PŘÍKLAD V $\mathbb{R}$ řešte

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \end{array}\right)$$

$\boxed{x_2 = t}$

$-2x_3 = 37 - 11t$

$\boxed{x_3 = \frac{11t - 37}{2}}$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -9$

$x_1 = -9 + 2t - 11t + 37$

$\boxed{x_1 = 28 - 9t}$

řešení nekonečně mnoho, závislé na parametru $t \in \mathbb{R}$

řešení: $\left(28 - 9t, t, \frac{11t - 37}{2}\right) =$

$= \left(28, 0, -\frac{37}{2}\right) + t \cdot \left(-9, 1, \frac{11}{2}\right)$

PŘÍKLAD V $\mathbb{R}$ řešte

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \end{array}\right)$$

$\boxed{x_2 = t}$

$-2x_3 = 37 - 11t$

$\boxed{x_3 = \frac{11t - 37}{2}}$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -9$

$x_1 = -9 + 2t - 11t + 37$

$\boxed{x_1 = 28 - 9t}$

řešení nekonečně mnoho, závislé na parametru $t \in \mathbb{R}$

řešení: $\left(28 - 9t, t, \frac{11t - 37}{2}\right) =$

$= \left(28, 0, -\frac{37}{2}\right) + t \cdot \left(-9, 1, \frac{11}{2}\right)$

HOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Definice Soustava lineárních rovnic

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad a_{ij} \in T$$

se nazývá homogenní soustava k lin. rovnic o n neznámých nad T

- Matice soustavy ... A
  Rozšířená matice soustavy ... $\bar{A}$ $\Big\}$ $h(A) = h(\bar{A})$ vždy $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ soustava (2) vždy řešitelná
- Uspořádaná n-tice $(0, 0, \dots, 0)$ je vždy řešením soustavy (2) $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ tzv. nulové řešení soustavy (2)
- Soustava (2) má pouze nulové řešení $\Leftrightarrow h(A) = n$
  Soustava (2) má ∞ řešení $\Leftrightarrow h(A) < n$
- Množina U všech řešení soustavy (2) je podprostorem ve vektorovém prostoru T^n a platí: $\dim U = n - h(A)$
- Hledáme-li řešení soustavy (2), hledáme bázi podprostoru U.

PŘÍKLAD Naleznete bázi podprostoru řešení U homogenní soustavy nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \boxed{x_4 = t} \quad \boxed{x_2 = t}$$

$\dim U = 4 - 2 = 2$ tj. 2 volné parametry $t, s \in \mathbb{R}$

$x_1 - t + x_3 - t = 0$

$\boxed{x_3 = s}$ $\boxed{x_1 = 2t - s}$

Řešení soustavy: $(2t-s, t, s, t)$

zvolíme $t = 0$; $s = 1$: 1. bázový vektor $(-1, 0, 1, 0) = \bar{u}_1$

$t = 1$; $s = 0$: 2. bázový vektor $(2, 1, 0, 1) = \bar{u}_2$

báze podprostoru U, který je řešením soustavy:

$\bar{u}_1 = (-1, 0, 1, 0)$

$\bar{u}_2 = (2, 1, 0, 1)$

PŘÍKLAD Nalezněte řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(\bar{A}) = 3$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}}$$

Soustava má jediné řešení: $(0,0,0) = \bar{o}$
(nulový vektor)

PŘÍKLAD Řešte systém l. rovnic nad $\mathbb{R}$ s parametrem $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \alpha \cdot x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha \cdot x_2 + x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right)$$

$2 - \alpha - \alpha^2 = 0$

$\alpha_{1,2} = 1$ (I), -2 (II)

(I) pro $\boxed{\alpha = 1}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pro $\alpha = 1$ má soustava řešení $(1-t-s,\ t,\ s)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_3 &= s \\ x_1 &= 1-t-s \end{aligned}} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(II) pro $\boxed{\alpha = -2}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$0 \neq 3 \Rightarrow$ pro $\alpha = -2$ nemá soustava řešení

(III) pro $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ má soustava nekonečně mnoho řešení - závislé na $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_3 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\alpha^2} = \frac{1-\alpha}{-(\alpha+2)(\alpha-1)} = \boxed{\frac{+1}{\alpha+2} = x_3}$$

$$(\alpha-1) \cdot x_2 = \frac{-(1-\alpha)}{\alpha+2} \qquad \boxed{x_2 = +\frac{1}{\alpha+2}}$$

$$x_1 = 1 + \frac{(-\alpha)}{\alpha+2} + \frac{(-1)}{\alpha+2} = \frac{\alpha+2-\alpha-1}{\alpha+2} \qquad \boxed{x_1 = \frac{1}{\alpha+2}}$$

PŘÍKLAD Nalezněte matici inverzní k matici

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\3&8&0&-4\\2&2&-4&-3\\3&8&-1&-6\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&-1&-2&1&0&0&0\\3&8&0&-4&0&1&0&0\\2&2&-4&-3&0&0&1&0\\3&8&-1&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\cdot(-3)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&-1&-2&1&0&0&0\\0&2&3&2&-3&1&0&0\\0&-2&-2&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&-2&0&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&-1&-2&1&0&0&0\\0&2&3&2&-3&1&0&0\\0&0&1&3&-5&1&1&0\\0&0&-1&-2&0&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&-1&-2&1&0&0&0\\0&2&3&2&-3&1&0&0\\0&0&1&3&-5&1&1&0\\0&0&0&1&-5&0&1&1\end{array}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&-1&&-9&0&2&2\\0&1&\frac{3}{2}&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&10&1&-2&-3\\0&0&0&1&-5&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&1&0&-1\\0&1&\frac{3}{2}&0&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}&-1&-1\\0&0&1&0&10&1&-2&-3\\0&0&0&1&-5&0&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&1&0&-1\\0&1&0&0&-\frac{23}{2}&-1&2&\frac{7}{2}\\0&0&1&0&10&1&-2&-3\\0&0&0&1&-5&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&24&3&-4&-8\\0&1&0&0&-\frac{23}{2}&-1&2&\frac{7}{2}\\0&0&1&0&10&1&-2&-3\\0&0&0&1&-5&0&1&1\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}24&3&-4&-8\\-\frac{23}{2}&-1&+2&\frac{7}{2}\\10&1&-2&-3\\-5&0&1&1\end{pmatrix}$$

Ověřením získáme

$A\cdot A^{-1}=E_n$

$A^{-1}\cdot A=E_n$

PŘÍKLAD

Nalezněte řešení homogenní soustavy:

$$x_1-x_2+2x_3=0$$
$$x_2-x_3=0$$
$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&1&-1&0\\1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&1&-1&0\\0&2&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$h(A)=h(\bar{A})=3$ $\boxed{x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0}$

Soustava má jediné řešení: $(0,0,0)=\bar{o}$ (nulový vektor)

EUKLEIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

Definice Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) a nechť každé dvojici vektorů $\bar{u}, \bar{v} \in V$ je přiřazeno reálné číslo $\bar{u} \cdot \bar{v}$ tak, že pro každé $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$, $r \in \mathbb{R}$ platí:

(I) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(II) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w}) + (\bar{v} \cdot \bar{w})$

(III) $(r \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v} = r \cdot (\bar{u} \cdot \bar{v})$

(IV) je-li $\bar{u} \neq \bar{o}$, pak $\bar{u} \cdot \bar{u} > 0$

Reálné číslo $\bar{u} \cdot \bar{v}$ se nazývá <u>skalární součin</u> vektorů $\bar{u}, \bar{v}$.

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá <u>EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR</u>.

Definice Nechť V je euklidovský prostor, $\bar{u} \in V$. Pak $\sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$ se nazývá <u>velikost</u> vektoru $\bar{u}$ a značíme $\|\bar{u}\|$.
Pro $\|\bar{u}\| = 1$ říkáme, že vektor $\bar{u}$ je <u>normovaný</u>.

Definice Nechť $\bar{u}, \bar{v} \in V$ jsou nenulové vektory euklidovského prostoru V. Pak reálné číslo φ, kde

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

se nazývá <u>odchylka</u> vektorů $\bar{u}, \bar{v}$.

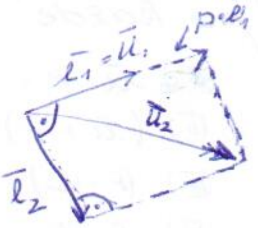
Definice Nechť V je euklidovský prostor a nechť $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Řekneme, že vektory jsou <u>ortogonální</u>, jestliže $\forall i \neq j : \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0$. Značíme $u_i \perp u_j$. Je-li navíc každý z vektorů normovaný, říkáme, že vektory $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ jsou <u>ortonormální</u>. Jsou-li ortogonální vektory navíc bází, hovoříme o <u>ortogonální</u> bázi.

- $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k \in V$ jsou nenulové ortogonální vektory v euklidovském prostoru V $\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ jsou LN.
- V každém nenulovém euklidovském prostoru V existuje ortogonální báze (resp. ortonormální).
- V každém reálném vektorovém prostoru V lze definovat skalární součin. (Čtěte P. Horák : str. 73) (*)

PŘÍKLAD V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným $(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot(y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_3 y_4$

Nalezněte ortogonální bázi podprostoru U generovaného vektory $\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3$, kde

$$\bar u_1 = (1,0,-1,0)$$
$$\bar u_2 = (-1,1,0,2)$$
$$\bar u_3 = (0,2,-1,0)$$



Provedeme tzv. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem:

(P. Horák, str. 79)

$U = L(\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3)$. 1, Položme $\bar e_1 = \bar u_1 = (1,0,-1,0)$

2, Položme $\bar e_2 = p\cdot \bar e_1 + \bar u_2 \quad /\cdot e_1$ („skalární součin")

$\bar e_1 \perp \bar e_2 \Rightarrow$ $\quad (\bar e_1 \cdot \bar e_2) = p\cdot(\bar e_1\cdot \bar e_1) + (e_1 \cdot \bar u_2)$

$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad\quad 0 = p\cdot 2 + (-1)$

$\boxed{p = \frac{1}{2}}$, tj $e_2 = \frac{1}{2}\cdot \bar e_1 + u_1$

$e_2 = \frac{1}{2}(1,0,-1,0) + (-1,1,0,2)$

$= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 2\right) = (-1,2,-1,4)$

3, položme $\bar e_3 = p_1 \bar e_1 + p_2 \bar e_2 + \bar u_3 \quad /\cdot e_1,\ /\cdot e_2$ (skalární součin)

$e_1 \perp e_2$ $\quad \bar e_1 \cdot \bar e_3 = p_1(\bar e_1 \cdot e_1) + p_2\cdot(\bar e_1 \cdot e_2) + (\bar e_1, \bar u_3)$

$\bar e_1 \perp \bar e_3$ $\quad \bar e_2 \cdot \bar e_3 = p_1(\bar e_1 \cdot \bar e_2) + p_2(\bar e_2, \bar e_2) + (\bar e_2, \bar u_3)$

$e_2 \perp \bar e_3$

$0 = p_1 \cdot 2 + 0 + 1 \Rightarrow p_1 = -\frac{1}{2}$

$0 = 0 + p_2 \cdot 22 + 5 \Rightarrow p_2 = -\frac{5}{22}$

$\bar e_3 = -\frac{1}{2}\cdot e_1 - \frac{5}{22}\cdot \bar e_2 + \bar u_3$

$e_3 = -\frac{1}{2}\cdot(1,0,-1,0) - \frac{5}{22}\cdot(-1,2,-1,4) + (0,2,-1,0)$

$e_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{5}{22}, -\frac{10}{22}, \frac{5}{22}, -\frac{20}{22}\right) + (0,2,-1,0) =$

$= \left(-\frac{6}{22}, \frac{34}{22}, -\frac{6}{22}, \frac{-20}{22}\right) = (-3, 17, -3, -10) = e_3$

Ortogonální bázi podprostoru U tvoří vektory

$\bar e_1 = (1,0,-1,0)$; $\bar e_2 = (-1,2,-1,4)$; $e_3 = (-3,17,-3,-10)$

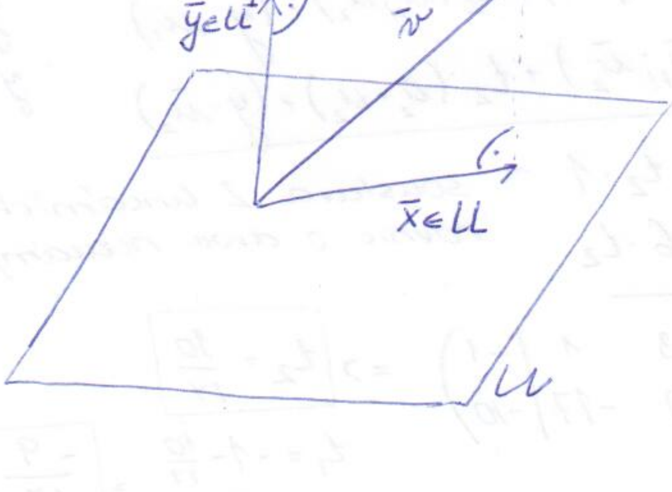
Definice Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru V. Je-li $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ $\forall a\in A, \forall b\in B$, pak říkáme, že A, B jsou <u>ortogonální množiny</u> $(A\perp B)$ $B\perp A$.

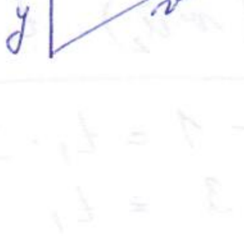
- Prázdná množina a množina $\{\bar{o}\}$ jsou ortogonální ke každé podmnožině ve V.
- $A\perp B \Rightarrow A\cap B=\emptyset \vee A\cap B=\{\bar{o}\}$
- Dvě množiny jsou ortogonální $\Leftrightarrow$ jsou ortogonální podprostory generované těmito množinami

Definice Nechť U je podprostor euklidovského prostoru V. Pak množina $U^{\perp}=\{\bar{x}\in V \mid \bar{x}\cdot\bar{u}=0 \ \forall u\in V\}$ se nazývá <u>ortogonální doplněk</u> podprostoru U (ve V).

- $U\perp U^{\perp}$, množiny U a $U^{\perp}$ jsou ortogonální
- $V^{\perp}=\{\bar{o}\}$; $\{\bar{o}\}^{\perp}=V$; $U^{\perp}$ je podprostor ve V ; $V=U+U^{\perp}$

Definice Nechť U je podprostor ve V a nechť vektor $\bar{v}\in V$ je vyjádřen ve tvaru: $\bar{v}=\bar{x}+\bar{y}$, kde $\bar{x}\in U$, $\bar{y}\in U^{\perp}$. Pak vektor $\bar{x}$ se nazývá <u>ortogonální projekce</u> vektoru $\bar{v}$ do prostoru U.





PŘÍKLAD V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným $(x_1, x_2, x_3, x_4)\cdot(y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$ naleznete ortogonální projekci vektoru $\bar{v} = (1, 0, -1, 1)$ do prostoru U generovaného vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$. Přitom

$\bar{u}_1 = (1, 0, +1, -1)$

$\bar{u}_2 = (2, -1, 0, 1)$

$\bar{u}_3 = (1, -1, -1, 2)$

· Zjistíme nejprve, zda vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ nejsou závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ jsou LZ ⇒

⇒ vybereme bázové vektory podprostoru U: např. $\bar{u}_1 = (1, 0, 1, -1)$, $\bar{u}_2 = (2, -1, 0, 1)$

$\dim U = 2$

$\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$, kde $\bar{x} \in U$, $\bar{y} \in U^{\perp}$ $\quad$ $\bar{X}$ - ortogonální projekce vektoru $\bar{v}$ do U.

$\bar{X} \in U \Rightarrow \bar{X} = t_1 \cdot \bar{u}_1 + t_2 \cdot \bar{u}_2$ ... hledáme t_1, t_2

$$\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\bar{v} = t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2 + y \quad / \cdot \bar{u}_1, \cdot \bar{u}_2 \text{ (skalární součin)}$$

$$(\bar{v} \cdot \bar{u}_1) = t_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1) + t_2 (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2) + (y \cdot u_1)$$

$$(v \cdot \bar{u}_2) = t_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2) + t_2 (\bar{u}_2 \cdot u_2) + (y \cdot \bar{u}_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y} \perp \bar{u}_1 \\ y \perp u_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \bar{y} \cdot \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{u}_2 = 0 \end{array}$$

$$-1 = t_1 \cdot 3 + t_2 \cdot 1$$
$$3 = t_1 + 6 \cdot t_2$$

soustava 2 lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -17 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{10}{17}}$$

$$t_1 = \frac{-1 - \frac{10}{17}}{3} = \boxed{\frac{-9}{17} = t_2}$$

$\bar{X} = t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2$

$$X = -\frac{9}{17} \cdot \bar{u}_1 + \frac{10}{17} \cdot \bar{u}_2 = -\frac{9}{17}(1, 0, 1, -1) + \frac{10}{17} \cdot (2, -1, 0, 1) = \left(\frac{11}{17}, -\frac{10}{17}, -\frac{9}{17}, \frac{19}{17}\right)$$

ověříme správnost výsledku:

$\bar{v} = \bar{x} + \bar{y} \qquad \bar{y} \perp \bar{x}$

$\bar{y} = \bar{v} - \bar{x}$

$\bar{y} = (1,0,-1,1) - \left(\frac{11}{17}, \frac{-10}{17}, -\frac{9}{17}, \frac{19}{17}\right) = \left(\frac{6}{17}, \frac{10}{17}, \frac{-8}{17}, -\frac{2}{17}\right)$

$\bar{y} \perp \bar{x}$, tj. ověříme, že $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

$$\left(\frac{11}{17}, -\frac{10}{17}, -\frac{9}{17}, \frac{19}{17}\right) \cdot \left(\frac{6}{17}, \frac{10}{17}, -\frac{8}{17}, -\frac{2}{17}\right) =$$

$$= \frac{66}{17^2} - \frac{100}{17^2} + \frac{72}{17^2} - \frac{38}{17^2} = \underline{\underline{0}}$$

Ortogonální projekce vektoru v do U je $\underline{\underline{X = \left(\frac{11}{17}, -\frac{10}{17}, -\frac{9}{17}, \frac{19}{17}\right)}}$

PŘÍKLAD V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem def. $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$ nalezněte ortogonální projekci vektoru $\underline{\bar{v} = (0,2,-1)}$ do podprostoru U generovaného vektory $\underline{\bar{u}_1 = (1,0,1), \bar{u}_2 = (-1,2,0)}$.

- Vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ jsou LN $\Rightarrow$ tvoří bázi U

$\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$, kde $\bar{x} \in U$, $\bar{y} \in U^\perp$ $\quad x = t_1 \cdot \bar{u}_1 + t_2 \cdot \bar{u}_2$

$\leftarrow v = t_1 \cdot \bar{u}_1 + t_2 \cdot \bar{u}_2 + \bar{y} \quad \Big| \cdot \bar{u}_1, \bar{u}_2$ (skalár. součin)

$(\bar{v} \cdot \bar{u}_1) = t_1 \cdot (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1) + t_2 \cdot (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2) + (\bar{y} \cdot \bar{u}_1) \qquad \bar{y} \perp \bar{u}_1$, tj. $\bar{y} \cdot \bar{u}_1 = 0$

$(\bar{v} \cdot \bar{u}_2) = t_1 (\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2) + t_2 \cdot (\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2) + (\bar{y} \cdot \bar{u}_2) \qquad \bar{y} \perp \bar{u}_2$, tj. $\bar{y} \cdot \bar{u}_2 = 0$

$$\begin{aligned} -1 &= 2t_1 - t_2 \\ 4 &= -t_1 + 5t_2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{7}{9}}$$

$2t_1 = -1 + t_2$

$\boxed{t_1 = -\frac{1}{9}}$

$\bar{X} = t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2$

$\bar{X} = -\frac{1}{9}(1,0,1) + \frac{7}{9} \cdot (-1,2,0) = \underline{\underline{\left(-\frac{8}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{1}{9}\right)}} = \bar{x}$

Ověříme správnost výsledku: $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$

$\bar{y} = \bar{v} - \bar{x} = \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}\right)$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \left(-\frac{8}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}\right) =$

$= -\frac{64}{9^2} + \frac{56}{9^2} + \frac{8}{9^2} = \underline{0}$, tj. ortogon. projekce $\bar{v}$ do U je $X = \left(-\frac{8}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{1}{9}\right)$

(*) ze str. 3:

PŘÍKLAD) skalárního součinu:

- Nechť $V = \mathbb{R}^2$ a nechť $\bar{u} = (u_1, u_2)$, $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Pak
  1) položíme: $\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$; pak jsou splněny axiomy skalárního součinu
  2) položíme: $\bar{u} \cdot \bar{v} = 4u_1 \cdot v_1 + 2u_1 \cdot v_2 + 2u_2 \cdot v_1 + 3u_2 \cdot v_2$, pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu

V obou případech se jedná o tentýž vektorový prostor $\mathbb{R}^2$, ale definované skalární součiny jsou různé a tedy jsou různé i jimi definované euklidovské prostory.

PŘÍKLAD V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 \cdot y_3.$$

Nalezněte ortogonální bázi podprostoru U generovaného vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2$, kde $\bar{u}_1 = (3,5)$, $\bar{u}_2 = (2,-1)$

Provedeme Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem:

$U = L(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

1, Položme $\bar{e}_1 = \bar{u}_1 = (3,5)$

2, Položme $\bar{e}_2 = p \cdot \bar{e}_1 + \bar{u}_2 \quad / \cdot \bar{e}_1$

$$(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) = p \cdot (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + (\bar{e}_1 \cdot \bar{u}_2)$$

$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$

$e_1 \perp e_2$

$$0 = p \cdot (9+25) + (6-5)$$

$$0 = 34 \cdot p + 1 \Rightarrow p = -\frac{1}{34}$$

$$\bar{e}_2 = -\frac{1}{34} \cdot \bar{e}_1 + \bar{u}_2$$

$$\bar{e}_2 = -\frac{1}{34} \cdot (3,5) + (2,-1)$$

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{3}{34}, -\frac{5}{34}\right) + (2,-1)$$

$$\bar{e}_2 = \left(\frac{65}{34}, -\frac{39}{34}\right) = (65,-39) = \bar{e}_2$$

Ortogonální báze podprostoru U je tvořena vektory $\boxed{\bar{e}_1 = (3,5), \quad \bar{e}_2 = (65,-39)}$

PŘÍKLAD V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Nalezněte ortogonální bázi podprostoru U generovaného vektory $\bar{u}_1, \bar{u}_2$, kde $\bar{u}_1 = (3,5)$, $\bar{u}_2 = (2,-1)$

Provedeme Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem: $U = L(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$

1, Položme $\bar{e}_1 = \bar{u}_1 = (3,5)$

2, Položme $\bar{e}_2 = p \cdot \bar{e}_1 + \bar{u}_2 \quad / \cdot e_1$ (skalární součin)

$$(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) = p \cdot (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + (\bar{e}_1 \cdot \bar{u}_2)$$

$\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$

$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$

$$0 = p \cdot (9+25) + (6-5)$$

$$0 = 34 \cdot p + 1 \Rightarrow p = -\frac{1}{34}$$

$$\bar{e}_2 = -\frac{1}{34} \bar{e}_1 + \bar{u}_2$$

$$\bar{e}_2 = -\frac{1}{34} \cdot (3,5) + (2,-1)$$

$$\bar{e}_2 = \left(-\frac{3}{34}, -\frac{5}{34}\right) + (2,-1)$$

$$\bar{e}_2 = \left(\frac{65}{34}, -\frac{39}{34}\right) = (65,-39) = \bar{e}_2$$

Ortogonální báze podprostoru U je tvořena vektory $\boxed{\bar{e}_1 = (3,5), \quad \bar{e}_2 = (65,-39)}$