PŘÍKLADY K OTÁZKÁM Z DIDAKTIKY MATEMATIKY 2016

1. **Individuální přístup k žákům, zájmová činnost v matematice**

a) Ve Zverimexu vyprodávali rybky z jednoho akvária. Ondra chtěl polovinu všech rybek, ale aby nemuseli žádnou rybku řezat, dostal o polovinu rybky víc, než požadoval. Matěj si přál polovinu zbylých rybek, ale stejně jako Ondřej dostal o polovinu rybky více, než požadoval. Nakonec Petřík chtěl polovinu zbylých rybek, ale také dostal o polovinu rybky víc, než požadoval. Poté bylo akvárium bez rybek. Kolik rybek bylo původně v akváriu a kolik jich dostal Ondra, kolik Matěj a kolik Petřík? (MO 65. ročník (2016), úloha Z9-II-1)

b) Milena nasbírala do košíku ořechy a zavolala partu kluků, ať se o ně podělí. Dala si ale podmínku: První si vezme jeden ořech a desetinu zbytku, druhý si vezme dva ořechy a desetinu nového zbytku, třetí si vezme tři ořechy a desetinu dalšího zbytku, atd. Tak to se podařilo rozebrat všechny ořechy a přitom každý dostal stejně. Určete, kolik Milena nasbírala ořechů a kolik se o ně dělilo chlapců. (MO 64. ročník (2015) Z9)

c) Žák má problémy se sčítáním zlomků, sčítá je tak, že součet čitatelů dělí součtem jmenovatelů, např.: $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{8}{11}$. Jaká nápravná cvičení navrhujete?

d) Žák má problémy s výpočtem druhých mocnin dvojčlenů, např. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ nebo $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. Jaké postupy navrhujte, aby učivo zvládl?

2. **Postupné rozšiřování číselného oboru**

a) Vysvětlete na úrovni žáka základní školy, proč nelze dělit nulou.

b) Prostředky žáka základní školy zapište číslo $0,\overline{35}$ pomocí zlomku.

c) Uveďte metodickou řadu příkladů pro výpočet součinu dvou celých čísel.

d) Uveďte metodickou řadu příkladů pro výpočet podílu dvou zlomků.

3. **Elementární teorie čísel, dělitelnost v N**

a) Prodavač prodává vejce. Kdyby je dával do krabiček po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti nebo po šesti, vždy mu jedno vejce zbude. Když je dává do krabičky po sedmi, žádné vejce nezbude. Kolik nejméně má prodavač vajec?

b) Vyslovte a dokažte věty o dělitelnosti přirozeného čísla) číslem tři
b) čísla čtyři.

c) Kolika způsoby můžete zaplatit částku 59 Kč pouze dvoukorunovými a pětikorunovými mincemi?

d) Ilustrujte využití induktivní a deduktivní metody při důkazu věty:

Pro součet n přirozených čísel platí: $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

4.**Číselné obory, intuitivní zavedení reálných čísel**

a) Dokažte, že $\sqrt{7}$ není racionální číslo.

b) Zakreslete graficky úsečku délky $\sqrt{5}$ cm.

c) Ilustrujte možnost zavedení čísla π žákům základní školy a přiblížení jeho iracionality.

d) Vyslovte věty o součtu a součinu dvou iracionálních čísel a zdůvodněte je.

5. **Základní pojmy finanční matematiky**

a) Cena automobilu byla nejprve zvýšena o 20% a později byla tato nová cena snížena o 15%. Nyní se automobil prodává za 250 000 Kč. Jaká byla původní cena automobilu před zvýšením ceny? Vysvětlete problematické části úlohy.

b) Pan Filip si vypůjčil 100 000 Kč, počet splátek je 84, výše měsíční splátky je 1 899 Kč. O kolik Kč zaplatí více, než si půjčil. Kolik procent činí splacená částka oproti částce vypůjčené?

c) Kolika procenty byla úročena částka, jestliže částka 80 000 Kč byla za jeden rok splacena 110 000 Kč?

d) Uveďte na konkrétním příkladu, jaký je rozdíl mezi úrokováním jednoduchým a úrokováním složeným.

6. Matematická úloha a její řešení

a) Uveďte alespoň dva různé způsoby řešení úlohy: Marek a Jitka ušetřili dohromady 1 625 Kč, Jitka ušetřila o 300 Kč méně než Marek. Kolik Kč ušetřil každý z nich?

b) Řešte úlohu metodou analytickou a metodou syntetickou: Sadař načesal 150 kg švestek, jablek načesal dvakrát více než švestek a hrušek načesal třikrát méně než jablek. Kolik kilogramů ovoce načesal dohromady?

c) Pánské boty jsou o 250 Kč dražší než dámské. Po slevě ceny pánských bot o 20% a dámských bot o 10% byla jejich cena stejná. Jaká byla původní cena bot a jaká je po slevě?

d) Tři sourozenci se dělili o 36 ořechů tak, že Aleš si vzal jednu šestinu ze všech, Blažej si vzal jednu pětinu zbytku po Alešovi a Cyril si vzal jednu čtvrtinu zbytku po Blažejovi. Kdo dostal nejvíce ořechů? Kolik ořechů zbylo pro rodiče?.

7. Vytváření představ a pojmů v matematice

a) Vyslovte Pythagorovu větu a alespoň dvěma způsoby ji dokažte.

b) Vyslovte a dokažte větu o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku.

c) Dokažte větu: Jestliže p je prvočíslo větší než tři, pak číslo $p^2 - 1$ je dělitelné číslem 6.

d) Vyslovte a dokažte větu o vlastnostech úhlopříček rovnoběžníku.

8. Rovnice a nerovnice, lineární rovnice

a) Dědeček pěstuje králíky a slepice. Dohromady mají 39 hlav a 124 noh. Kolik má dědeček králíků a kolik slepic?

b) Tatínek je čtyřikrát starší než Michal. Za pět roků bude tatínek jen třikrát starší než Michal. Kolik roků je tatínkovi a kolik roků je Michalovi? Kolikrát byl tatínek starší před pěti lety?

c) Kolik litrů vody je třeba přilít k 9 litrům lihu o koncentraci 75%, abychom získali líh o koncentraci 54% ?

d) V 7 hodin vyjel kamion z místa A průměrnou rychlostí 75 $\frac{km}{h}$. V 8 hodin vyjel z téhož místa osobní automobil průměrnou rychlostí 100 $\frac{km}{h}$. V jaké vzdálenosti a v kolik hodin bude osobní automobil míjet kamion (předpokládáme, že nejsou žádné překážky v jízdě).

9. Rovnice, kvadratická rovnice, rovnice s neznámou ve jmenovateli

a) V množině všech reálných čísel řešte rovnici (úpravami ekvivalentními i důsledkovými): $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6}$

b) Rozhodněte, pro která reálná čísla x platí: $x + 3 = 9 - x^2$

c) Řešte úlohu: Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je roven polovině součinu prvních dvou. Určete tato čísla.

d) Určete, pro která reálná čísla platí: $2 - x \leq x^2 - 4$.

10. Elementární funkce

a) Zakreslete grafy funkcí: $y = 3x$, $y = 3x - 1$, $y = 3(x - 1)$. Motivujte reálnými příklady.

b) Zakreslete grafy funkcí: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = \frac{1}{x+1}$.

c) Pomocí grafu lineární funkce řešte úlohu: Z Brna vyjel osobní automobil průměrnou rychlostí 90 $\frac{km}{h}$ směrem k Jihlavě. O půl hodiny později vyjel z Jihlavy autobus průměrnou rychlostí 60 $\frac{km}{h}$. Vzdálenost Brno – Jihlava je 90 km. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od Brna se budou míjet?

d) Zakreslete graf závislosti objemu válce na jeho výšce (při konstantním poloměru).

11. Kvadratická funkce, funkce racionální lomená

a) Zakreslete graf závislosti objemu kužele na velikosti jeho poloměru při konstantní výšce.

b) Jakou dráhu urazí kámen padající volným pádem za 7 sekund? Zakreslete graf.

c) Obdélník má obsah 48 cm^2. Zakreslete graf závislosti délky obdélníku na jeho šířce.

d) S využitím grafu funkce $y = \frac{1}{2}x^2$ zakreslete graf funkce $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$

12. Goniometrické funkce

a) Zakreslete graf funkce $y = tg\, x$ a uveďte vlastnosti této funkce.

b) Zakreslete grafy funkcí: $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$.

c) S využitím goniometrických funkcí zapište poměr stran pravoúhlého trojúhelníku s velikostmi vnitřních úhlů 30° a 60°.

d) Vypočítejte výšku rovnostranného trojúhelníku, jehož strana má délku a.

13. Planimetrie

a) Uveďte postupy, kterými můžete odvodit vztah pro výpočet obsahu lichoběžníku.

b) Jak odvodíte žákům základní školy vztah pro výpočet délky kružnice a obsahu kruhu?

c) Vyslovte a dokažte Thaletovu větu.

d) Uveďte a dokažte vlastnosti úhlopříček obdélníku.

14. Konstrukční úlohy

a) Je dána úsečka BC, |BC| = 5 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jestliže znáte velikost výšky je straně *a* a velikost úhlu α . Velikosti zvolte tak, aby úloha měla řešení.

b) Je dána úsečka AP, |AP| = 4 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je PA výškou ke straně BC a dále je dáno: c = 5 cm, t_b = 6 cm.

c) Sestrojte lichoběžník ABCD, jestliže znáte velikosti všech jeho stran.

d) Sestrojte všechny kružnice *k* s poloměrem 2 cm. Které se dotýkají dané přímky *p* a dané kružnice *l* , která má poloměr 4 cm a její střed leží na přímce *p*.

15. Geometrická zobrazení

a) Je dána přímka *p* a dva různé body A, B, které leží v jedné polorovině s hranicí *p*. na přímce *p* najděte bod X tak, aby i) |AX| = |BX|, ii) součet |AX| + |BX| byl co nejmenší.

b) Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže znáte délky stran *b, c* a velikost těžnice t_a.

c) Je dán čtverec ABCD, délka jeho strany je 4,5 cm. Sestrojte čtverec A´B´C´D´ , který je se čtvercem ABCD souměrný podle středu S, který je bodem úhlopříčky AC a pro který platí AS : SC = 1 : 3.

d) Sestrojte lichoběžník ABCD, jestliže znáte velikosti jeho základem a velikosti jeho úhlopříček.

16. Stereometrie

a) Popište, jak sestrojíte síť kužele a sestrojte síť kužele, jestliže poloměr podstavy je

3 cm a výška kužele je 4 cm.

b) Jak využijete Platónská tělesa ve výuce matematiky na základní škole?

c) Odvoďte vztahy pro výpočet povrchu a objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu.

d) Jaké činnosti využijete k rozvoji prostorové představivosti žáků?

17. Míry geometrických útvarů

a) Definujte délku úsečky a uveďte její určování.

b) Definujte obsah geometrického obrazce a uveďte, jak vyvodíte vztah pro obsah obdélníku.

c) Definujte objem tělesa a uveďte, jak vyvodíte vztah pro objem jehlanu.

d) Jaké problémy mají žáci s převody jednotek měr.

18. Kombinatorika, prvky teorie grafů

a) Určete počet všech trojciferných čísel, k jejich zápisu využijete číslice 0, 1, 2, 3, 5, 9 tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly. Kolik čísel z nich je sudých?

b) Určete, kolika způsoby je možné vybrat z 6 chlapců a 4 děvčat šestičlennou skupinu tak, aby v ní byla právě dvě děvčata.

c) Zapište všechna pěticiferná čísla, v jejichž zápisu použijete tři dvojky a dvě šestky.

d) Určete, kolik zápasů v tenisu sehraje 8 hráčů, jestliže hraje každý a každým právě jednou.

19. Pravděpodobnost a statistika

a) Uvažujte všechna dvojciferná čísla menší než 100. Náhodně vyberte jedno číslo. Jaká je pravděpodobnost, že toto číslo bude dělitelné pěti?

b) Je při hodu třemi kostkami pravděpodobnější součet 11 nebo součet 12?

c) V osudí je 7 bílých koulí a 3 červené koule. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená koule bude červená?

d) V bedně je 30 výrobků, 3 z nich jsou zmetky. Jaká je pravděpodobnost, že při vybrání 5 výrobků bude nejvýše 1 zmetek?

20. Historie matematiky

a) Úloha Leonarda da Vinci (1452 – 1519): Je dán čtverec ABCD a kružnice *k* vepsaná tomuto čtverci. Čtverec KLMN má vrcholy ve středech stran čtverce ABCD. Čtverci KLMN je vepsaná kružnice *l*. Ověřte, že obsah malého kruhu je roven obsahu vzniklého mezikruží, tedy polovině obsahu velkého kruhu.

b) Eulerova úloha: Někdo si koupí za 180 tolarů šátky. Kdyby bylo za stejné peníze šátků o tři více, byl by každý o tři tolary lacinější. Kolik bylo šátků a jaká byla jejich cena?

c) Euklidova úloha (z aritmetických epigramů ze 4. stol. př. n. l.): Mezek a osel kráčeli s pytli po dráze. Osel naříkal, že nese příliš těžké břemeno. Mezek se k němu obrátil s výčitkou: Co ty, stařešino, naříkáš jako děvče? Kdybys mi dal jeden pytel, nesl bych dvakrát tolik co ty. Kdybys mi jeden pytel vzal, nesli bychom stejně. Kolik nesl každý z nich?

d) Ve staré egyptské početnici Ahmesově (18. stol. př.n.l.) našla se tato úloha: Počtář spočítal, že stádo, které zrovna vedl pastýř na pastvu, čítalo sedmdesát kusů. A ptal se pastýře, jak velkou část dobytka žene ze svého početného stáda. Pastýř odpověděl: Vedu na pastvu dvě třetiny z třetiny stáda, které mi bylo svěřeno. Vypočtěte, kolik kusů čítalo stádo.

21. Kurikulární dokumenty

a) Uveďte uplatnění mezipředmětových vztahů s druhým předmětem své aprobace.

b) Uveďte některé konkrétní téma matematického učiva základní školy, ve kterém uplatníte konstruktivistické přístupy.

c) Uveďte didaktické zásady uplatňované ve výuce matematiky.

d) Jak ve výuce matematiky využijete výhody ICT?