

Podrobnější instrukce k výstupům v SDM2, 2016

Irena Budínová

3. Algebraické výrazy; rovnice

a) Využívání algebraických výrazů v geometrických úlohách

S pomocí algebraických výrazů řešte následující úlohy ze sbírky úloh pro ZŠ a víceletá gymnázia. Při řešení používejte názorných obrázků, řešení by mělo být srozumitelné.

- 1) Je dán čtverec o straně délky a . Odstřihnutím jeho rohů vytvoříme pravidelný osmiúhelník. Určete délku strany osmiúhelníku.
- 2) Vypočítejte poloměr kulové plochy, která je opsána krychli o hraně délky a .

b) Rozklady mnohočlenů

Řešte následující úlohy s využitím úprav mnohočlenů:

- 1) Zjednodušte výraz a určete podmínky, za kterých mají provedené úpravy smysl.

$$\frac{3a^2 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$$

Zamyslete se nad tím, ve kterých krocích si žáci často nevědí rady a ve kterých krocích často dělají chyby.

- 2) Číslo a rozdělte na dva sčítance tak, aby rozdíl jejich druhých mocnin se rovnal opět číslu a . Určete oba dva sčítance. (Postupujte od indukce k dedukci.)

c) Propedeutika rovnic v Hejného učebnicích pro 1. stupeň ZŠ

Prostudujte učebnice prof. Hejného od 1. do 5. ročníku a vyberte úlohy, které jsou propedeutikou budoucího učiva rovnice. Několik úloh v různém stupni náročnosti vzorově vyřešte.

4. Rovnice; nerovnice

a) Řešení lineárních nerovnic

Řešte následující lineární rovnice a pojmenujte všechny ekvivalentní úpravy, které byly během řešení použity.

$$1) \frac{5x+1}{6} - \frac{7x-3}{8} = 1 - \frac{3x-1}{4}$$

$$2) x - \frac{x-1}{4} - \frac{2-\frac{x}{2}}{3} = 2$$

b) Řešení kvadratických rovnic různými způsoby

Řešte úlohy ze SŠ matematiky:

- 1) Pomocí doplnění kvadratického trojčlenu na úplný čtverec řešte v oboru \mathbb{R} kvadratické rovnice a) $x^2 - 3x + 2 = 0$, b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.
- 2) Pomocí Viétových vzorců určete kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 12x = -35$.

- 3) Odvodte vzorec pro reálné kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in R, \neq 0$) s neznámou x .

c) Řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli ekvivalentními a důsledkovými úpravami

Řešte rovnice s neznámou ve jmenovateli a) pouze ekvivalentními úpravami, b) ekvivalentními i důsledkovými úpravami. Vysvětlete, kdy určujeme podmínky řešitelnosti a kdy provádíme zkoušku správnosti.

$$1) \frac{x+1}{x} + \frac{(x+1)^2}{x^2} - \frac{(x+1)^3}{x^3} = 1$$

$$2) \frac{1}{u+1} + \frac{u}{u^2-1} - \frac{1}{u-1} = \frac{1}{1-u^2}$$

5. Velikonoce

6. Slovní úlohy řešené rovnicemi

a) Úlohy řešené rovnicemi: gradovaná série úloh

Následující úloha je úloha z matematické olympiády pro 6. ročník ZŠ. Vytvořte gradovanou sérii tří úloh od velmi jednoduché přes středně náročnou až po náročnou, která by vedla na řešení úlohy z olympiády. Všechny úlohy vzorově vyřešte prostředky žáka 6. ročníku.

Pat napsal na tabuli příklad: $589+544+80=2\ 013$. Mat chtěl příklad opravit, aby se obě strany skutečně rovnaly, a pátral po neznámém čísle, které pak k prvnímu sčítanci na levé straně přičetl, od druhého sčítance je odečetl a třetího sčítance jím vynásobil. Po provedení těchto operací byl příklad početně správný. Jaké číslo Mat našel? [Z6 – II – 1, 62. ročník]

b) Řešení slovních úloh aritmeticky a pomocí rovnic

Následující úlohu řešte a) aritmeticky (pomocí znázornění), b) pomocí rovnic.

- 1) Babička měla v pytlíku bonbony. Kdyby chtěla každému vnoučeti dát 5 bonbonů, jedno dítě by nedostalo žádný bonbon. Kdyby dala každému vnoučeti 4 bonbony, 3 bonbony by jí zbyly.

Následující úlohu řešte a) experimentem (pomocí tabulky), b) pomocí rovnice.

- 2) Otec je o 2 roky starší, než je trojnásobek synova věku. Za 14 let bude otec dvakrát tak starý než jeho syn. Kolik let je otcí a kolik synovi?

c) Úlohy o společné práci řešené rovnicemi

Řešte rovnicemi následující úlohy:

- 1) Dva různé traktory společně zorají 8 ha pole. Na zorání 95 ha polí je třeba, aby první traktor pracoval 10 dní a druhý traktor 15 dní. Kolik ha pole denně zorá každý traktor?
- 2) Dva dělníci vykonají určitou práci za 15 dní. První dělník tuto práci vykoná sám za d dní. Za kolik dní by tuto práci vykonal druhý dělník, kdyby pracoval sám?

7. Slovní úlohy řešené rovnicemi; soustavy lineárních rovnic**a) Úlohy o pohybu stejným směrem řešené aritmeticky a rovnicemi**

Následující úlohu řešte a) aritmeticky, b) pomocí rovnice. Situaci graficky znázorněte, proveďte všechny náležitosti slovní úlohy.

- 1) V 6 hodin 40 minut vyplul z přístavu parník plující průměrnou rychlostí 12 km/h. Přesně v 10 hodin za ním vyplul motorový člun průměrnou rychlostí 42 km/h. V kolik hodin dohoní člun parník?

Následující úlohu řešte pomocí rovnice.

- 2) Michal byl s kamarády na chalupě. Řekl, že vyjdou-li z chalupy přesně v 9 hodin a půjdou-li rychlostí 3 km/h, přijdou na zastávku 7 minut po odjezdu autobusu. Půjdou-li však rychlostí 4 km/h, přijdou na zastávku 5 minut před odjezdem autobusu. Vypočítejte z těchto údajů vzdálenost chalupy od autobusové zastávky a čas odjezdu autobusu.

b) Úlohy o pohybu proti sobě řešené aritmeticky a rovnicemi

Na následující úloze ilustrujte co nejnázornější postup řešení úlohy o pohybu proti sobě.

- 1) Eva a Linda jsou od sebe vzdálené 400 m. Pohybují se proti sobě, Eva jde pěšky rychlostí 4 km/h a Linda jede na kole rychlostí 12 km/h. Za jakou dobu a v jakém místě se potkají, když vyrazily ve stejný okamžik?

Následující úlohu řešte pomocí rovnice, co nejlépe ji graficky znázorněte.

- 2) Dvě letadla letí z letišť A a B vzdálených 420 km navzájem proti sobě. Letadlo z letiště A odstartovalo o 15 minut později a letí průměrnou rychlostí o 40 km/h větší než letadlo z letiště B. Určete průměrné rychlosti obou letadel, víte-li, že se setkají 30 minut po startu letadla z letiště A.

c) Různé metody řešení soustav lineárních rovnic

Následující soustavu rovnic řešte různými metodami, proveďte zkoušku.

- 1)
$$\frac{u-v}{3} = 3u + 6v - 1$$
$$2(4u + 5v) = 3(1 - 3v)$$

Následující slovní úlohu řešte pomocí soustavy rovnic.

- 2) V balírně mají připravit směs kávy tak, aby 1 kilogram stál 240 Kč. Na skladě jsou dva druhy kávy v ceně 220 Kč za 1 kg a 300 Kč za 1 kg. Kolik kilogramů každého druhu je třeba smíchat, abychom připravili 50 kg požadované směsi?

8. Závislosti**a) Úlohy, pomocí kterých lze názorně zavést pojmy definiční obor a obor hodnot; grafické znázornění závislosti**

Vymyslete jednoduché závislosti z běžného života, jako např.: *Jeden rohlík stojí 1,90 Kč. Zakreslete graf závislosti ceny rohlíků na počtu rohlíků.* Rozlišujte diskrétní a spojitě závislosti. Osy grafu správně popište. Závislosti mohou, ale také nemusí být vyjádřitelné analyticky. Na příkladech zaveďte pojmy definiční obor a obor hodnot funkce.

b) Úlohy, pomocí kterých názorně pracujeme s vlastnostmi funkcí: monotonie, extrémy

Vymyslete závislosti z běžného života, diskrétní nebo spojité. Určete jejich funkční předpis, zakreslete graf a diskutujte jejich vlastnosti, jako jsou spojitost, monotonie, omezenost, extrémy.

c) Názorné zavedení funkce přímá úměrnost

Vymyslete příklady lineárních závislostí z běžného života (bez posunutí, s posunutím po ose x , s posunutím po ose y). Rozlišujte diskrétní a spojité závislosti. Pro dané závislosti nakreslete graf a určete funkční předpis. Na příkladech zaveďte pojmy funkce přímá úměrnost, lineární funkce, nezávisle proměnná, závisle proměnná, graf lineární funkce. Určete definiční obor, obor hodnot, vlastnosti lineární funkce.

9. Závislosti**a) Kvadratická funkce na ZŠ a na SŠ**

Pomocí praktických příkladů (např. určování obsahu čtverce, aj.) zaveďte kvadratickou závislost. Ukažte, jaký má funkční předpis a jak vypadá její graf (na ZŠ pouze pro $y = kx^2$). Určete její definiční obor, obor hodnot, vlastnosti. Ukažte, jakým způsobem se dále funkce probírá na SŠ.

b) Funkce nepřímá úměrnost a její aplikace

Pomocí alespoň jednoho praktického příkladu zaveďte funkci nepřímá úměrnost. Určete její funkční předpis, graf, vlastnosti. S pomocí poznatků o funkci nepřímá úměrnost řešte aplikační úlohy.

c) Zakreslování grafu, čtení z grafu

Na různých příkladech z praktického života demonstруйте, jak správně číst z grafu. Ukažte postup, kterým pro určité funkce z grafu určíme rovnici funkce. Řešte následující příklady:

- 1) Zapište rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází bodem $A[-1; 1]$ a současně platí $a = -2$.
- 2) Určete rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází body $A[0; 3], B[-2; -3]$.

10. Závislosti, kombinatorika**a) Grafické řešení soustav lineárních rovnic**

Řešte graficky soustavy rovnic:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

b) Grafické řešení slovních úloh o pohybu

Řešte graficky slovní úlohy o pohybu.

- 1) Alena vyšla v 7:40 hodin do školy, která je vzdálena od domu 600 m, rychlostí 3 km/h. Její bratr Ruda si všiml, že si doma zapoměla svačinu a

rozhodl se ji doběhnout. Utíkal za ní rychlostí 6 km/h. Podaří se mu ji dohonit ještě před školou?

- 2) Mezi dvěma přístavišti na řece jezdí parník. Cesta tam a zpět mu trvá 3 hodiny 45 minut. Po proudu pluje rychlostí 12 km/h a proti proudu rychlostí 8 km/h. Určete vzdálenost mezi přístavišti.

c) Variace a kombinace bez opakování na ZŠ

Na následujících úlohách ilustруйте, jakými metodami mohou řešit úlohy rozvíjející kombinační myšlení žáci ZŠ bez znalosti vzorců. Modifikujte zadání tak, aby bylo možno úlohy řešit intuitivně (řešte nejdříve jednodušší verze úloh).

- 1) Z čísel 1, 3, 4, 5, 8 sestavte všechna čtyřciferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly.
- 2) Kolik a) úseček, b) přímek je zadáno pěti body v rovině?