MATICE A DETERMINANTY

Věta Laplaceova věta (věta o rozvoji determinantu podle zvolených řádků)

Nechť A je čtvercová matice řádu n, pevně zvolená k řádků matice A, kde $0 < k < n$. Determinant matice A je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorů řádu k vybraných ze zvolených k řádků s jejich algebraickými doplňky.

PŘÍKLAD Spočtěte determinant matice A užitím Laplaceovy věty.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Postup objasněn na str. 34 viz [I]

1. způsob

Rozvineme podle 1. a 2. řádku (prakticky je výhodné volit řádky, v nichž se vyskytují nuly)

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{1.ř.} \\ \xrightarrow{2.ř.} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\overbrace{1+2}^{\text{řádek}}+\overbrace{1+2}^{\text{sloupec}}} + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+4} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+4} + \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} =$$

$$= 10 \cdot (-15) \cdot (-1)^6 + 8 \cdot 0 \cdot (-1)^7 + 2 \cdot 18 \cdot (-1)^8 + (4-35) \cdot 10 \cdot (-1)^8 +$$

$$+ (1-15) \cdot (16+9) \cdot (-1)^9 + (7-12) \cdot 12 \cdot (-1)^{10} = -150 + 36 - 310 +$$

$$+ (-14) \cdot 25 \cdot (-1) + (-5) \cdot 12 = -150 + 36 - 310 + 350 - 60 = \underline{\underline{-134}}$$

$\boxed{\text{2. způsob}}$ Rozvineme podle 1. řádku

řádek sloupec

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} = |2| \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} +$$

$$+ |1| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} +$$

$$+ |7| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3} +$$

$$+ |3| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4} \ominus$$

$$\left|\begin{matrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 4 \\ 0 & -3 \\ 6 & 8 \end{matrix} =$$

$$= (-3) \cdot 25 + 18 =$$

$$\left|\begin{matrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot 8 - 4 \cdot 2 \cdot 5 + 9$$

$$\left|\begin{matrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$= 12 - 25 \cdot 2$$

$$\ominus\ |2| \cdot \left[(-3) \cdot 25 + 18\right] \cdot (-1)^2 + |1| \cdot \left[16 - 40 + 9\right] \cdot (-1)^3 +$$

$$+ |7| \cdot \left[12 - 2 \cdot 25\right] \cdot (-1)^4 + |3| \cdot \left[-45 + 48 - 80\right] (-1)^5 =$$

$$= 2 \cdot (-57) - (-15) + 7 \cdot (-38) + 3 \cdot (-1) \cdot (-77) =$$

$$= -114 + 15 - 266 + 231 = \underline{\underline{-134 = \det A}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -45 + 48 - 80$$

Pro výpočet determinantu dané matice **A** se využívají následující pravidla:

- Vznikne – li matice **B** z matice **A**:
    1. záměnou dvou řádků, pak det **B** = - det **A**
    2. vynásobením jednoho řádku pevným číslem t $\in$ T, pak det **B** = t . det **A**
    3. transponováním matice A, pak det **B** = det **A**´ = det **A**
- Pokud v matici A:
    1. se jeden řádek sestává ze samých nul, pak det **A** = 0.
    2. jsou dva různé řádky shodné, pak det **A** = 0.
    3. je jeden řádek násobkem jiného řádku, pak det **A** = 0.
    4. je jeden řádek lineární kombinací ostatních řádků, pak det **A** = 0.
- Hodnota determinantu matice **A** se nezmění, jestliže
    1. k jednomu řádku matice **A** přičteme libovolný násobek jiného řádku
    2. k jednomu řádku matice **A** přičteme lineární kombinaci ostatních } *

*elementární řádkové úpravy (sloupcové, tj. totéž platí i o sloupcích)

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Spočtěte determinant matice A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Další způsob řešení výpočtu determinantu je využití elementárních řádkových a sloupcových úprav. Pomocí nich se snažíme dosáhnout toho, aby v některém řádku nebo sloupci byly samé nuly až na nejvýše jeden prvek.

$$\begin{array}{c} \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ + \quad + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ + \quad + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -10 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

rozvineme podle 1. řádku

$$= |1| \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & -3 & -3 & 4 \\ -7 & -1 & -10 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 10 & 5 & -4 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} \underset{\overrightarrow{4.ř.}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 10 & 5 & -4 \\ -10 & 0 & -26 & -12 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & -4 \\ -10 & -26 & -12 & 8 \end{vmatrix} \cdot |1| \cdot (-1)^{4+2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & -4 \\ -10 & -26 & -12 & 8 \end{vmatrix} \overset{2.ř.}{\longrightarrow} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 6 & 11 & -4 \\ 6 & -26 & -36 & 8 \end{vmatrix} = |1| \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 11 \\ 6 & -26 & -36 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 11 \\ 6 & -26 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -47 & -42 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 15 \\ -47 & -42 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -47 & -42 \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = -2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 47 & 42 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 42 - 3 \cdot 47) =$$

$$= -10(168 - 141) = \underline{\underline{-270}}$$

Matice ve schodovitém tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boxed{\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}}$$

PŘÍKLAD Užitím úprav, které nemění hodnotu determinantu, spočtěte determinant matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ (-1) & 0 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ (-1) & (-2) & 0 & \dots & (n-1) & n \\ \vdots & & & & & \\ (-1) & (-2) & (-3) & \dots & (-n+1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n-2 & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n-2 & 2n \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

elementární řádkové úpravy

$$= \underline{\underline{n!}} = \underline{\underline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}}$$

ALGEBRA MATIC

Definice 1 Nechť $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}) \in Mat_{m/n}(T)$

($Mat_{m/n}(T)$ ... množina všech matic typu m/n nad tělesem T)

- matice $A+B=(c_{ij}) \in Mat_{m/n}(T)$ definovaná

$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$ $\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$ se nazývá <u>součet matic A+B</u>

- matice $t\cdot A=(d_{ij}) \in Mat_{m/n}(T)$ definovaná

$\boxed{d_{ij}=t\cdot a_{ij}}$ $\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$ se nazývá <u>součin čísla t a matice A</u>

Poznámka <u>$(Mat_{m/n}(T);+)$ je komutativní grupa</u>

Množina $Mat_{m/n}(T)$ je vektor. prostor nad T dimenze $m\cdot n$

$Mat_{m/n}(T)$ je uzavřená vzhledem k operaci +

operace + je asociativní na $Mat_{m/n}(T)$ => pologrupa

matice $O_{m/n}$ je neutrální prvek množiny $Mat_{m/n}(T)$ vzhledem ke +

pro lib. $A=(a_{ij})$ existuje $-A=(-a_{ij})$ - opačný prvek

2 Nechť $A=(a_{ij})$ matice typu m/n; $B=(b_{ij})$ matice typu n/p (obě nad T). Pak matice $A\cdot B=(c_{ij})$ typu m/p, kde

$\boxed{c_{ij}=\sum a_{ik}\cdot b_{kj}}$ $\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p \end{matrix}$ se nazývá <u>součin matic $A\cdot B$</u>

Poznámka Násobení matic - není obecně komutativní
- je asociativní
- je distributivní vzhledem ke sčítání

<u>$(Mat_{n/n}(T);+,\cdot)$ je okruh</u> (pro $n\geq 2$ není komutativní a obsahuje dělitele nuly)

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Spočtěte $A \cdot B$, $B \cdot A$, kde $A, B \in Mat_{m,n}(R)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 2\cdot 7 & 2\cdot 2 + 0\cdot 5 + 7\cdot 11 & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 & 2\cdot 7 + 5\cdot 1 + 7\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 2\cdot 4 & -1\cdot 2 + 4\cdot 11 & -1 + 4\cdot 1 & -7\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

součin $B \cdot A$ není definován

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Spočtěte $A \cdot B \cdot C$, kde $A, B, C \in Mat_{m,n}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-3i & -2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3i & -2i \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1-3i & -2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3i & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(1-i) + (1-3i)(1+i) - 2i(2-i) \\ 0 \\ 2\cdot(1-i) + (1-3i)(1+i) - 2i(2-i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-8i \\ 0 \\ 4-8i \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Definice}}$ • Čtvercová matice A se nazývá regulární, resp. singulární, je-li $\det A \neq 0$, resp. $\det A = 0$.

• Nechť A čtvercová matice řádu n. Matice X s vlastností $\boxed{A \cdot X = X \cdot A = E_n}$ se nazývá inverzní matice k matici A. Značíme A^{-1}.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ = jednotková matice řádu n

$\boxed{\text{Poznámka}}$ • A .. čtvercová matice řádu n, pak k matici A existuje inverzní matice $\Leftrightarrow$ A je regulární

• Množina všech regulárních matic řádu n (nad T) s operací násobení matic je grupa, pro $n \geq 2$ nekomutativní.

tj. $(Reg_{nn}(T), \cdot)$ ... grupa ($Reg_{nn}(T)$ množina všech regulárních matic)

grupoid: násobení regul. matic řádu n dostaneme regulární matici řádu n

pologrupa: násobení regul. matic je asociativní

neutrální prvek existuje $= E_n$ (jednotková matice)
$A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$

ke každé regulární matici A existuje matice inverzní A^{-1}

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Nalezněte matici inverzní k matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = E_n$$

Postup objasněn str. 53 viz [I]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & | & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{6} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & | & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & | & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -5 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 0 & | & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -5 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = E}$$

Literatura: [I] Pavel Horák: Lineární algebra a geometrie; učební text; Brno 2014