semínko vyklíčí.

(*) Na zkoušku přišlo 15 studentů. Třetina z nich udělá zkoušku s pravděpodobností 0,9, pětina z nich zkoušku udělá s pravděpodobností 0,7 a zbývající studenti s pravděpodobností 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student zkoušku udělá?

(*) Ve Sportce se losuje 6 čísel ze 49 (v osudí jsou koule s čísly 1 až 49). Na losu označí sázející 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost výhry (a) v 1. pořadí, tj. všechna čísla správně, (b) ve 2. pořadí, tj. 5 čísel správně?

(*) K obchodu přijedou dvě nákladní auta mezi 6. a 10. hodinou. Pro každé auto je stejně pravděpodobné, že přijede v libovolném okamžiku v rámci těchto 4 hodin. Vyložení nákladu trvá u každého auta jednu hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že bude některé auto muset čekat?

(*) Máme tři klobouky, ve kterých jsou černé a bílé kuličky. Pravděpodobnost, že z prvního vytáhnu bílou kuličku, je 0,9, z druhého 0,5 a ze třetího

0,3. Náhodně zvolíme klobouk a z něj vytáhneme černou kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že jsme ji vytáhli (a) z 1., (b) 2., (c) 3. klobouku?

(*) Házíme falešnou kostkou. Víme, že pravděpodobnost toho, že nám při šesti hodech padne aspoň jedna šestka, je 0,8. Jaká je pravděpodobnost toho, že padne šestka v prvním hodu?

(*) Tři kamarádi jdou na zkoušku. První ji udělá s pravděpodobností 0.9, druhý s pravděpodobností 0,5 a třetí s pravděpodobností 0,2. Pokud zkoušku udělají právě dva z nich, jaká je pravděpodobnost, že zkoušku neudělal druhý?

(*) Z lístků označených čísly 2 až 100 náhodně vybereme lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na lístku bude prvočíslo?

(*) Dva kamarádi hrají hru se šesti kostkami. První vyhraje, pokud mu v jednom hodu padnou samá různá čísla, druhý vyhraje, pokud mu padnou samá sudá čísla. Který z kamarádů má větší šanci vyhrát?

(*) Střelec střílí do terče o průměru 30 cm. Trefí se se stejnou pravděpodobností do libovolného místa terče. Určete pravděpodobnost, že se trefí do kruhu o průměru 10cm, který je umístěn ve středu terče.

(*) Zasejeme 6 semínek, která mají stejnou klíčivost. Pravděpodobnost, že alespoň jedno ze semínek vyklíčí, je 0,7. Určete pravděpodobnost toho, že jednotlivé semínko vyklíčí.

(*) Na zkoušku přišlo 15 studentů. Třetina z nich udělá zkoušku s pravděpodobností 0,9, pětina z nich zkoušku udělá s pravděpodobností 0,7 a zbývající studenti s pravděpodobností 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student zkoušku udělá?

(*) Dva hráči házejí kostkami. Vyhrává ten, komu padnou dřív dvě stejná čísla. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje druhý hráč ve druhém kole?

(*) Dva hráči hrají tuto hru: jeden si myslí číslo od 11 do 20 (včetně), druhý hádá. Jaká je pravděpodobnost, že druhý uhodne, co si první myslí, nejpozději na (a) první, (b) čtvrtý, (c) desátý pokus?

(*) Při hodu třemi kostkami padl součet ok dělitelný třemi. Jaká je pravděpodobnost, že padla tři stejná čísla?

(*) Chceme koupit půl kila ořechů. V obchodě mají ořechy dvou druhů. Víme, že v ořeších prvního druhu bývá jeden dkg žluklých mezi deseti, v ořeších druhého druhu dva dkg žluklých mezi deseti. Ořechy prodávají v sáčcích po 100 g. Kolik dkg žluklých ořechů můžeme očekávat v nákupu, pokud sáčky zvolíme náhodně?

(*) Dva kamarádi hrají hru se šesti kostkami. První vyhraje, pokud mu v jednom hodu padnou samá různá čísla, druhý vyhraje, pokud mu padnou samá sudá čísla. Který z kamarádů má větší šanci vyhrát?

(*) Máme 6 stejných klobouků, v každém 3 žluté kuličky a 7 modrých. Z každého klobouku vytáhnu jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna ze šesti vytažených kuliček je žlutá?

(*) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličny "počet ok při hodu dvěma kostkami". Stanovte pravděpodobnost toho, že při náhodném hodu padne součet mezi 8 a 11.

(*) Házíme třemi klasickými hracími kostkami. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci pro následující náhodný jev A: součet počtů teček při jednom hodu třemi kostkami.

(*) Hodíme šipkou do terče, který sestává ze tří soustředných kruhů. Nejmenší kruh (střed) má poloměr 10 cm, prostřední 20 cm a největší 30 cm. Jaká je pravděpodobnost, že se trefíme do středu (do nejmenšího kruhu), pokud víme, že jsme se trefili do terče a pokud je pak pravděpodobnost zásahu pro všechny body v terči táž?

(*) Máme šest květináčů, do každého zasejeme 5 semínek hrachu. Pravděpodobnost, že z těchto pěti semínek alespoň jedno vyklíčí, je 0,75. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň v jednom květináči žádné semínko nevyklíčí?

(*) Máme v jednom koši jablka a ve druhém hrušky. Čtvrtina hrušek je shnilých, jablek je pouze 10 procent shnilých. Vybereme náhodně koš a z něj náhodně dva kusy ovoce. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden z vytažených kusů je shnilý?

(*) Dva hráči házejí dvěma kostkami současně. Padne-li součet 5, vyhrává první hráč, padne-li součet 8, vyhrává druhý hráč. Který z hráčů má větší pravděpodobnost výhry?

(*) V obchodě mají dva druhy čokolády, mléčnou a oříškovou. víme, že 20 procent oříškových čokolád a 10 procent mléčných čokolád má prošlou záruční lhůtu. Mléčných čokolád je dvakrát více než oříškových. Jaká je pravděpodobnost, že (a) náhodně vybraná čokoláda má prošlou záruční lhůtu; (b) čokoláda s prošlou záruční lhůtou je mléčná?

(*) Náhodně zvolíme dvě čísla v intervalu (0;1). Jaká je pravděpodobnost, že (a) druhá mocnina prvního je větší než druhé číslo? (b) první číslo je větší než druhé?

(*) Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny "počet králů mezi čtyřmi taženými kartami" (z 32 karet). Stanovte pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici tažených karet budou 2 nebo 3 králové.

- (*) Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75 procent výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25 procent, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná sazenice je první jakosti? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná sazenice první jakosti je z produkce první školky, a pravděpodobnost, že je z produkce druhé školky?
- (*) Z balíčku karet táhneme jednu kartu. Jev A: vytáhnu krále; jev B: vytáhnu pikovou kartu. Určete pravděpodobnosti jevů A a B, jejich sjednocení a průniku a také pravděpodobnosti podmíněných jevů (A za podmínky B a B za podmínky A). Určete, zda jsou jevy A a B nezávislé.
- (*) V kruhu o poloměru R se v daném směru vedou tětivy. Všechny průsečíky tětiv s průměrem kolmým k danému směru jsou stejně možné. Jaká je pravděpodobnost toho, že délka náhodně zvolené tětivy je nejvýše R?
- (*) Z balíčku 32 karet táhneme 8 karet. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny, která udává počet pikových karet mezi těmito osmi kartami.
- (*) Při trojnásobném souboji se tři soupeři A, B, C postaví na rohy rovnostranného trojúhelníku. Střílí ve vylosovaném pořadí tak dlouho, dokud nezbude jediný vítěz. Je známo, že střelec A zasáhne vždy, střelec B s pravděpodobností 0,8 a střelec C s pravděpodobností 0,5. Každý ze soupeřů použije nejvý-hodnější strategii, pokud jde o volbu cíle. Jakou mají jednotliví účastníci souboje naději na vítězství?
- (*) V zásilce 150 pytlů ořechů z Turecka je 5 pytlů se zkaženými ořechy, stejně jako v zásilce 250 pytlů ořechů z Afghánistánu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pytel ze všech došlých pytlů obsahuje zkažené ořechy? Jaká je tato pravděpodobnost, jestliže nejdříve vybereme náhodně zásilku, a teprve z ní vybereme náhodně pytel?
- (**) Pravděpodobnost, že dvojčata budou chlapci je 0,34, že to budou děvčata je 0,3. Pravděpodobnost narození dvojčat různého pohlaví nezáleží na pořadí jejich narození. Najděte nepodmíněnou pravděpodobnost narození: a) chlapce b) děvčete.
- (*) Na kružnici o poloměru R jsou náhodně umístěny tři body A, B, C. Jaká je pravděpodobnost, že trojúhelník ABC bude ostroúhlý?
- (*) V klobouku je 16 kuliček, 8 bílých a 8 černých. Vytáhneme z něj 8 kuliček. Určete pravděpodob-nostní a distribuční funkci náhodné veličiny, která udává počet vytažených černých kuliček.