LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

Definice Nechť V, V' jsou vektor. prostory nad T. Zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V;\ t \in T$:

(I) $\varphi(\bar{u} + \bar{v}) = \varphi(\bar{u}) + \varphi(\bar{v})$

(II) $\varphi(t \cdot \bar{u}) = t \cdot \varphi(\bar{u})$

se nazývá lineární zobrazení vektorového prostoru V do V'. Je-li navíc φ bijektivní, pak se nazývá izomorfismus vektorového prostoru V na V'

PŘÍKLAD Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T; $t \in T$. Pak

1, zobrazení $\varphi : V \to V$ definované $\varphi(\bar{u}) = t \cdot u \quad \forall \bar{u} \in V$ je lineární zobrazení. Pro $t \neq 0$ je φ izomorfismus.

$t = 1$ je φ identické zobrazení

Platí: Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, pak:

1, $\varphi(\bar{o}) = \bar{o}'$ (nulový vektor se vždy zobrazí na nulový vektor!)

2, $\varphi(-\bar{u}) = -\varphi(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in V$

3, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \in V$ jsou LZ $\Rightarrow \varphi(\bar{u}_1), \dots \varphi(\bar{u}_k) \in V'$ jsou LZ.

Otázka: ① Jak se lineární zobrazení chová k LN vektorům? (Někdy se v lin. zobrazení LN vektory zobrazí na LN vektory, jindy na LZ).

② Jak se lineární zobrazení chová vůči podprostorům ve V

• Nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení; $A \subseteq V$; $A \neq \emptyset$, pak

$$\boxed{\varphi(A) = \{ x' \in V' \mid \exists \bar{u} \in A \text{ tak, že } \varphi(\bar{u}) = x' \}}$$

Platí: Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, nechť U je podprostor ve V. Pak:

1, $\varphi(U)$ je podprostor ve V'

2, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ generátory $U \Rightarrow \varphi(\bar{u}_1), \dots, \varphi(\bar{u}_k)$ jsou generátory $\varphi(U)$

3, $\dim \varphi(U) \leq \dim U$

Věta Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T; nechť $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ je báze prostoru V a nechť $\bar{v}_1', \dots, \bar{v}_n'$ jsou libovolné vektory z V'. Pak existuje jediné lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že $\boxed{\varphi(\bar{u}_1) = \bar{v}_1', \dots \varphi(\bar{u}_n) = \bar{v}_n'}$

Definice Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak

1, množina $\operatorname{Ker} \varphi = \{ \bar{u} \in V \mid \varphi(\bar{u}) = \bar{o}' \}$ se nazývá jádro lineárního zobrazení.

2, množina $\operatorname{Im} \varphi = \varphi(V)$ se nazývá obraz lineárního zobrazení φ.

Platí:
- $\operatorname{Ker} \varphi$ je podprostorem ve V
- $\operatorname{Im} \varphi$ je podprostorem ve V'
- $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, pak φ je injektivní $\iff \operatorname{Ker} \varphi = \{ \bar{o} \}$
- $\boxed{\dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim V}$

Definice Nechť V je vektor. prostor nad V. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ se nazývá lineární transformace vektorového prostoru V.

- Nechť φ je lineární transformace prostoru V; $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ je pevná báze prostoru V a platí:

$$\varphi(\bar{u}_1) = a_{11} \cdot \bar{u}_1 + a_{21} \cdot \bar{u}_2 + \dots + a_{n1} \bar{u}_n$$
$$\varphi(\bar{u}_2) = a_{12} \cdot \bar{u}_1 + a_{22} \cdot \bar{u}_2 + \dots + a_{n2} \cdot \bar{u}_n$$
$$\vdots$$
$$\varphi(u_n) = a_{1n} \bar{u}_1 + a_{2n} \cdot \bar{u}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \bar{u}_n.$$

Pak matice

$$A = \begin{array}{c} \downarrow \varphi(u_1) \qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

se nazývá matice lineární transformace v bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$

- Souřadnice vektoru $\varphi(u_j)$ v bázi $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ jsou v j-tém sloupci matice A.

PŘÍKLAD Pro zadané lineární zobrazení φ naleznite jeho jádro $\mathrm{Ker}\,\varphi$, obraz $\mathrm{Im}\,\varphi$. Přitom:

a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi(\bar{x}) = \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$

1, Hledáme $\mathrm{Ker}\,\varphi$, tzn. hledáme vektory $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, pro které

$$\varphi(\bar{x}) = (x_1 + x_2;\ x_2 + x_3;\ x_3 + x_1;\ x_1) = (0, 0, 0, 0), \text{ tj.}$$

získáme homogenní soustavu lin. rovnic

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_1 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ soustava lineárních rovnic:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}}, \text{ tj. } \mathrm{Ker}\,\varphi = \{\bar{o}\} = \{(0,0,0)\}$$

2, Hledáme $\mathrm{Im}\,\varphi$, tzn. hledáme obraz $\mathrm{Im}\,\varphi = \varphi(\mathbb{R}^3)$.

Pro dimenze platí : $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim V$.

$$\left.\begin{aligned} &\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 0 \\ &\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 3}$$

. Tzn. stačí z $\mathbb{R}^3$ vybrat tři lineárně nezávislé vektory a určit jejich obrazy.

3 Lineárně nezávislé vektory z $\mathbb{R}^3$ jsou např.

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= (1,0,0) \\ \bar{u}_2 &= (0,1,0) \\ \bar{u}_3 &= (0,0,1) \end{aligned}\right\} \text{jejich obrazy} \left\{\begin{aligned} \varphi(\bar{u}_1) &= (1,0,1,1) \\ \varphi(\bar{u}_2) &= (1,1,0,0) \\ \varphi(\bar{u}_3) &= (0,1,1,0) \end{aligned}\right.$$

(dosadíme do předpisu lineár. zobrazení (tzn. do zadání)

Tzn. $\mathrm{Im}\,\varphi = L((\varphi(\bar{u}_1), \varphi(\bar{u}_2), \varphi(\bar{u}_3)) = L((1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0))$

(B) $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 5x_1 + 2x_2 + 3x_3; 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)$

1, Hledáme Ker φ, tzn. hledáme vektory z $\mathbb{R}^4$, pro které

$\varphi(\bar{x}) = \bar{o}$

$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{array}{c} \cdot(-5) \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_4 &= s \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 11t + 5s \end{aligned}}$$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$3x_1 - t + 22t + 10s - s = 0$

$3x_1 + 21t + 9s = 0$

$\boxed{x_1 = -7t - 3s}$

Určíme bázové vektory

Ker φ: $s=0, t=1$: $\bar{u}_1 = (-7, 1, 11, 0)$

$s=1, t=0$: $\bar{u}_2 = (-3, 0, 5, 1)$

Ker $\varphi = L(\bar{u}_1, \bar{u}_2) =$

$= L((-7,1,11,0), (-3,0,5,1))$

dim Ker $\varphi = 2$

2, Hledáme Im $\varphi = \varphi(\mathbb{R}^4)$

dim Ker φ + dim Im φ = dim $\mathbb{R}^4$

dim Im $\varphi = 4 - 2 = 2$

Pro Im φ stačí vybrat 2 LN z $\mathbb{R}^4$ a dosadit do předpisu

např. $\bar{v}_1 = (1,0,0,0)$ $\varphi(\bar{v}_1) = (3,5,2)$

$\bar{v}_2 = (0,1,0,0)$ $\varphi(\bar{v}_2) = (-1,2,3)$

$\Big\}$ Im $\varphi = \varphi(\mathbb{R}^4) = L((3,5,2), (-1,2,3))$

(Další 2 LN vektory z $\mathbb{R}^4$: jejich obrazy budou LZ/závislé s $\varphi(\bar{v}_1), \varphi(\bar{v}_2)$. Např: $\bar{v}_3 = (0,0,0,1)$: $\varphi(\bar{v}_3) = (-1, 0, -1)$

$\bar{v}_4 = (0,0,1,0)$: $\varphi(\bar{v}_4) = (2, 3, 1)$

tj. $\varphi(\bar{v}_3), \varphi(\bar{v}_4) \in$ Im φ

(c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde φ je zadáno určením obrazů báze:

$\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$

$\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$ $\qquad \bar{u}_1 = (1,2,1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{u}_2 = (0,1,2)$

$\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$, kde $\bar{u}_3 = (1,0,-1)$

1, pro vektory, které náleží do jádra $Ker\varphi$ platí:

$$\bar{x} = t_1 \cdot \bar{u}_1 + t_2 \cdot \bar{u}_2 + t_3 \cdot \bar{u}_3 \text{ , kde } \varphi(x) = \bar{o} \quad \text{Platí}$$

$$\varphi(\bar{x}) = t_1 \cdot \varphi(\bar{u}_1) + t_2 \cdot \varphi(\bar{u}_2) + t_3 \cdot \varphi(\bar{u}_3)$$

$$t_1 \cdot \varphi(\bar{u}_1) + t_2 \cdot \varphi(u_2) + t_3 \cdot \varphi(\bar{u}_3) = \bar{o}$$

$$t_1 \cdot (-1,1,1,1) + t_2 \cdot (1,0,0,1) + t_3 (0,1,1,2) = o$$

Porovnáním složek dostáváme

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t_3 = t \\ t_2 = -t \\ t_1 = t_2 = -t \end{array}$$

$\bar{x} \in Ker\varphi$: $\quad \bar{x} = t_1 \bar{u}_1 + t_2 \bar{u}_2 + t_3 \cdot \bar{u}_3$

$\qquad \bar{x} = -t \cdot (1,2,1) + (-t) \cdot (0,1,2) + t \cdot (1,0,-1)$

za t zvolíme

$t = 1$: $\quad \bar{x} = -(1,2,1) + (-1) \cdot (0,1,2) + (1,0,-1) =$

$\qquad = (-1,-2,-1) + (0,-1,-2) + (1,0,-1) = (0,-3,-4)$

$$Ker\varphi = L(\bar{x}) = L((0,3,4))$$

2, hledáme $Im\varphi$, tzn. hledáme bázi $Im\varphi$. Víme, že obraz $Im\varphi$ je generován vektory $\varphi(\bar{u}_1)$, $\varphi(\bar{u}_2)$, $\varphi(\bar{u}_3)$, tzn. hledáme bázi generovanou těmito vektory, tj. vybereme z těchto vektorů LN:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Im\, \varphi = L((-1,1,1,1),(0,1,1,2))}}$$

PŘÍKLAD Nechť lineární transformace φ prostoru $\mathbb{R}^3$ má v bázi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

-Nalezněte matici $X = (x_{ij})$ lineární transformace φ v bázi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$, kde

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= 2\cdot\bar{u}_1 + 3\cdot\bar{u}_2 + u_3 \\ \bar{v}_2 &= 3\cdot\bar{u}_1 + 4\cdot\bar{u}_2 + \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 &= \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Z definice matice lineární transformace plyne

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{u}_1) &= 3\cdot\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + 8\bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{u}_2) &= -2\cdot\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 7\bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{u}_3) &= -\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 6\bar{u}_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Z definice lineárního zobrazení a ze zadání (2) plyne:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\bar{v}_1) &= 2\cdot\varphi(\bar{u}_1) + 3\cdot\varphi(\bar{u}_2) + \varphi(\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_2) &= 3\cdot\varphi(\bar{u}_1) + 4\cdot\varphi(\bar{u}_2) + \varphi(\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_3) &= \varphi(\bar{u}_1) + 2\cdot\varphi(\bar{u}_2) + 2\cdot\varphi(\bar{u}_3) \end{aligned} \quad (3) \right\}$$ Dosadíme do (3) ze (4)

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{v}_1) &= 2\cdot(3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + 8\bar{u}_3) + 3(-2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 - 7\bar{u}_3) + (-\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 6\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_2) &= 3\cdot(3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + 8\bar{u}_3) + 4(-2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 - 7\bar{u}_3) + (-\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 6\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_3) &= (3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + 8\bar{u}_3) + 2(-2\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 - 7\bar{u}_3) + 2(-\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 6\bar{u}_3) \end{aligned}$$

upravíme a vyjádříme $\varphi(\bar{v}_1), \varphi(\bar{v}_2), \varphi(\bar{v}_3)$ pomocí bázových vektorů $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$:

$$(5)\quad \left.\begin{aligned} \varphi(\bar{v}_1) &= -\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{v}_2) &= \phantom{-3\bar{u}_1} + 2\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{v}_3) &= -3\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 6u_3 \end{aligned}\right\}$$

Vyjádření obrazů bázových vektorů $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ pomocí báz. vektorů $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Do matice X potřebujeme vyjádřit obrazy bázových vektorů $\varphi(\bar{v}_1), \varphi(\bar{v}_2), \varphi(\bar{v}_3)$ v bázi $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$, tj. hledáme vyjádření:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\bar{v}_1) &= x_{11}\cdot\bar{v}_1 + x_{21}\,\bar{v}_2 + x_{31}\cdot\bar{v}_3 \\ \varphi(\bar{v}_2) &= x_{12}\cdot\bar{v}_1 + x_{22}\,\bar{v}_2 + x_{32}\,\bar{v}_3 \\ \varphi(\bar{v}_3) &= x_{13}\cdot\bar{v}_1 + x_{23}\cdot\bar{v}_2 + x_{33}\cdot\bar{v}_3 \end{aligned}\right\} \implies$$

dosadíme za $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ z (2), tj. ze zadání

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\bar{v}_1) &= x_{11}(2\cdot\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{21}(3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{31}\cdot(\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_2) &= x_{12}\cdot(3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{22}\cdot(2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{32}\cdot(\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3) \\ \varphi(\bar{v}_3) &= x_{13}\cdot(2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{23}\cdot(3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + x_{33}\cdot(\bar{u}_1 + 2u_2 + 2u_3) \end{aligned}\right\} \text{upravíme}$$

$$(6)\quad \begin{aligned} \varphi(v_1) &= (2x_{11} + 3x_{21} + x_{31})\cdot\bar{u}_1 + (3x_{11} + 4x_{21} + 2x_{31})\cdot\bar{u}_2 + (x_{11} + x_{21} + 2x_{31})\cdot\bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{v}_2) &= (2x_{12} + 3x_{22} + x_{32})\cdot\bar{u}_1 + (3x_{12} + 4x_{22} + 2x_{32})\cdot\bar{u}_2 + (x_{12} + x_{22} + 2x_{32})\cdot\bar{u}_3 \\ \varphi(\bar{v}_3) &= (2x_{13} + 3x_{23} + x_{33})\cdot\bar{u}_1 + (3x_{13} + 4x_{23} + 2x_{33})\cdot\bar{u}_2 + (x_{13} + x_{23} + 2x_{33})\cdot\bar{u}_3 \end{aligned}$$

Porovnáme (5), (6) pro jednotlivé $\varphi(\bar{v}_1), \varphi(\bar{v}_2), \varphi(\bar{v}_3)$

$\underline{\varphi(\bar{v}_1)}$:

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} + x_{31} &= -1 \\ 3x_{11} + 4x_{21} + 2x_{31} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + 2x_{31} &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_{31} &= -1 \\ x_{21} &= -6 \\ x_{11} &= 9 \end{aligned}}$$

tzn: $\boxed{\varphi(\bar{v}_1) = 9\bar{v}_1 - 6\bar{v}_2 - \bar{v}_3}$

8

$\underline{\varphi(\bar{v}_2)}$:

$$2x_{12} + 3x_{22} + x_{32} = 0$$
$$3x_{12} + 4x_{22} + 2x_{32} = 2$$
$$x_{12} + x_{22} + 2x_{32} = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_{32} = 0 \\ x_{22} = -4 \\ x_{12} = 6 \end{array}}$$

$$\boxed{\varphi(\bar{v}_2) = 6 \cdot \bar{v}_1 + 4\bar{v}_2}$$

$\underline{\varphi(v_3)}$:

$$2x_{13} + 3x_{23} + x_{33} = -3$$
$$3x_{13} + 4x_{23} + 2x_{33} = 2$$
$$x_{13} + x_{23} + 2x_{33} = 6$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -16 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_{33} = 1 \\ x_{23} = -12 \\ x_{13} = 16 \end{array}}$$

$$\boxed{\varphi(v_3) = 16\bar{v}_1 - 12\bar{v}_2 + v_3}$$

$$\text{Matice } X = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 16 \\ -6 & -4 & -12 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$