- Matice přechodu od jedné báze ke druhé ve stejném prostoru představuje zobrazení, kterému říkáme automorfismus (= izomorfismus vektorového prostoru do sebe sama, def. 33/str. 92)

Kolega Horák asi nyní začíná mluvit o matici lineární transformace (singulární) nebo matici automorfismu (regulární) (def. 34/str. 93), ostatně svou matici má obecně každé lineární zobrazení mezi dvěma (i různými) vektorovými prostory, jak jsme o tom mluvili minulý týden.

Příklady pro cvičení (ještě téma minulého týdne): Kovár str. 112 pdf / př. 12, 13, 14, 15

Podívejme se nyní na dva příklady, ve kterých budeme skládat lineární zobrazení jedno za druhým — hypoteticky bude platit jedna věc, kterou by student možná už čekal: matici složeného lineárního zobrazení najdeme jako součin matic lineárních zobrazení, která skládáme dohromady

## Příklad – skládání zobrazení 01 : (Kovár, př. 16 / str. 113 pdf)

Zadání: Lineární zobrazení $\varphi: R^3 \to R^2$ je dáno vztahem $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

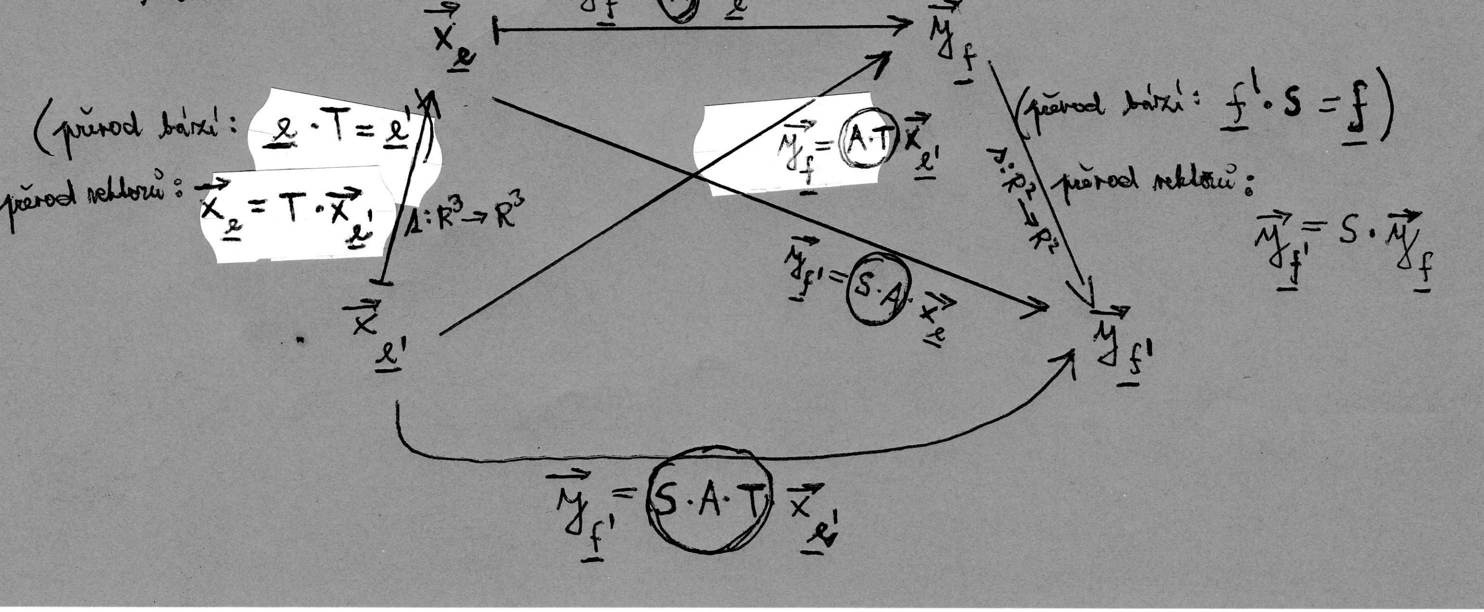
v $R^3$ je dána standardní kanonická báze $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ a ještě báze $\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$,

v $R^2$ je dána standardní kanonická báze $\underline{f} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ a ještě báze $\underline{f}' = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$.

Najděte matici zobrazení $\varphi$ pro všechny čtyři kombinace volby báze v $R^3$ a $R^2$

---

Řešení: hledáme zakroužkované matice



Vypočítáme si nejdříve matice přechodu T, S, které budeme potřebovat:

přechod $\underline{e} \to \underline{e}'$ : $\quad \underline{e} \cdot T = \underline{e}'$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

... protože $\underline{e}$ je jednotková matice, $T = \underline{e}'$ ... matici T získáme přímo ze sloupcových vektorů $\underline{e}'$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

přechod $\underline{f}' \to \underline{f}$ : $\quad \underline{f}' S = \underline{f}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot S = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

... protože $\underline{f}$ je jednotková matice, S získáme invertováním matice $\underline{f}'$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} : \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) {+r_1}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} \end{array}\right) {-2 \cdot r_2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$S = \begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dále určíme matici A v kanonických bázích:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = {}_{\underline{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

další tři matice zobrazení φ v jedné či obou posunutých bázích již vyvozují z faktu, že matice složeného zobrazení je rovna součinu matic skládaných zobrazení

POZOR na pořadí matic:

DRUHÉ SKLÁDANÉ ZOBRAZENÍ VSTUPUJE DO SOUČINU MATIC JAKO PRVNÍ (ale zápis „po" vlastně zachovaný, že graficky je pořadí zobrazení a matic shodné)

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}$:

$$\varphi_{\underline{e}',\underline{f}}(\vec{x}_{\underline{e}'}) = \varphi \underset{\text{po}}{\circ} t(\vec{x}_{\underline{e}'}) = (A \cdot T) \cdot \vec{x}_{\underline{e}'}$$

$$A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}_{\underline{e}'}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}'$:

$$\varphi_{\underline{e},\underline{f}'}(\vec{x}_{\underline{e}}) = s \circ \varphi(\vec{x}_{\underline{e}}) = (S \cdot A) \cdot \vec{x}_{\underline{e}}$$

$$S \cdot A = \begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = {}_{\underline{e}}\begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{3} \end{pmatrix}_{\underline{f}'}$$

φ v bázích $\underline{e}', \underline{f}'$: $\varphi_{\underline{e}',\underline{f}'} = s\circ\varphi\circ t(\vec{x}_{\underline{e}'}) = (S\cdot A\cdot T)\,\vec{x}_{\underline{e}'}$

$$S\cdot A\cdot T = S\cdot(A\cdot T) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}_{\underline{e}'} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}_{\underline{f}'}$$

využijeme asociativitu pro součin, co už umíme

$\boxed{\text{!!! je dobré poslat } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\underline{e}'} \text{ diagramem !!!}}$

## Příklad – skládání zobrazení 02 (Horák, př. 35, str. 35 ale ve zkratce !!!)

**Zadání:** Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ je maticí lineární transformace $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\underline{u} = \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, kterou neznáme.

Zato známe vektory $\underline{N} = \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ vyjádřené v souřadnicích báze $\underline{u}$:

$$\vec{N}_1 = 2\cdot\vec{u}_1 + 3\cdot\vec{u}_2 + \vec{u}_3$$
$$\vec{N}_2 = 3\cdot\vec{u}_1 + 4\cdot\vec{u}_2 + \vec{u}_3$$
$$\vec{N}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$$

Vyjádřete transformaci φ maticí v bázi $\underline{N}$.

**Řešení:** hledáme zakroužkovanou matici

místo matice S máme oproti minulému příkladu matici $T^{-1}$, protože

$$\begin{array}{ccc}
\vec{x}_{\underline{u}} & \xrightarrow{\ \varphi(\vec{x}_{\underline{u}}) = \vec{y}_{\underline{u}} = A\cdot\vec{x}_{\underline{u}}\ } & \vec{y}_{\underline{u}} \\
\uparrow & & \downarrow \\
\vec{x}_{\underline{N}} & \xrightarrow{\ \varphi(\vec{x}_{\underline{N}}) = \vec{y}_{\underline{N}} = \underbrace{(T^{-1}\cdot A\cdot T)}_{B}\ \vec{x}_{\underline{N}}\ } & \vec{y}_{\underline{N}}
\end{array}$$

(převod báze: $\underline{u}\cdot T = \underline{N}$)
převod vektorů: $\vec{x}_{\underline{u}} = T\cdot\vec{x}_{\underline{N}}$

(převod bází: $\underline{N}\cdot T^{-1} = \underline{u}$)
převod vektorů: $\vec{y}_{\underline{N}} = T^{-1}\cdot\vec{y}_{\underline{u}}$

Vypočítáme si nejdříve matice přechodu $T$ a $T^{-1}$: ze zadání bez problémů získáme matici $T$:

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

matice, kde $\vec{N}_i$ jsou ve sloupcích

matice, kde vektory $\vec{u}_i$ jsou ve sloupcích

pouze jsme transponovali matici ze zadání, aby odpovídala rovnicím:

souřadnice $\vec{N}_1$ v bázi $\underline{u}$

souřadnice $\vec{N}_2$ v bázi $\underline{u}$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

souřadnice $\vec{N}_3$ v bázi $\underline{u}$

systém ze zadání

sloupec $\vec{N}_1$ = sloupec $\vec{u}_1\cdot 2$ + sloupec $\vec{u}_2\cdot 3$ + sl $\vec{u}_3\cdot 1$

sloupec $\vec{N}_2$ = sloupec $\vec{u}_1\cdot 3$ + sl $\vec{u}_2\cdot 4$ + sl $\vec{u}_3\cdot 1$

sloupec $\vec{N}_3$ = sl $\vec{u}_1\cdot 1$ + sl $\vec{u}_2\cdot 2$ + sl $\vec{u}_3\cdot 2$

nyní (1. způsob řešení) a) lze vypočítat $T^{-1}$ a b) maticovým násobením získat $\mathbb{B} = T^{-1}\cdot A\cdot T$

nebo (2. způsob řešení) $B = T^{-1}\cdot A\cdot T \;/\cdot T$ zleva

$$T\cdot B = A\cdot T$$

$\Downarrow$ tj. a) lze vynásobit $A\cdot T$

zleva vyeliminujeme úpravy $T^{-1}$ a dostaneme $E_1$ vpravo tím pádem dostaneme $B = T^{-1}AT$

b) $(T\,|\,A\cdot T)$ upravujeme tak, abychom zleva dostali $E_3$, pak vpravo bude $\mathbb{B}$

(B je vlastně získaná matice přechodu, tj. najdeme ji podobně jako matici přechodu)

vlastně současně řešíme tři systémy rovnic

$$T\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix} = (A\cdot T)_{1.\,\text{sloupec}}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix} = (A\cdot T)_{2.\,\text{sloupec}}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{pmatrix} = (A\cdot T)_{3.\,\text{sloupec}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1\\ 4 & -3 & 2\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

ad a)

$$A\cdot T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1\\ 4 & -3 & 2\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

ad b)

$(T\,|\,AT)$... na levé straně vyeliminujeme úpravy $T^{-1}$ na matici $E$, současně na pravé straně vzniká matice $T^{-1}\cdot A\cdot T$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & -3\\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6\\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & -3\\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1\\ -3\cdot r_1\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 & -15\\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 & -16\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 & -15\\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1\end{array}\right)\begin{array}{l} -2\cdot r_3\\ +3\cdot r_3\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{1} & 0 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -6 & -4 & -12\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 6 & 16\\ 0 & 1 & 0 & -6 & -4 & -12\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 16\\ -6 & -4 & -12\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbb{B}$$

**Def.**: $A, B$ jsou tedy matice téže lineární transformace $\varphi$ v různých bázích. Takové matice ||| podobné matice

(definice 35/str. 96): $A, B$ ||| podobné, jestliže $\exists$ regulární $T$: $\underline{B = T^{-1}\cdot A\cdot T}$

**Př.** – Kovár, str. 88 – spíše do cvičení – př. 3.16, 3.17