**CVIČENÍ Z ALGEBRY
A TEORETICKÉ ARITMETIKY I.**

RNDr. Pavel Horák

Vydala Masarykova univerzita v Brně roku 2002

První dotisk druhého vydání, 2002
Vysázeno systémem AMSTEX
Tisk: Vydavatelství MU, Brno-Kraví Hora
221 stran
10,03 AA   10,24 VA

Náklad 500 výtisků
Pořadové číslo 3631–17/31
ISBN 80–210–1853–4
Doporučená cena: 70,– Kč

Tato publikace neprošla redakční ani
jazykovou úpravou v redakci vydavatele.

Pavel Horák • Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.

MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

PAVEL HORÁK

CVIČENÍ Z ALGEBRY
A TEORETICKÉ ARITMETIKY I.

Brno 2002

Druhé vydání

Strana 144, příklad [6.2.B7], část f):

$\mathbf{u}_3 = (1, 2, -2, 0, 0)$

Strana 146, příklad [6.2.B13]:

$\mathbf{x} \in W^{\perp} \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_k$.

Strana 154, příklad [7.2.A3]:

U.p. neidentické lineární transformace φ vektorového ...

Strana 164, příklad [7.4.A5]:

U.p. euklidovského prostoru, který je izomorfní s ...

Strana 164, příklad [7.4.A8]:

U.p. ortogonálních matic ...

Strana 171, příklad [1.4.B4]:

Návod: a) dokazujte jako množinovou rovnost.

Strana 178, příklad [1.7.B2]:

a) 2 rozklady

Strana 187, příklad [3.2.A4]:

a) neexistuje, b) neexistuje, c) neexistuje

Strana 202, příklad [4.4.B15]:

a) pro $a = 0$; $\dim W = 3$

ÚVOD

Tento učební text je určen především posluchačům studia učitelství s matematikou na přírodovědeckých a pedagogických fakultách, a to pro cvičení v předmětu "Algebra a teoretická aritmetika". Výběr témat odpovídá látce probírané v tomto předmětu obvykle v 1. a 2. semestru studia. Konkretní členění je provedeno tak, že přesně odpovídá členění ve skriptech [7] (Algebra a teoretická aritmetika I.), používaných t.č. na přírodovědecké a pedagogické fakultě Masarykovy University v Brně. Z těchto skript je rovněž důsledně převzata i veškerá symbolika a názvosloví.

Učební text obsahuje celkem 1800 příkladů a cvičení, ze značné části původních. Jsou zastoupeny jednak ukázkově vyřešené příklady a jednak (a to z převážné části) úlohy určené k samostatnému procvičování. Obtížnost těchto úloh je na základě dlouholetých zkušeností zvolena tak, aby odpovídala úrovni a možnostem běžného posluchače učitelského studia s matematikou. Je zařazeno i dostatečné množství jednodušších příkladů, jejichž vyřešení by mělo přinést jisté uspokojení i slabšímu studentovi, a tím jej dále motivovalo. Zájemce o řešení obtížných úloh, resp. úloh přesahujících rámec zmíněného kurzu algebry je možno odkázat na literaturu a sbírky příkladů uvedené na konci textu. Seznam literatury obsahuje kromě titulů pokrývajících a rozšiřujících studovanou problematiku též tituly poskytující různé zajímavé pohledy na ni. Cizojazyčné monografie jsou uvedeny především z jazykových důvodů.

Množství uvedených příkladů by mělo být dostačující k tomu, aby práce ve cvičeních z algebry byla zajímavá a umožňovala vyučujícímu individualizovat práci studentů. Na druhé straně by samostatné řešení těchto příkladů mělo studentům pomoci zlepšit jejich početní zručnost a ulehčit jim aktivní zvládnutí studované problematiky.

Autor textu si je vědom toho, že i přes veškerou péči, kterou jeho přípravě věnoval, se v něm asi občas objeví chyba nebo překlep. Bude proto vděčen za upozornění na jakékoliv nedostatky v textu a uvítá všechny náměty k jeho zlepšení.

ZÁKLADNÍ POUŽITÉ SYMBOLY A OZNAČENÍ.

$\mathbf{N}$	přirozená čísla, tzn. $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbf{Z}$	celá čísla
$k\cdot\mathbf{Z}$	množina všech celých násobků čísla k, kde $k \geq 0$ je pevné celé číslo
$\mathbf{Q}$	racionální čísla
$\mathbf{Q}^+$	kladná racionální čísla
$\mathbf{R}$	reálná čísla
$\mathbf{R}^+$	kladná reálná čísla
$\mathbf{K}$	komplexní čísla
$\mathbf{Z}_m$	množina všech zbytkových tříd podle modulu m
$\langle a,b\rangle$	uzavřený reálný interval, tzn. $\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(a,b)	otevřený reálný interval, tzn. $\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ nebo uspořádaná dvojice prvků nebo kladný největší společný dělitel dvou čísel
2^A	systém všech podmnožin množiny A
B^A	systém všech zobrazení $A \longrightarrow B$
$\subseteq$	neostrá množinová inkluze
$\subset$	ostrá množinová inkluze

Všechny ostatní použité symboly a označení jsou převzaty ze skript [7] (Algebra a teoretická aritmetika I.) nebo jsou přímo vysvětleny v textu.

I. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Tato část textu obsahuje celkem 36 vyřešených příkladů vztahujících se k probírané problematice. Příklady zachovávají pořadí v jakém jsou jednotlivé celky dále řazeny za sebou, avšak nejsou formálně rozděleny do kapitol a paragrafů. Každý čtenář jistě i bez nápovědy pozná, kam má který příklad zařadit.

Příklady jsou vybírány s úmyslem ukázat základní obraty a početní postupy používané při řešení konkrétních úloh a cvičení vztahujících se k dané problematice. Vzhledem k omezenému rozsahu textu není samozřejmě možné zařadit všechny typy úloh, které jsou v dalších kapitolách procvičovány. Ze stejného důvodu nejsou též uvedeny ty příklady, které jsou jako ukázkové zařazeny a vyřešeny ve skriptech [7] (Algebra a teoretická aritmetika I.).

U některých vyřešených příkladů je formou poznámky uvedeno shrnutí či zobecnění daného problému, resp. upozornění na důležité momenty, které by si při řešení daného typu problémů měl každý dobře uvědomit.

PŘÍKLAD 1. Dokažte, že pro každé reálné číslo $a > 0$ a pro každé celé číslo $n \geq 2$ platí nerovnost:

$$(1+a)^n \;>\; 1+n\cdot a\,.$$

Řešení: důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k n. Nechť tedy je $a \in \mathbf{R} \ \wedge\ a > 0$. Pak:

α) pro $n = 2$ je: $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$, protože podle předpokladu je $a^2 > 0$. Ukázali jsme tedy, že pro $n = 2$ dokazované tvrzení platí.

β) předpokládáme, že dokazované tvrzení platí pro $2,\dots,n-1$ (tzn. $n \geq 3$) a budeme dokazovat jeho platnost pro n. Podle právě vysloveného předpokladu platí: $(1+a)^{n-1} > 1+(n-1)a$. Dále je $a > 0$ a tedy $1+a > 0$ a po vynásobení obou stran poslední nerovnosti číslem $1+a$ tak dostaneme:

$$(1+a)^n > (1+(n-1)\,a)\cdot(1+a) = 1+na+(n-1)\,a^2\,.$$

Ale $(n-1)\cdot a^2 > 0$ (proč?), a tedy: $1 + na + (n-1)a^2 > 1 + na$, tzn. dohromady: $(1+a)^n > 1 + n\cdot a$, což jsme měli dokázat.

Poznámka: předchozí příklad je ukázkou důkazu matematickou indukcí. Uvědomte si, že aby použití matematické indukce při důkazu nějakého tvrzení vůbec přicházelo v úvahu, musí mít toto tvrzení určitý, specifický tvar (za jistých předpokladů platí výrok $V(n)$, pro každé celé číslo $n \geq n_0$). Na druhé straně však, má-li dokazované tvrzení uvedený tvar, neznamená to, že se při jeho důkazu matematická indukce použít musí.

PŘÍKLAD 2. Nechť I je neprázdná indexová množina, nechť A_i (pro $i \in I$) a B jsou množiny. Dokažte, že platí:

$$B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i).$$

Řešení: jedná se o rovnost množin, kterou dokážeme tak, že postupně dokážeme dvě množinové inkluze, a to:

a) "$\subseteq$":

nechť $x \in B - \bigcup_{i\in I} A_i$. Pak je $x \in B$ a zároveň $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$. Tedy, $x \in B$ a zároveň $x \notin A_i$ pro každé $i \in I$, což však znamená, že $x \in B - A_i$ pro každé $i \in I$. Dostáváme tak, že $x \in \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$.

b) "$\supseteq$":

$x \in \bigcap_{i\in I}(B - A_i) \implies x \in B - A_i$, pro každé $i \in I \implies x \in B \wedge x \notin A_i$, pro každé $i \in I \implies x \in B \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \implies x \in B - \bigcup_{i\in I} A_i$.

Poznámka: uvedené řešení ukazuje typický důkaz množinové rovnosti. Při jeho zápisu obvykle místo slovních komentářů (viz a)) používáme spíše stručnějšího vyjadřování pomocí implikací a dalších logických spojek (viz b)).
Máme-li v dokazování množinových rovností dostatečnou praxi, můžeme často postupovat tak, že uvedenou rovnost dokazujeme "najednou", pomocí řetězce ekvivalentních výroků, jak je ukázáno v následujícím příkladu. Přitom je však třeba v každém kroku pečlivě "hlídat", že skutečně platí obě implikace, tj. jak "$\implies$" tak i "$\impliedby$".

Poznamenejme ještě, že při různých množinových úvahách je často potřeba vyjádřit skutečnost, že daný prvek neleží v průniku, rep. sjednocení, resp. rozdílu dvou množin. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} x \notin A \cup B &\iff x \notin A \wedge x \notin B \\ x \notin A \cap B &\iff x \notin A \vee x \notin B \\ x \notin A - B &\iff x \notin A \vee x \in B \end{aligned}$$

Všimněte si, jak se tyto obraty použijí při řešení následujícího příkladu.

PŘÍKLAD 3. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$$

kde symbol $\div$ značí symetrickou diferenci množin, tj.

$$X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
&x \in A \div (B \div C) \iff \\
&x \in [A - ((B-C)\cup(C-B))] \cup [((B-C)\cup(C-B)) - A] \iff \\
&[x \in A \wedge (x \notin B - C \wedge x \notin C - B)] \vee \\
&[(x \in B - C \vee x \in C - B) \wedge x \notin A] \iff \\
&[x \in A \wedge ((x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \notin C \vee x \in B))] \vee \\
&[((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B)) \wedge x \notin A] \iff \\
&(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B) \vee \\
&(x \in B \wedge x \notin C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin A) \iff \\
&[(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)] \vee \\
&[(x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)] \iff \\
&[((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C] \vee \\
&[x \in C \wedge ((x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in A))] \iff \\
&[(x \in A - B \vee x \in B - A) \wedge x \notin C] \vee \\
&[x \in C \wedge (x \notin A - B \wedge x \notin B - A)] \iff \\
&x \in [((A-B)\cup(B-A)) - C] \cup [C - ((A-B)\cup(B-A))] \iff \\
&x \in (A \div B) \div C.
\end{aligned}$$

Poznámka: pro základní množinové operace, tj. $\cup$, $\cap$, $-$, $\div$, $\times$ platí četná početní pravidla (výše uvedený příklad je ukázkou jednoho z nich). Známe-li tato pravidla, pak je můžeme mnohdy též použít k důkazu rovnosti dvou množin. Není tedy důkaz pomocí množinových inkluzí jedinou možnou metodou, jak dokázat rovnost dvou množin.

Například, víme-li, že pro libovolné množiny A, B, C platí (rozmyslete si podrobně, že tomu tak skutečně je):

$$A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad , \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

pak můžeme pomocí těchto "početních pravidel" lehce spočítat následující příklad.

Poznamenejme ještě, že aktivní zvládnutí takových vzorců znamená, že je umíme používat nejenom "zleva doprava" (tzn. tak, jak jsme navyklí je číst), ale také podle potřeby i "zprava doleva" a dále, že v nich jeden symbol (písmeno) umíme kdykoliv nahradit libovolným jiným symbolem, resp. skupinou symbolů.

PŘÍKLAD 4. Nechť A, B, C jsou libovolné množiny; dokažte, že platí:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Řešení: užitím vztahů uvedených v předchozí poznámce dostáváme:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup (B \cap C)) \cap (B \cup C) =$$

$$(A \cap (B \cup C)) \cup ((B \cap C) \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

čímž je uvedený vztah dokázán (poznamenejme snad ještě, že v posledním kroku jsme kromě již zmíněných vztahů též použili zřejmou rovnost: $(B \cap C) \cap (B \cup C) = B \cap C$).

PŘÍKLAD 5. Nechť ϱ_i je relace mezi množinami A, B pro každé $i \in I$ (kde $I \neq \emptyset$ je nějaká indexová množina) a nechť σ je relace mezi množinami B a C. Dokažte, že platí:

$$\sigma \circ \bigcup_{i \in I} \varrho_i = \bigcup_{i \in I} (\sigma \circ \varrho_i).$$

Řešení: na levé i pravé straně dokazované rovnosti jsou relace mezi množinami A a C, tzn. jisté podmnožiny kartézského součinu $A \times C$. Dokazovaná rovnost je tedy rovností mezi dvěma množinami a budeme ji dokazovat tak, že ověříme platnost obou množinových inkluzí:

"$\subseteq$": $(x, y) \in \sigma \circ \bigcup_{i \in I} \varrho_i \Longrightarrow$ (podle definice složené relace) existuje $b \in B$ takové, že $(x, b) \in \bigcup_{i \in I} \varrho_i \ \wedge \ (b, y) \in \sigma$. Potom (podle definice množinového sjednocení) existuje index $k \in I$ tak, že $(x, b) \in \varrho_k$, tzn. $(x, y) \in \sigma \circ \varrho_k$, neboli $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\sigma \circ \varrho_i)$.

"$\supseteq$": $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} (\sigma \circ \varrho_i) \Longrightarrow$ (podle definice množinového sjednocení) existuje index $k \in I$ tak, že $(x, y) \in \sigma \circ \varrho_k \Longrightarrow$ (podle definice složené relace) existuje prvek $b \in B$ takový, že $(x, b) \in \varrho_k \ \wedge$ $(b, y) \in \sigma \Longrightarrow (x, b) \in \bigcup_{i \in I} \varrho_i \ \wedge \ (b, y) \in \sigma \Longrightarrow (x, y) \in \sigma \circ \bigcup_{i \in I} \varrho_i$.

PŘÍKLAD 6. Nechť na množině M je dána relace ϱ, která je reflexivní a tranzitivní.

Dokažte, že pak relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je ekvivalencí na množině M.

Řešení: musíme dokázat, že relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je:

a) reflexivní:
nechť $x \in M$ je libovolný prvek. Ale relace ϱ je podle předpokladu reflexivní, tzn. platí $x \varrho x$, odkud dále podle definice inverzní relace dostáváme, že $x \varrho^{-1} x$. Dohromady je tak: $x (\varrho \cap \varrho^{-1}) x$ a tedy relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je reflexivní.

b) symetrická:
nechť $x (\varrho \cap \varrho^{-1}) y$. Pak $x \varrho y \ \wedge \ x \varrho^{-1} y$, odkud podle definice inverzní relace dostáváme: $y \varrho^{-1} x \ \wedge \ y \varrho x$. Tedy: $y (\varrho \cap \varrho^{-1}) x$ a relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je symetrická.

c) tranzitivní:
nechť $x (\varrho \cap \varrho^{-1}) y \ \wedge \ y (\varrho \cap \varrho^{-1}) z$. Pak $x \varrho y \ \wedge \ x \varrho^{-1} y \ \wedge \ y \varrho z \ \wedge \ y \varrho^{-1} z$. Přepsáním a užitím definice inverzní relace dostáváme: $x \varrho y \ \wedge \ y \varrho z$, resp. $z \varrho y \ \wedge \ y \varrho x$, odkud podle předpokladu o tranzitivitě relace ϱ je: $x \varrho z \ \wedge \ z \varrho x$, neboli $x \varrho z \ \wedge \ x \varrho^{-1} z$. Dohromady pak: $x (\varrho \cap \varrho^{-1}) z$ a relace $\varrho \cap \varrho^{-1}$ je tedy tranzitivní.

PŘÍKLAD 7. Dokažte, že předpis f tvaru:

$$f(x) = 49x + 1 \quad , \quad \text{pro každé } x \in (0,2)$$

definuje zobrazení intervalu $(0,2)$ do intervalu $(1,100)$ a rozhodněte, zda toto zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní.

Řešení:

a) abychom dokázali, že předpis f definuje zobrazení $(0,2) \to (1,100)$, musíme ukázat, že pro libovolné $x \in (0,2)$ platí, že $f(x) \in (1,100)$.

Nechť tedy x je reálné číslo: $0 < x < 2$. Pak po vynásobení číslem 49 a přičtení 1 dostáváme:

$$49 \cdot 0 + 1 < 49 \cdot x + 1 < 49 \cdot 2 + 1 < 100,$$

neboli: $1 < f(x) < 100$.

b) budeme dokazovat, že zobrazení f je injektivní.
Nechť $x, y \in (0,2)$ takové, že $f(x) = f(y)$. Potom $49x + 1 = 49y + 1$, odkud plyne, že $x = y$. Tím jsme dokázali, že zobrazení f je injektivní.

c) z úvahy provedené v a) je vidět, že pro $0 < x < 2$ dostáváme: $1 < f(x) < 99$, a tedy např. reálné číslo $99 \in (1,100)$, přičemž toto číslo 99 nemá při zobrazení f žádný vzor. Tedy vidíme, že dané zobrazení f není surjektivní.

PŘÍKLAD 8. Zobrazení $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$ je definované takto: pro každé $A \in 2^{\mathbf{N}}$ je

$$f(A) = \begin{cases} 1 & \text{je-li množina } A \text{ konečná} \\ a_0 + 1 & \text{kde } a_0 \text{ je nejmenší číslo z } A\text{, je-li } A \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní.

Řešení:

a) zobrazení f není injektivní, neboť například pro $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ platí: $A \neq B$ a $f(A) = f(B)$.

b) zobrazení f je surjektivní, neboť pro libovolné číslo $u \in \mathbf{N}$ platí:
- je-li $u = 1$, pak jeho vzorem při zobrazení f je např. množina $\{1,2\}$
- je-li $u \neq 1$, pak jeho vzorem při zobrazení f je např. množina A tvaru

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq u - 1\} = \{u-1\,, u\,, u+1\,, u+2\,, \dots\}.$$

PŘÍKLAD 9. Nalezněte nějaké bijektivní zobrazení f otevřeného intervalu $(0,1)$ na uzavřený interval $\langle 0,1 \rangle$.

Řešení: Základní myšlenka konstrukce zobrazení f bude spočívat v tom, že část prvků intervalu $(0,1)$ zobrazíme identicky a část prvků budeme "přesouvat od středu tohoto intervalu ke krajům", a to takto:

a) vezmeme množinu čísel tvaru

$$\frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}\,, \ \text{tj. čísla} \ \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \frac{15}{32}, \dots$$

první z nich "přesuneme" do bodu 0 a dále pak na uvolněné místo "přesuneme" vždy následující číslo z uvažované množiny.

b) stejný trik provedeme v pravé polovině intervalu $(0,1)$ s čísly tvaru

$$\frac{2^n + 1}{2^{n+1}} \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}\,, \ \text{tj. s čísly} \ \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{17}{32}, \dots.$$

Zbývající čísla z intervalu $(0,1)$ zobrazíme identicky na sebe. (Nakreslete schematický obrázek a uvědomte si, že popsaná konstrukce může být úspěšná jedině tehdy, když přesouvaných čísel bude nekonečně mnoho.)

Přesně řečeno a zapsáno: nechť $M = \{\frac{2^n \pm 1}{2^{n+1}} \mid n = 1,2,3,\dots\}$; pak zobrazení $f : (0,1) \to \langle 0,1 \rangle$, definované pro $x \in (0,1)$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} & \text{je-li } x \in M \\ x & \text{je-li } x \notin M \end{cases}$$

je zřejmě injektivní, neboť pro $x, y \in (0,1) \wedge x \neq y$ z popsané konstrukce plyne, že $f(x) \neq f(y)$.

Zobrazení f je rovněž surjektivní, neboť pro libovolné $y \in \langle 0,1 \rangle$ platí: je-li $y = \frac{2^n \pm 1}{2^{n+1}}$ pro $n = 0,1,2,\dots$, pak jeho vzorem při f je číslo $\frac{2^{n+1} \pm 1}{2^{n+2}}$, resp. není-li y tohoto tvaru, pak jeho vzorem při zobrazení f je opět číslo y.

Dohromady dostáváme, že zobrazení $f : (0,1) \to \langle 0,1 \rangle$ je bijektivní.

Poznámka: máme-li dvě konečné množiny A, B, pak mezi nimi někdy lze a někdy nelze sestrojit bijektivní zobrazení. Přesněji řečeno, bijektivní zobrazení $A \to B$ existuje právě tehdy, když množiny A, B mají stejný počet prvků.

Pro nekonečné množiny je situace v tomto směru do jisté míry podobná, i když je potřeba při úvahách o "stejném počtu prvků" (ve smyslu existence bijekce) být mnohem opatrnější. Víme např., že mezi množinami **N** a **Z**, resp. **N** a **Q**, resp. **Z** a **Q** existují bijekce (zopakujte si, jak tyto bijekce vypadají!), avšak následující příklad ukáže, že nelze sestrojit bijektivní zobrazení např. mezi množinami **N** a **R**. Vidíme tedy, že i mezi nekonečnými množinami bijektivní zobrazení někdy lze a někdy nelze sestrojit.

PŘÍKLAD 10. Nechť $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ je libovolné, pevné zobrazení. Dokažte, že zobrazení f není surjektivní.

Řešení: v důkazu použijeme některé vlastnosti reálných čísel, známé ze střední školy. Konkretně, každé reálné číslo x lze zřejmě jednoznačně zapsat ve tvaru:

$$x = z + d \quad , \quad \text{kde} \quad z \in \mathbf{Z} \ \wedge \ d \in \langle 0, 1) .$$

Přitom každé číslo d z intervalu $\langle 0,1)$ má v dekadickém tvaru jednoznačný zápis (vyloučíme-li zápisy, ve kterých se od jistého desetinného místa stále opakuje číslo 9), který označíme takto:

$$d = 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

kde d_i značí dekadické cifry, tzn. d_i jsou celá čísla $\wedge \ 0 \leq d_i \leq 9$.

Máme-li tedy dané zobrazení $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, pak lze podle předchozí úvahy jednoznačně psát:

$$\begin{aligned} f(1) &= z_1 + 0, d_{11} d_{21} d_{31} \dots d_{n1} \dots \\ f(2) &= z_2 + 0, d_{12} d_{22} d_{32} \dots d_{n2} \dots \\ &\vdots \\ f(n) &= z_n + 0, d_{1n} d_{2n} d_{3n} \dots d_{nn} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Důkaz, že zobrazení $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ není surjektivní provedeme nyní tak, že nalezneme konkretní reálné číslo, které při zobrazení f nemá žádný vzor. Zvolme čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ z množiny $\{0, 1\}$ tak, že

$$a_1 \neq d_{11}, \quad a_2 \neq d_{22}, \quad a_3 \neq d_{33}, \quad \dots, \quad a_n \neq d_{nn}, \quad \dots$$

(uvědomte si, že je to opravdu možné udělat). Potom např. číslo

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

(zapsáno dekadicky) je reálným číslem, přičemž zřejmě pro každé $k \in \mathbf{N}$ je $f(k) \neq a$. Tedy číslo $a \in \mathbf{R}$ nemá při zobrazení f žádný vzor, což znamená, že zobrazení f není surjektivní.

PŘÍKLAD 11. Na množině **K** všech komplexních čísel je definována relace ϱ takto: pro $a + bi, c + di \in \mathbf{K}$ je

$$(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \quad \Longleftrightarrow \quad (a < c) \ \vee \ (a = c \ \wedge \ b \leq d) .$$

Dokažte, že ϱ je relací lineárního uspořádání na **K**.

Řešení: dokazujeme, že relace ϱ je:

a) reflexivní:
nechť $(a + bi) \in \mathbf{K}$ libovolné. Pak podle definice relace ϱ je zřejmě $(a + bi)\,\varrho\,(a + bi)$.

b) antisymetrická:
nechť $(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \wedge (c + di)\,\varrho\,(a + bi)$. Pak podle definice relace ϱ musí být $a = c \wedge b \leq d \wedge d \leq b$, odkud dostáváme, že $(a+bi) = (c+di)$.

c) tranzitivní:
nechť $(a + bi)\,\varrho\,(c + di) \ \wedge \ (c + di)\,\varrho\,(e + fi)$. Pak:

$$((a < c) \ \vee \ (a = c \ \wedge \ b \leq d)) \ \wedge \ ((c < e) \ \vee \ (c = e \ \wedge \ d \leq f))$$

odkud rozborem všech možností vychází, že $(a + bi)\,\varrho\,(e + fi)$.

d) úplná:
nechť $(a + bi), (c + di) \in \mathbf{K}$ libovolné. Pak je zřejmě buď $a < c$ nebo $c < a$ nebo $a = c$, resp. kromě toho je $b \leq d$ nebo $d \leq b$. Rozborem všech možností vychází, že $(a + bi)\,\varrho\,(c + di)$ nebo $(c + di)\,\varrho\,(a + bi)$.

Dohromady tak dostáváme, že ϱ je relací lineárního uspořádání na množině všech komplexních čísel **K**.

Poznámka: v předchozím příkladu se nám podařilo množinu **K** všech komplexních čísel lineárně uspořádat. Její hasseovský diagram si můžeme schematicky představit tak, že vezmeme ty přímky v rovině, které jsou rovnoběžné se souřadnou osou y a všechny tyto přímky postupně směrem odleva doprava "poskládáme" nad sebe.

Na druhé straně je užitečné si uvědomit, že toto lineární uspořádání množiny **K** nemá všechny vlastnosti, na které jsme zvyklí u "obvyklého uspořádání čísel podle velikosti" na množinách **N**, **Z**, **Q** nebo **R**. Například známá vlastnost:

$$a \leq b \ \wedge \ c > 0 \quad \Longrightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c$$

zřejmě pro výše definované uspořádání ϱ na **K** neplatí (uveďte protipříklad).

PŘÍKLAD 12. Nechť A je libovolná pevná množina. Dokažte, že potom $(2^A, \div)$ je komutativní grupa.

Řešení: zřejmě pro libovolné A je $2^A \neq \emptyset$ a dále je rovněž zřejmé, že symetrická diference $\div$ je operací na množině 2^A, přičemž tato operace je jistě komutativní.

Podle Příkladu 3 je operace $\div$ též asociativní a dostáváme tak, že $(2^A, \div)$ je komutativní pologrupa.

Dále ukážeme, že $(2^A, \div)$ má neutrální prvek, jímž je $\emptyset$:
nechť $X \in 2^A$ libovolné; potom platí: $X \div \emptyset = (X - \emptyset) \cup (\emptyset - X) = X$.

Nakonec ukážeme, že ke každému prvku $X \in 2^A$ existuje prvek inverzní, jímž je v tomto případě opět prvek X:
podle definice $\div$ však platí: $X \div X = (X - X) \cup (X - X) = \emptyset$.

Dohromady jsme tedy dokázali, že $(2^A, \div)$ je komutativní grupa.

PŘÍKLAD 13. Nechť $(G, \cdot)$ je pologrupa. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $(G, \cdot)$ je grupa

(ii) existuje prvek $e \in G$ tak, že $e \cdot a = a$ pro každé $a \in G$ $\wedge$ ke každému prvku $a \in G$ existuje $x \in G$ tak, že $x \cdot a = e$.

Řešení:

"(i) $\Longrightarrow$ (ii)" : zřejmě platí, neboť za prvek e vezmeme jedničku grupy $(G, \cdot)$ a za prvek x vezmeme prvek a^{-1}.

"(ii) $\Longrightarrow$ (i)" : nechť $a \in G$ je libovolný prvek. Pak podle (ii) existuje prvek $x \in G$ a existuje prvek $y \in G$ tak, že platí:

$$x \cdot a = e \qquad \text{a} \qquad y \cdot x = e .$$

Nyní nejprve dokážeme, že prvek e je neutrálním prvkem pologrupy $(G, \cdot)$. Ale podle (ii) je: $e \cdot a = a$ a dále platí:

$$a \cdot e = e \cdot (a \cdot e) = (y \cdot x) \cdot (a \cdot e) = y \cdot (x \cdot a) \cdot e = y \cdot (e \cdot e) = y \cdot e =$$
$$= y \cdot (x \cdot a) = (y \cdot x) \cdot a = e \cdot a = a .$$

Nakonec dokážeme, že prvek x je inverzním prvkem k prvku a. Ale podle (ii) je: $x \cdot a = e$ a dále platí:

$$a \cdot x = e \cdot (a \cdot x) = (y \cdot x) \cdot (a \cdot x) = y \cdot (x \cdot a) \cdot x = y \cdot (e \cdot x) = y \cdot x = e .$$

Dokázali jsme tak, že $(G, \cdot)$ je grupa, tzn. platí (i).

Poznámka: předchozí příklad je velmi užitečný pro praktické výpočty, neboť nám ukazuje, že při zjišťování toho, zda je daná pologrupa grupou, stačí (bez ohledu na komutativnost či nekomutativnost operace) ověřovat pouze "polovinu" definice neutrálního prvku a odpovídající "polovinu" definice inverzního prvku. Jinak řečeno: k tomu, abychom dokázali, že daná pologrupa je grupou stačí dokázat, že tato pologrupa má "levou jedničku" a každý její prvek má "levou inverzi".

Dá se očekávat, že k předchozímu tvrzení bude platit tvrzení analogické, v němž se použije "druhá polovina" definice neutrálního prvku a "druhá polovina" definice inverzního prvku. Skutečně je tomu tak (viz cvičení [2.1.B18]), tzn. platí, že daná pologrupa je grupou právě tehdy, když v ní existuje "pravá jednička" a ke každému jejímu prvku existuje "pravá inverze".

PŘÍKLAD 14. Na množině $G = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	b	c	a
c	b	c	b	a
d	a	b	b	d

Nalezněte všechny podgrupoidy, resp. podpologrupy, resp. podgrupy zadaného grupoidu $(G, \cdot)$.

Řešení: nejprve uvažujeme postupně všechny neprázdné podmnožiny množiny G (kterých je celkem 15) a vyšetřujeme, zda jsou uzavřeny vzhledem k operaci $\cdot$. Po jednoduchém výpočtu dostáváme celkem 6 podgrupoidů $(H_i, \cdot)$, $1 \leq i \leq 6$, grupoidu $(G, \cdot)$, a to pro

$$H_1 = \{a\},\ H_2 = \{b\},\ H_3 = \{a, d\},\ H_4 = \{b, c\},\ H_5 = \{a, b, c\},\ H_6 = G.$$

Dále ověřujeme, zda v nalezených podgrupoidech platí asociativní zákon. Vyjde, že v $(H_5, \cdot)$ a $(H_6, \cdot)$ neplatí (neboť např. $a \cdot (a \cdot b) = b \neq c = (a \cdot a) \cdot b)$, resp. v ostatních případech platí. Dostáváme tak celkem 4 podpologrupy grupoidu $(G, \cdot)$, a to:

$$(H_1, \cdot),\ (H_2, \cdot),\ (H_3, \cdot),\ (H_4, \cdot).$$

Nakonec vyšetřujeme, které z podpologrup jsou podgrupami. Zřejmě $(H_3, \cdot)$ podgrupou není (neexistuje v ní neutrální prvek), kdežto ostatní jsou. Dostáváme tak celkem 3 podgrupy grupoidu $(G, \cdot)$, a to:

$$(H_1, .),\ (H_2, .),\ (H_4, .).$$

PŘÍKLAD 15. Nechť A je libovolná neprázdná množina. Uvažme množinu 2^A s operacemi symetrické diference $\div$ a množinového průniku $\cap$. Potom:

a) dokažte, že $(2^A, \div, \cap)$ je komutativní okruh s jedničkou

b) rozhodněte, pro jaké A je tento okruh oborem integrity.

Řešení:

a) pro množinu 2^A s operacemi $\div$ a $\cap$ ověříme definici komutativního okruhu s jedničkou:

1. platí, že $(2^A, \div)$ je komutativní grupa (viz Příklad 12); připomeňme, že roli nuly zde hraje prázdná množina $\emptyset$.
2. platí, že $(2^A, \cap)$ je komutativní pologrupa (plyne ihned ze známých vlastností množinového průniku). Dále je zřejmé, že jedničkou této pologrupy (tzn. neutrálním prvkem vzhledem k $\cap$) je množina A.
3. dokážeme, že platí distributivní zákony (zřejmě vzhledem ke komutativitě operace $\cap$ stačí ověřovat platnost pouze jednoho z nich). Při důkazu využijeme fakt (viz cvičení [1.2.B2]a), resp. [1.2.B1]f)), že pro libovolné množiny K, L, M platí:

$$K \cap (L \cup M) = (K \cap L) \cup (K \cap M)$$
$$K \cap (L - M) = (K \cap L) - (K \cap M)$$

Nechť tedy $X, Y, Z \in 2^A$; pak platí:

$X \cap (Y \div Z) = X \cap ((Y - Z) \cup (Z - Y)) =$
$(X \cap (Y - Z)) \cup (X \cap (Z - Y)) =$
$((X \cap Y) - (X \cap Z)) \cup ((X \cap Z) - (X \cap Y)) =$
$((X \cap Y) \div (X \cap Z))$.

Dohromady jsme tedy ukázali, že $(2^A, \div, \cap)$ je komutativní okruh s jedničkou.

b) vzhledem k předpokladu, že $A \neq \emptyset$, je okruh $(2^A, \div, \cap)$ vždy netriviální a z a) plyne, že je oborem integrity právě když neobsahuje dělitele nuly. Ale

- je-li množina A jednoprvková, pak pro $X, Y \in 2^A$ a $X \cap Y = \emptyset$ musí být $X = \emptyset$ nebo $Y = \emptyset$ a tedy $(2^A, \div, \cap)$ je obor integrity.
- je-li množina A alespoň dvouprvková, pak v ní jistě existují dva různé prvky x, y, přičemž pak zřejmě $\{x\}, \{y\} \in 2^A$ jsou děliteli nuly v okruhu $(2^A, \div, \cap)$ a tedy $(2^A, \div, \cap)$ není oborem integrity.

Dohromady tak dostáváme, že okruh $(2^A, \div, \cap)$ je oborem integrity právě když množina A je jednoprvková.

PŘÍKLAD 16. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\mathbf{u}_1 = (1,-2,3),\ \mathbf{u}_2 = (2,-1,0),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,-3),\ \mathbf{u}_4 = (1,0,-1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbf{R}^3$.

Řešení: vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ generují vektorový prostor $\mathbf{R}^3$ právě když libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ je jejich lineární kombinací.

Nechť tedy $\mathbf{x} = (a,b,c)$ značí libovolný vektor z $\mathbf{R}^3$. Hledáme pak všechna reálná čísla t_1, t_2, t_3, t_4 splňující:

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + t_2 \cdot \mathbf{u}_2 + t_3 \cdot \mathbf{u}_3 + t_4 \cdot \mathbf{u}_4 = \mathbf{x}.$$

Po dosazení a úpravě dostáváme:

$$t_1\cdot(1,-2,3) + t_2\cdot(2,-1,0) + t_3\cdot(1,1,-3) + t_4\cdot(1,0,-1) = (a,b,c)$$
$$(t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4,\ -2t_1 - t_2 + t_3,\ 3t_1 - 3t_3 - t_4) = (a,b,c)$$

Ale dvě uspořádané trojice se rovnají právě když se rovnají jejich odpovídající si složky. Porovnáním těchto odpovídajících si složek tak dostáváme soustavu 3 rovnic o 4 neznámých tvaru:

$$\begin{aligned} t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 &= a \\ -2t_1 - t_2 + t_3 \phantom{{}+t_4} &= b \\ 3t_1 \phantom{{}+2t_2} - 3t_3 - t_4 &= c \end{aligned}$$

kterou řešíme užitím Gausssovy eliminační metody:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ -2 & -1 & 1 & 0 & b \\ 3 & 0 & -3 & -1 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 & 2 & b+2a \\ 0 & -6 & -6 & -4 & c-3a \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 & 2 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+2b+a \end{array}\right].$$

Vidíme však, že poslední rovnice není splněna například pro hodnoty $a = b = c = 1$, takže například vektor $(1,1,1)$ není lineární kombinací zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.

Dostáváme tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ negenerují vektorový prostor $\mathbf{R}^3$.

PŘÍKLAD 17. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ jsou dány vektory (tj. polynomy):

$$\mathbf{f} = x^2 + x + a\,, \quad \mathbf{g} = 4x^2 + 5x + 4\,, \quad \mathbf{h} = ax^2 - 4x + 1$$

kde $a \in \mathbf{R}$. Určete, pro které hodnoty parametru a jsou vektory $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé.

Řešení: hledáme všechna reálná čísla t_1, t_2, t_3 pro která platí:

$$t_1 \cdot \mathbf{f} + t_2 \cdot \mathbf{g} + t_3 \cdot \mathbf{h} = \mathbf{o}$$

(kde symbol $\mathbf{o}$ značí nulový vektor prostoru $\mathbf{R}_2[x]$, tj. nulový polynom). Po dosazení a úpravě dostáváme:

$$t_1 \cdot (x^2 + x + a) + t_2 \cdot (4x^2 + 5x + 4) + t_3 \cdot (ax^2 - 4x + 1) = \mathbf{o}$$
$$(t_1 + 4t_2 + at_3) \cdot x^2 + (t_1 + 5t_2 - 4t_3) \cdot x + (at_1 + 4t_2 + t_3) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0\,.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostáváme soustavu tří rovnic o 3 neznámých t_1, t_2, t_3 (s parametrem a), kterou řešíme:

$$\begin{aligned} t_1 + 4t_2 + at_3 &= 0 \\ t_1 + 5t_2 - 4t_3 &= 0 \\ at_1 + 4t_2 + t_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{odkud:} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & a & 0 \\ 1 & 5 & -4 & 0 \\ a & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & a & 0 \\ 0 & 1 & -4-a & 0 \\ 0 & 4-4a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & a & 0 \\ 0 & 1 & -4-a & 0 \\ 0 & 0 & 5a^2+12a-17 & 0 \end{array}\right].$$

Ale v prvních dvou řádcích poslední matice jsou v hlavní diagonále nenulová čísla (nezávisle na parametru), a tedy počet řešení dané soustavy lineárních rovnic bude záviset na tom, zda číslo $5a^2 + 12a - 17$ je různé od nuly (pak bude mít soustava pouze jediné řešení, a to nulové) nebo zda je rovno nule (pak bude mít soustava nekonečně mnoho řešení, mezi nimi samozřejmě i nenulová).

Rovnice $5a^2 + 12a - 17 = 0$ však má kořeny $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{17}{5}$. Dostáváme tak, že:

- pro $a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{17}{5}$ má daná soustava rovnic jediné řešení $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, a tedy vektory $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ jsou lineárně nezávislé
- pro $a = 1 \vee a = -\frac{17}{5}$ má daná soustava rovnic zřejmě i nenulová řešení a tedy dané vektory $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ jsou lineárně závislé.

PŘÍKLAD 18. Nechť vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou bází vektorového prostoru V nad T. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + 2\mathbf{d} \quad , \quad & \mathbf{u}_2 &= 3\mathbf{b} + 5\mathbf{d} \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + 3\mathbf{c} + 2\mathbf{d} \quad , \quad & \mathbf{u}_4 &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + 5\mathbf{c} \end{aligned}$$

tvoří též bázi tohoto vektorového prostoru V.

Řešení: ze zadání plyne, že dim $V = 4$. Víme (odkud ?), že v takovém případě jsou nějaké čtyři vektory bází prostoru V právě když jsou lineárně nezávislé (tzn. není již třeba ověřovat, zda generují prostor V).

Budeme tedy vyšetřovat lineární závislost či nezávislost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$. Nechť tedy:

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + t_2 \cdot \mathbf{u}_2 + t_3 \cdot \mathbf{u}_3 + t_4 \cdot \mathbf{u}_4 = \mathbf{o} \qquad (1)$$

a hledáme všechny hodnoty t_1, t_2, t_3, t_4, které splňují rovnici (1). Po dosazení a následné úpravě dostáváme:

$$t_1 \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+2\mathbf{d}) + t_2 \cdot (3\mathbf{b}+5\mathbf{d}) + t_3 \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}+3\mathbf{c}+2\mathbf{d}) + t_4 \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}+5\mathbf{c}) = \mathbf{o}$$
$$(t_1+t_3+t_4)\mathbf{a} + (t_1+3t_2+t_3+t_4)\mathbf{b} + (t_1+3t_3+5t_4)\mathbf{c} + (2t_1+5t_2+2t_3)\mathbf{d} = \mathbf{o}$$

Ale podle zadání jsou vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ lineárně nezávislé (neboť jsou bází) a tedy podle definice lineární nezávislosti musí platit:

$$\begin{aligned} t_1 \phantom{{}+3t_2} + t_3 + t_4 &= 0 \\ t_1 + 3t_2 + t_3 + t_4 &= 0 \\ t_1 \phantom{{}+3t_2} + 3t_3 + 5t_4 &= 0 \\ 2t_1 + 5t_2 + 2t_3 \phantom{{}+5t_4} &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme tak soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých, kterou řešíme:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Vidíme, že $t_4 = t_3 = t_2 = t_1 = 0$ je jediné řešení rovnice (1), což znamená, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ jsou lineárně nezávislé.

Dohromady dostáváme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ tvoří bázi vektorového prostoru V.

Poznámka: při některých úlohách, zejména o vzájemné poloze podprostorů vektorového prostoru je možno s výhodou použít jednoduchých úvah o dimenzích (často v souvislosti s větou o dimenzi součtu a průniku podprostorů) a tím se vyhnout pracným množinovým výpočtům. Ukázkou je následující příklad.

PŘÍKLAD 19. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}_4[x]$ takové, že $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$.
Dokažte, že součet podprostorů $W_1 + W_2$ není přímým součtem.

Řešení: uvedené tvrzení dokážeme sporem, tzn. předpokládáme, že $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ a součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem. Potom však $W_1 \cap W_2 = \{o\}$ a užitím věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů dostáváme:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 0 = 6$$

což je spor, protože $W_1 + W_2$ je podprostor ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_4[x]$, jehož dimenze je 5, a tedy dimenze podprostoru $(W_1 + W_2)$ nemůže být větší než 5.

PŘÍKLAD 20. Určete paritu permutace P, je-li

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n{+}1 & n{+}2 & \dots & 2n & 2n{+}1 & 2n{+}2 & \dots & 3n \\ 1 & 4 & \dots & 3n{-}2 & 2 & 5 & \dots & 3n{-}1 & 3 & 6 & \dots & 3n \end{pmatrix}.$$

Řešení: máme určit součet počtu inverzí v horním a dolním řádku tabulky permutace P. Ale v horním řádku není žádná inverze a počet inverzí v dolním řádku zjistíme tak, že bereme odleva jedno číslo po druhém, spočítáme kolik menších čísel stojí za ním a tyto hodnoty sečteme. Dostáváme tak:

$$(0 + 2 + \dots + 2n{-}2) + (0 + 1 + \dots + n{-}1) + (0 + \dots + 0) =$$
$$= 3 \cdot (1 + 2 + \dots + n{-}1) = 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Vidíme, že toto číslo je sudé právě když buď n nebo $n{-}1$ je dělitelné čtyřmi. Jinak řečeno to znamená, že zadaná permutace P je sudá pro $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, resp. je lichá pro $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Poznámka: při výpočtech determinantů je možno postupovat mnoha různými způsoby. V následujících dvou příkladech si ilustrujeme dvě nejjednodušší metody výpočtu determinantů matic n-tého řádu:

a) metoda přímých úprav
kdy pomocí úprav, které nemění hodnotu determinantu se snažíme danou matici převést na takový jednoduchý tvar, z něhož lze determinant okamžitě spočítat. Nejčastěji se snažíme buď pod diagonálou nebo nad diagonálou dostat samé nuly.

b) rekurentní metoda
kterou budeme v tomto textu používat v situaci, kdy máme dokazovat, že zadaný determinant matice řádu n (pro všechna $n \geq n_0$) se rovná danému číslu. Budeme postupovat ve dvou krocích:
1: odvodíme rekurentní vztah, tzn. daný determinat vyjádříme pomocí stejného determinantu či determinantů, ale nižších řádů. Obvykle při tom používáme Laplaceovu větu.
2: vztah, který je uveden v zadání příkladu dokážeme matematickou indukcí. Použijeme při tom rekurentní vztah, který jsme předtím odvodili v 1.kroku.

Poznamenejme, že rekurentní metodu lze použít i v situaci, kdy předem neznáme výslednou hodnotu determinantu. V takovém případě se snažíme (většinou pomocí opakovaného užití Laplaceovy věty) tuto hodnotu "uhádnout" a potom postupovat tak, jak bylo popsáno v b).

Dodejme ještě, že ne vždy je nutné počítat determinant pomocí některé z popsaných metod, ale je možno postupovat i jinak, což je např. ilustrováno v Příkladu 23.

PŘÍKLAD 21. Spočtěte $|A_n|$, kde A_n je matice řádu $n \geq 2$, tvaru:

$$A_n = \begin{bmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ x & a & x & \dots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a \end{bmatrix}.$$

Řešení: v matici A_n provedeme úpravy, které nemění hodnotu determinantu, a to: přičteme všechny sloupce k 1. sloupci a po vytknutí odečteme 1. řádek od všech ostatních řádků. Dostáváme:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a+(n-1)x & x & x & \dots & x & x \\ a+(n-1)x & a & x & \dots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a+(n-1)x & x & x & \dots & x & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)x)\cdot\begin{vmatrix}1 & x & x & \dots & x & x\\ 1 & a & x & \dots & x & x\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 1 & x & x & \dots & x & a\end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)x)\cdot\begin{vmatrix}1 & x & x & \dots & x & x\\ 0 & a-x & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x\end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)x)\cdot(a-x)^{n-1}.$$

PŘÍKLAD 22. Nechť A_n značí matici řádu n, tvaru:

$$A_n = \begin{bmatrix}5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5\end{bmatrix}.$$

Dokažte, že pro každé přirozené n platí: $|A_n| = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Řešení:

1. užitím Laplaceovy věty (rozvojem nejprve podle 1.sloupce a potom podle 1.řádku) dostáváme:

$$|A_n| = 5|A_{n-1}| - 2\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 \dots 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 \dots 0 & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 \dots 2 & 5\end{vmatrix} = 5|A_{n-1}| - 6|A_{n-2}|$$

   což je hledaný rekurentní vztah, platící pro každé $n \geq 3$.

2. matematickou indukcí dokážeme, že platí: $|A_n| = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, pro každé $n \geq 1$.

   α) $|A_1| = 5$, resp. $3^2 - 2^2 = 5$

   $|A_2| = \begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 19$, resp. $3^3 - 2^3 = 19$

   což znamená, že pro $n = 1, 2$ dokazovaný vztah platí.

   β) předpokládáme, že dokazovaný vztah platí pro $1, 2, \dots, n-1$ (kde $n \geq 3$). Užitím rekurentního vztahu a indukčního předpokladu dostáváme:

$$|A_n| = 5|A_{n-1}| - 6|A_{n-2}| = 5\cdot(3^n - 2^n) - 6\cdot(3^{n-1} - 2^{n-1}) =$$
$$= 5\cdot 3^n - 5\cdot 2^n - 2\cdot 3^n + 3\cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Poznámka: v předchozím příkladu jsme v 1.kroku matematické indukce dokazovali zadaný vztah pro více než jednu hodnotu n (v našem případě pro $n = 1$ a pro $n = 2$). Je to způsobeno tím, že rekurentní vztah, který se v důkazu matematickou indukcí později používá, platí až od $n \geq 3$. Je tedy nutné mít ve 2.kroku matematické indukce zajištěno, že je $n \geq 3$ (neboli $n-1 \geq 2$). Toho však v našem případě dosáhneme tím, že dokážeme platnost zadaného vztahu pro $n = 1$ a $n = 2$.

PŘÍKLAD 23. Nechť $n \geq 2$; pak užitím Cauchyovy věty o součinu determinantů vypočtěte determinant $|A_n|$, je-li

$$A_n = \begin{bmatrix}\cos(x_1-y_1) & \cos(x_1-y_2) & \dots & \cos(x_1-y_n)\\ \cos(x_2-y_1) & \cos(x_2-y_2) & \dots & \cos(x_2-y_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \cos(x_n-y_1) & \cos(x_n-y_2) & \dots & \cos(x_n-y_n)\end{bmatrix}.$$

Řešení: budeme se nejprve snažit (podle návodu uvedeného v zadání) danou matici A_n napsat jako součin dvou vhodných matic, například takto:

$$A_n = \begin{bmatrix}\cos x_1 & \sin x_1 & 0 & \dots & 0\\ \cos x_2 & \sin x_2 & 0 & \dots & 0\\ \cos x_3 & \sin x_3 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ \cos x_n & \sin x_n & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos y_1 & \cos y_2 & \dots & \cos y_n\\ \sin y_1 & \sin y_2 & \dots & \sin y_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Užitím Cauchyovy věty pak dostáváme, že determinant $|A_n|$ je roven součinu determinantů obou uvedených matic. Ale z tohoto vyjádření již okamžitě plyne, že,:

- pro $n \geq 3$ obsahuje poslední matice nulový řádek, tzn. je $|A_n| = 0$
- pro $n = 2$ výpočtem (s využitím součtových vzorců) obdržíme:

$$|A_n| = \begin{vmatrix}\cos x_1 & \sin x_1\\ \cos x_2 & \sin x_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos y_1 & \cos y_2\\ \sin y_1 & \sin y_2\end{vmatrix} = \sin(x_2-x_1)\cdot\sin(y_2-y_1).$$

Dohromady tak dostáváme, že:

$$|A_n| = \begin{cases} \sin(x_2 - x_1)\cdot\sin(y_2 - y_1) & \text{pro } n = 2 \\ 0 & \text{pro } n \geq 3 \end{cases}$$

PŘÍKLAD 24. Nalezněte všechny reálné matice X, které jsou zaměnitelné s danou reálnou maticí A (tj. platí: $X \cdot A = A \cdot X$), je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Řešení: ze zadání plyne, že X musí být čtvercová matice řádu 2. Označme tedy: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Pak dosazením a úpravou dostáváme:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{bmatrix}$$

odkud porovnáním odpovídajících si prvků a úpravou vychází:

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 \qquad &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Tuto homogenní soustavu lineárních rovnic řešíme obvyklým způsobem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zvolíme např. $x_3 = 3r$, $x_4 = s$, odkud pak $x_2 = 2r$, $x_1 = -3r + s$, tzn. hledaných matic je nekonečně mnoho a jsou tvaru:

$$X = \begin{bmatrix} -3r + s & 2r \\ 3r & s \end{bmatrix} \qquad \text{pro každé } r, s \in \mathbf{R}.$$

PŘÍKLAD 25. Je dána reálná matice A tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nechť $\mathcal{W}$ značí množinu všech reálných matic, které jsou zaměnitelné s maticí A, tzn.

$$\mathcal{W} = \{ X \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \mid X \cdot A = A \cdot X \}.$$

Potom.:

a) dokažte, že $\mathcal{W}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$
b) nalezněte bázi a dimenzi podprostoru $\mathcal{W}$.

Řešení:

a) ověříme, že množina $\mathcal{W}$ splňuje definici podprostoru vektorového prostoru. Ale:

α) zřejmě je $\mathcal{W} \neq \emptyset$, neboť např. $A \in \mathcal{W}$

β) nechť $X, Y \in \mathcal{W}$, tzn. platí $A \cdot X = X \cdot A$ a $A \cdot Y = Y \cdot A$. Budeme dokazovat, že $X + Y \in \mathcal{W}$. Ale platí (proč?):

$$(X + Y) \cdot A = X \cdot A + Y \cdot A = A \cdot X + A \cdot Y = A \cdot (X + Y)$$

odkud plyne, že skutečně je $X + Y \in \mathcal{W}$

γ) nechť $r \in \mathbf{R}$, $X \in \mathcal{W}$, tzn. platí $X \cdot A = A \cdot X$. Budeme dokazovat, že $r \cdot X \in \mathcal{W}$. Ale platí (rozmyslete si podrobně proč!):

$$(r \cdot X) \cdot A = r \cdot (X \cdot A) = r \cdot (A \cdot X) = A \cdot (r \cdot X)$$

a tedy skutečně je $r \cdot X \in \mathcal{W}$.

Dohromady tak dostáváme, že $\mathcal{W}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$.

b) nejprve se budeme snažit podat množinový popis podprostoru $\mathcal{W}$, tzn. popis všech matic $X \in \mathcal{W}$. To jsme však již provedli v předchozím Příkladu 24, kde nám vyšlo, že:

$$X \in \mathcal{W} \iff X = \begin{bmatrix} -3r + s & 2r \\ 3r & s \end{bmatrix} \qquad \text{pro každé } r, s \in \mathbf{R}.$$

Vidíme tedy, že za r, s lze provést maximálně dvě nezávislé volby, např. $r = 1, s = 0$, resp. $r = 0, s = 1$, odkud ihned dostáváme, že $\dim W = 2$ a bází W jsou např. matice:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

PŘÍKLAD 26. Určete hodnost matice A (nad $\mathbf{R}$) v závislosti na parametrech $r, s \in \mathbf{R}$, je-li

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s & -3 & -1 \\ 1 & 1 & s & s & 1 \\ s & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & s & s & r \end{bmatrix}$$

Řešení: matici A převádíme elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar a v závislosti na parametrech r, s provádíme diskuzi o její hodnosti. Tedy:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & s & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & s+3 & 2 \\ 0 & 3 & 4-s^2 & 9+3s & 8+s \\ 0 & 1 & 0 & s+3 & r+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & s & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & s+3 & 2 \\ 0 & 0 & 4-s^2 & 0 & 2+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-1 \end{bmatrix} .$$

Ale $4 - s^2 = (2+s) \cdot (2-s)$, tzn. hodnoty parametrů, které mohou ovlivnit hodnost matice A jsou $r = 1$, $s = 2, -2$. Jednoduchým rozborem těchto možností pak dostáváme, že:

$h(A) = 2$ pro $r = 1$, $s = -2$

$h(A) = 3$ pro $r = 1$, $s \neq -2$ nebo $r \neq 1$, $s = 2, -2$

$h(A) = 4$ pro $r \neq 1$, $s \neq 2, -2$.

PŘÍKLAD 27. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány podprostory $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde:

$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,2,1)$, $\mathbf{v}_1 = (2,3,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,1,2)$.

Nalezněte dimenzi a bázi podprostoru W_1, resp. W_2, resp. $W_1 + W_2$, resp. $W_1 \cap W_2$.

Řešení: přímo ze zadání je vidět (proč ?), že:

$\dim W_1 = 2$ a bází W_1 jsou např. vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$;

$\dim W_2 = 2$ a bází W_2 jsou např. vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Dále budeme nejprve zjišťovat dimenzi a bázi $W_1 + W_2$. K tomu stačí (proč ?) napsat všechny vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ do matice a tuto matici převést na schodovitý tvar. Tedy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

odkud plyne (proč ?), že $\dim(W_1 + W_2) = 3$ a bází $W_1 + W_2$ jsou např. vektory $(1,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,0,2)$.

Nakonec nalezneme dimenzi a bázi průniku $W_1 \cap W_2$. Dimenzi zjistíme okamžitě, neboť z předchozího výpočtu a z věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů plyne, že:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = 1 .$$

Hledáme tedy bázi $W_1 \cap W_2$. Je-li $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ libovolný, potom je:

$$\mathbf{x} = t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + t_2 \cdot \mathbf{u}_2 = t_3 \cdot \mathbf{v}_1 + t_4 \cdot \mathbf{v}_2$$

odkud po úpravě a dosazení dostáváme:

$$t_1(1,1,1,0) + t_2(2,3,2,1) - t_3(2,3,2,3) - t_4(1,1,1,2) = (0,0,0,0) .$$

Porovnáním odpovídajících si složek vektorů na levé a pravé straně obdržíme soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých:

$$\begin{aligned} t_1 + 2t_2 - 2t_3 - t_4 &= 0 \\ t_1 + 3t_2 - 3t_3 - t_4 &= 0 \\ t_1 + 2t_2 - 2t_3 - t_4 &= 0 \\ t_2 - 3t_3 - 2t_4 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme obvyklým způsobem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Zvolíme-li $t_4 = r$, dostáváme $t_3 = -r$, a tedy

$$\mathbf{x} = -r \cdot \mathbf{v}_1 + r \cdot \mathbf{v}_2 = (-r, -2r, -r, -r) \qquad \text{pro každé } r \in \mathbf{R}$$

(všimněte si, že k určení vektoru $\mathbf{x}$ nebylo nutné počítat neznámé t_1, t_2). Volbou např. $r = -1$ dostáváme hledanou bázi průniku $W_1 \cap W_2$, kterou pak tvoří vektor $(1,2,1,1)$.

PŘÍKLAD 28. Je dána soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + a\,x_2 + x_3 &= 2 \\ b\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 &= c \end{aligned}$$

Rozhodněte (v závislosti na parametrech $a, b, c, \in \mathbf{R}$) o počtu řešení této soustavy.

Řešení: rozšířenou matici dané soustavy budeme elementárními řádkovými úpravami převádět na schodovitý tvar a přitom provádět diskuzi počtu řešení v závislosti na hodnosti matice soustavy, hodnosti rozšířené matice soustavy a počtu neznámých. Tedy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ b & 2 & 2 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-b & 2-b & c-3b \end{array}\right]$$

Vidíme, že je-li $a = 1$, pak daná soustava nemá řešení; předpokládejme tedy nadále, že $a \neq 1$. Potom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-b & 2-b & c-3b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 2-b & c-3b-\frac{b-2}{a-1} \end{array}\right]$$

odkud plyne, že je-li $b \neq 2$, pak má daná soustava jediné řešení, resp. je-li $b = 2$, $c \neq 6$, pak soustava nemá řešení, resp. je-li $b = 2$, $c = 6$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení. Shrneme-li celou odpověď, dostáváme, že daná soustava lineárních rovnic

- má jediné řešení pro $a \neq 1$, $b \neq 2$, $c \in \mathbf{R}$ libovolné
- má nekonečně mnoho řešení pro $a \neq 1$, $b = 2$, $c = 6$
- nemá řešení pro $a = 1$, $b \in \mathbf{R}$ libovolné, $c \in \mathbf{R}$ libovolné nebo pro $a \neq 1$, $b = 2, c \neq 6$.

PŘÍKLAD 29. Určete (v závislosti na parametru $p \in \mathbf{R}$) dimenzi a bázi podprostoru řešení W zadané homogenní soustavy lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} p\,x_1 + (p+1)\,x_2 + p\,x_3 + p\,x_4 &= 0 \\ p\,x_1 + (p+1)\,x_2 - 2\,x_3 + p\,x_4 &= 0 \\ p\,x_1 + (p+1)\,x_2 + p\,x_3 + (2p+2)x_4 &= 0 \\ -2p\,x_1 + (p+1)\,x_2 + p\,x_3 + p\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: nejprve budeme danou soustavu obvyklým způsobem řešit:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & p & p & 0 \\ p & p+1 & -2 & p & 0 \\ p & p+1 & p & 2p+2 & 0 \\ -2p & p+1 & p & p & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & p & p & 0 \\ 0 & 0 & -2-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \\ 0 & 3(p+1) & 3p & 3p & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} p & p+1 & p & p & 0 \\ 0 & p+1 & p & p & 0 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{array}\right]$$

Vidíme, že hodnoty parametru p, které mohou ovlivnit dimenzi, resp. bázi podprostoru řešení W jsou $p = 0, -1, -2$. Rozborem jednotlivých možností dostáváme:

a) je-li $p \neq 0 \ \wedge\ p \neq -1 \ \wedge\ p \neq -2$, pak zřejmě podprostor W je nulový, tzn. $\dim W = 0$ a báze W neexistuje

b) je-li $p = 0$, pak dostáváme:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

odkud ihned plyne, že $\dim W = 1$ a bází W je např. vektor $(1,0,0,0)$

c) je-li $p = -1$, pak dostáváme:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

odkud ihned plyne, že $\dim W = 1$ a bází W je např. vektor $(0,1,0,0)$

d) je-li $p=-2$, pak dostaneme:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

odkud plyne, že $W = \{(0,-2r-2s, r, s) \mid r,s \in \mathbf{R}\}$ a tedy: $\dim W = 2$ a bází W jsou např. vektory: $(0,-2,1,0)$, $(0,-2,0,1)$.

PŘÍKLAD 30. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^5$ (s obvyklým skalárním součinem) je zadán podprostor W jakožto množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \qquad\quad + x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1+9x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1+3x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ x_1 \qquad - 2x_3 - 5x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Nalezněte homogenní soustavu lineárních rovnic, jejíž množinou řešení je ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru W.

Řešení: víme (viz cvičení [6.2.B14]), že vektory sestavené z koeficientů jednotlivých rovnic dané soustavy, tj. vektory $\mathbf{u}_1 = (1,2,0,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (5,9,-1,2,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,3,-1,-1,-2)$, $\mathbf{u}_4 = (1,0,-2,-5,-7)$ jsou generátory ortogonálního doplňku $W^\perp$. Stačí tedy, abychom podle známého algoritmu nalezli homogenní soustavu lineárních rovnic, jejíž množinou řešení je podprostor $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$.

Stručně řečeno, danou soustavu vyřešíme, nalezneme bázi jejího podprostoru řešení a pak složky vektorů této báze budou tvořit koeficienty v hledané homogenní soustavě lineárních rovnic. Tedy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 5 & 9 & -1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -5 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Zvolíme: $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, odkud $x_2 = -r-3s-4t$, $x_1 = 2r+5s+7t$.

Bázi podprostoru řešení teď získáme tak, že za 3 volné neznámé provedeme postupně 3 nezávislé volby, např.:

pro $r=1$, $s=0$, $t=0$ dostáváme $(2,-1,1,0,0)$
pro $r=0$, $s=1$, $t=0$ dostáváme $(5,-3,0,1,0)$
pro $r=0$, $s=0$, $t=1$ dostáváme $(7,-4,0,0,1)$

a tedy hledaná homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž množinou řešení je podprostor $W^\perp$ je např. tvaru:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 31. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ (s obvyklým skalárním součinem) je dán podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde:

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,2), \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,3,-2), \quad \mathbf{u}_3 = (2,1,0,2).$$

Nalezněte ortonormální bázi podprostoru $W^\perp$.

Řešení:
1. nejprve budeme hledat bázi $W^\perp$. Využijeme přitom faktu, že

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in W^\perp \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$$

(viz cvičení [6.2.B13]). Rozepsáním odsud dostáváme:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a tuto soustavu lineárních rovnic obvyklým způsobem řešíme:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Zvolíme: $x_3 = r$, $x_4 = s$ odkud: $x_2 = -2r+2s$, $x_1 = r-2s$. Potom (volbou např. $r=1$, $s=0$, resp. $r=0$, $s=1$) dostáváme bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$:

$$\mathbf{v}_1 = (1,-2,1,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (-2,2,0,1).$$

2. pomocí Gram-Schmidtova ortognalizačního procesu najdeme ortogonální bázi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ podprostoru $W^\perp = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$. Tedy:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,-2,1,0)$

$\mathbf{e}_2 = k\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2 \implies k = -\frac{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1} = -\frac{-6}{6} = 1$, odkud dostáváme:

$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2 = (-1,0,1,1)$.

3. vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ normujeme. Ale $|\,\mathbf{e}_1\,| = \sqrt{6}$, $|\,\mathbf{e}_2\,| = \sqrt{3}$, odkud plyne, že hledanou ortonormální bází podprostoru $W^\perp$ jsou například vektory:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(1,-2,1,0)\,, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-1,0,1,1)\,.$$

PŘÍKLAD 32. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^5$ (s obvyklým skalárním součinem) je dán podprostor

$$W = L(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\,, \quad \text{kde } \mathbf{e}_1 = (-1,2,3,2,1)\,, \ \mathbf{e}_2 = (2,3,2,4,1)\,.$$

Nalezněte ortogonální projekci $\mathbf{x}$ vektoru $\mathbf{u} = (6,-1,-7,3,4)$ do podprostoru W.

Řešení: víme, že vektor $\mathbf{u}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad , \qquad \text{kde } \mathbf{x} \in W\,,\ \mathbf{y} \in W^\perp\,.$$

Poněvadž $\mathbf{x} \in W$, lze psát: $\mathbf{x} = t_1\cdot\mathbf{e}_1 + t_2\cdot\mathbf{e}_2$ odkud po dosazení:

$$\mathbf{u} = t_1\cdot\mathbf{e}_1 + t_2\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{y}$$

Nyní, skalárním vynásobením vektorem $\mathbf{e}_1$, resp. vektorem $\mathbf{e}_2$ (uvědomte si, že přitom využíváme toho, že $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{y} = 0$, resp. $\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{y} = 0$) dostáváme soustavu 2 lineárních rovnic o 2 neznámých t_1, t_2 tvaru:

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{u} = t_1\cdot(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + t_2\cdot(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{u} = t_1\cdot(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1) + t_2\cdot(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) \end{array} \implies \begin{array}{r} -19 = 19t_1 + 19t_2 \\ 11 = 19t_1 + 34t_2 \end{array}$$

odkud bezprostředně vychází, že $t_1 = -3$, $t_2 = 2$. Tedy:

$$\mathbf{x} = -3\cdot\mathbf{e}_1 + 2\cdot\mathbf{e}_2 = (7,0,-5,2,-1)$$

je hledaná ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ do podprostoru W.

PŘÍKLAD 33. Je dáno lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^5$ takto: pro libovolné $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4$ je

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x_2+x_4\,,\ x_2+x_3+x_4\,,\ 0\,,\ x_2+x_4\,,\ x_3)\,.$$

Nalezněte jádro $\operatorname{Ker}\varphi$ a obraz $\operatorname{Im}\varphi$ tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:

1. nejprve budeme hledat jádro $\operatorname{Ker}\varphi$, tzn. budeme hledat všechny vektory $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4$, pro něž je

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x_2+x_4\,,\ x_2+x_3+x_4\,,\ 0\,,\ x_2+x_4,\,,\ x_3) = (0,0,0,0,0)\,.$$

Porovnáním odpovídajících si složek obou vektorů dostáváme soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 tvaru:

$$\begin{aligned} x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0 \\ x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \end{aligned}$$

odkud okamžitě plyne řešení: $x_1 = t$, $x_2 = s$, $x_3 = 0$, $x_4 = -t$. Tedy hledané jádro je tvaru:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(t,s,0,-t)\,|\,t,s \in \mathbf{R}\}\,.$$

2. nyní budeme hledat obraz $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathbf{R}^4)$. Víme, že pro dimenzi jádra a obrazu platí vztah:

$$\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbf{R}^4 - \dim \operatorname{Ker}\varphi = 4 - 2 = 2$$

odkud vidíme, že k určení $\operatorname{Im}\varphi$ nám stačí znát dva lineárně nezávislé vektory z $\varphi(\mathbf{R}^4) = \operatorname{Im}\varphi$. Vezměme například:

$$\varphi(\,(0,0,0,1)\,) = (1,1,0,1,0) \ ; \ \varphi(\,(0,0,1,0)\,) = (0,1,0,0,1)\,.$$

Ale je vidět, že oba tyto vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé, a tedy $\operatorname{Im}\varphi = [\,(1,1,0,1,0),(0,1,0,0,1)\,]$, což jinak zapsáno znamená, že hledaný obraz je tvaru:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\,(t\,,\,t+s\,,\,0\,,\,t\,,\,s)\,|\,t,s \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

PŘÍKLAD 34. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je definováno zadáním obrazů báze

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,1,1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (2,2,0,3)\,,\ \mathbf{u}_3 = (3,1,2,0)\,,\ \mathbf{u}_4 = (0,3,3,2)$$

vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ takto:

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = (1,1,2),\ \varphi(\mathbf{u}_2) = (-1,1,-1),\ \varphi(\mathbf{u}_3) = (1,3,3),\ \varphi(\mathbf{u}_4) = (1,5,4)\,.$$

Nalezněte bázi jádra $\operatorname{Ker}\varphi$ a bázi obrazu $\operatorname{Im}\varphi$ zadaného lineárního zobrazení φ.

Řešení:

1. nejprve popíšeme vektory náležící do jádra $\operatorname{Ker}\varphi$. Jsou to vektory $\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + t_3\mathbf{u}_3 + t_4\mathbf{u}_4$, splňující vztah $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Užitím definice lineárního zobrazení odsud dostáváme:

$$t_1\cdot\varphi(\mathbf{u}_1) + t_2\cdot\varphi(\mathbf{u}_2) + t_3\cdot\varphi(\mathbf{u}_3) + t_4\cdot\varphi(\mathbf{u}_4) = \mathbf{o}$$

Dosazením obdržíme:

$$t_1\cdot(1,1,2) + t_2\cdot(-1,1,-1) + t_3\cdot(1,3,3) + t_4\cdot(1,5,4) = (0,0,0)\,.$$

Porovnáním odpovídajících si složek těchto vektorů dostaneme soustavu 3 lineárních rovnic o 4 neznámých t_1, t_2, t_3, t_4, kterou obvyklým způsobem řešíme:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1&-1&1&1&0\\ 1&1&3&5&0\\ 2&-1&3&4&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1&-1&1&1&0\\ 0&2&2&4&0\\ 0&1&1&2&0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1&-1&1&1&0\\ 0&1&1&2&0 \end{array}\right].$$

Zvolíme: $t_3 = r$, $t_4 = s$, odkud $t_2 = -r-2s$, $t_1 = -2r-3s$. Vidíme, že $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 2$ (neboť tato dimenze je rovna počtu volných neznámých), tzn. bázi $\operatorname{Ker}\varphi$ získáme provedením dvou nezávislých voleb za volné neznámé, např. $r=1$, $s=0$, resp. $r=0$, $s=1$. Dostáváme tak, že bází jádra $\operatorname{Ker}\varphi$ jsou např. vektory: $(-2,-1,1,0)$, $(-3,-2,0,1)$.

2. budeme hledat bázi obrazu $\operatorname{Im}\varphi$. Ale víme, že obraz $\operatorname{Im}\varphi$ je generován vektory $\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \varphi(\mathbf{u}_3), \varphi(\mathbf{u}_4)$. Budeme tedy bázi $\operatorname{Im}\varphi$ hledat mezi těmito generátory, tzn. mezi vektory:

$$(1,1,2)\,,\ (-1,1,-1)\,,\ (1,3,3)\,,\ (1,5,4)$$

obvyklým způsobem tak, že matici utvořenou z uvedených vektorů převedeme elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar, z něhož vezmeme nenulové řádky:

$$\begin{bmatrix} 1&1&2\\ -1&1&-1\\ 1&3&3\\ 1&5&4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&2\\ 0&2&1\\ 0&2&1\\ 0&4&2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&1&2\\ 0&2&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

Dostáváme tak, že hledanou bází obrazu $\operatorname{Im}\varphi$ jsou např. vektory: $(1,1,2)$, $(0,2,1)$.

PŘÍKLAD 35. Nechť lineární transformace φ prostoru $\mathbf{R}^3$ má v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matici

$$A = \begin{bmatrix} 3&-2&-1\\ 4&-3&2\\ 8&-7&6 \end{bmatrix}.$$

Nalezněte matici $X = (x_{ij})$ lineární transformace φ v bázi:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\,,\quad \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{u}_1+4\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\,,\quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3\,. \qquad (1)$$

Řešení: nejprve připomeňme, že z definice matice A plyne, že

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}_1) &= 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 8\mathbf{u}_3\\ \varphi(\mathbf{u}_2) &= -2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - 7\mathbf{u}_3\\ \varphi(\mathbf{u}_3) &= -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Zadanou úlohu budeme řešit tak, že vektory $\varphi(\mathbf{v}_1)$, $\varphi(\mathbf{v}_2)$, $\varphi(\mathbf{v}_3)$ vyjádříme pomocí báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ dvěma způsoby a využijeme toho, že obě vyjádření se musí rovnat (proč ?). Při prvním vyjádření použijeme vztahy (1), definici lineárního zobrazení a vztahy (2). Při druhém vyjádření použijeme definici matice X a vztahy (1).

Nejprve tedy, užitím (1), definice lineárního zobrazení a dosazením ze vztahů (2) po úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}_1) &= 2\cdot\varphi(\mathbf{u}_1) + 3\cdot\varphi(\mathbf{u}_2) + \varphi(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\\ \varphi(\mathbf{v}_2) &= 3\cdot\varphi(\mathbf{u}_1) + 4\cdot\varphi(\mathbf{u}_2) + \varphi(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3\\ \varphi(\mathbf{v}_3) &= \varphi(\mathbf{u}_1) + 2\cdot\varphi(\mathbf{u}_2) + 2\cdot\varphi(\mathbf{u}_3) = -3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3\,. \end{aligned}$$

Dále, podle definice matice X, dosazením z (1) po úpravě dostáváme:

$$\varphi(\mathbf{v}_1) = x_{11}\,\mathbf{v}_1 + x_{21}\,\mathbf{v}_2 + x_{31}\,\mathbf{v}_3 =$$
$$= (2x_{11}+3x_{21}+x_{31})\cdot\mathbf{u}_1 + (3x_{11}+4x_{21}+2x_{31})\cdot\mathbf{u}_2 + (x_{11}+x_{21}+2x_{31})\cdot\mathbf{u}_3$$
$$\varphi(\mathbf{v}_2) = x_{12}\,\mathbf{v}_1 + x_{22}\,\mathbf{v}_2 + x_{32}\,\mathbf{v}_3 =$$
$$= (2x_{12}+3x_{22}+x_{32})\cdot\mathbf{u}_1 + (3x_{12}+4x_{22}+2x_{32})\cdot\mathbf{u}_2 + (x_{12}+x_{22}+2x_{32})\cdot\mathbf{u}_3$$
$$\varphi(\mathbf{v}_3) = x_{13}\,\mathbf{v}_1 + x_{23}\,\mathbf{v}_2 + x_{33}\,\mathbf{v}_3 =$$
$$= (2x_{13}+3x_{23}+x_{33})\cdot\mathbf{u}_1 + (3x_{13}+4x_{23}+2x_{33})\cdot\mathbf{u}_2 + (x_{13}+x_{23}+2x_{33})\cdot\mathbf{u}_3$$

Porovnáme-li nyní pravé strany obou vyjádření vektorů $\varphi(\mathbf{v}_1)$, $\varphi(\mathbf{v}_2)$, $\varphi(\mathbf{v}_3)$ a využijeme jednoznačnosti vyjádření vektoru pomocí báze, dostaneme tři soustavy 3 lineárních rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{aligned} 2x_{11}+3x_{21}+x_{31} &= -1 \\ 3x_{11}+4x_{21}+2x_{31} &= 1 \\ x_{11}+x_{21}+2x_{31} &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_{12}+3x_{22}+x_{32} &= 0 \\ 3x_{12}+4x_{22}+2x_{32} &= 2 \\ x_{12}+x_{22}+2x_{32} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_{13}+3x_{23}+x_{33} &= -3 \\ 3x_{13}+4x_{23}+2x_{33} &= 2 \\ x_{13}+x_{23}+2x_{33} &= 6 \end{aligned}$$

Všimněme si přitom, že na levých stranách všech tří soustav vystupují stejné koeficienty a liší se jenom označení neznámých (jinými slovy řečeno – matice soustavy je ve všech třech případech stejná). Řešme tedy všechny tři soustavy pomocí Gaussovy metody najednou "úsporným způsobem" tak, že matici soustavy napíšeme pouze jednou a sloupce absolutních členů od sebe oddělíme svislými čarami. Tedy:

$$\left[\begin{array}{ccc||c|c|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -4 & -16 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c|c|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

odkud po okamžitém výpočtu dostáváme hledanou matici X ve tvaru:

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 16 \\ -6 & -4 & -12 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 36. Lineární transformace φ vektorového prostoru V (nad $\mathbf{R}$) je dána maticí A. Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace φ je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řešení:

1. vlastní hodnoty λ získáme řešením rovnice $|A - \lambda\cdot E_3| = 0$. Dosazením a rozepsáním dostáváme:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\cdot(1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda+1)\cdot(\lambda-1)^2 = 0$$

odkud plyne, že vlastními hodnotami lineární transformace φ jsou hodnoty $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 1$.

2. víme (odkud ?), že vlastními vektory lineární transformace φ příslušnými k dané vlastní hodnotě λ_i jsou právě všechna nenulová řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ homogenní soustavy lineárních rovnic

$$(A - \lambda_i\cdot E_3)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

V našem případě tedy:

α) pro $\lambda_1 = -1$ dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 0 \\ 2x_2 \quad &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 &= 0 \end{aligned}, \qquad \text{tzn. pro } x_3 = t \text{ je } x_2 = 0,\ x_1 = -t$$

odkud plyne, že vlastními vektory lineární transformace φ, příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_1 = -1$ jsou všechny vektory tvaru $(-t, 0, t)$, kde $0 \neq t \in \mathbf{R}$.

β) pro $\lambda_2 = 1$ dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}, \qquad \text{tzn. pro } x_3 = t,\ x_2 = s \text{ je } x_1 = t$$

odkud plyne, že vlastními vektory lineární transformace φ, příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_2 = 1$ jsou všechny vektory tvaru (t, s, t), kde $t, s \in \mathbf{R}$ libovolné, které nejsou současně rovny nule.

II. CVIČENÍ

Tato druhá část textu obsahuje celkem 1764 neřešených úloh a příkladů k procvičování a samostatnému studiu. Rozdělení příkladů do kapitol a paragrafů přesně odpovídá členění látky provedenému ve skriptech [7] (Algebra a teoretická aritmetika I.). V rámci jednotlivých paragrafů jsou pak příklady řazeny tak, aby toto řazení pokud možno odpovídalo způsobu, jakým jsou studované pojmy budovány.

Příklady jsou v jednotlivých paragrafech obvykle rozděleny na dvě části, a to na:

- **příklady "testového charakteru"** (označené kromě čísla ještě písmenem A), což jsou krátké úlohy, které by měl čtenář vždy prakticky okamžitě umět vyřešit a které hlavně procvičují správné a úplné pochopení základních pojmů a tvrzení. Tyto úlohy jsou početně i časově nenáročné a každý by je měl projít a vyřešit úplně všechny. Zkratka "U.p." zde znamená "Udejte příklad".
  Ve výsledcích k této části jsou zásadně uváděny všechny negativní odpovědi (tzn. když hledaný příklad neexistuje). Není-li odpověď uvedena, znamená to, že požadovaný příklad lze sestrojit.
- **příklady "algoritmického charakteru"** (označené kromě čísla ještě písmenem B), v nichž je nutné vždy něco spočítat, či dokázat. Ke všem těmto příkladům jsou (tam, kde to dává smysl) vždy uvedeny výsledky a u značné části z nich (zejména u důkazových úloh) též stručný návod k řešení. U obtížnějších příkladů je tento návod uveden již v zadání.

Výsledky cvičení a návody k jejich řešení jsou uvedeny ve III.části tohoto textu. Měly by sloužit pouze ke kontrole zejména numerických výpočtů, resp. jako návod v situaci, kdy byly opravdu vyčerpány všechny pokusy o samostatné řešení daného problému. Jsou-li ve výsledcích či návodech uvedeny odkazy na tvrzení a věty, pak se jedná vždy o tvrzení a věty ze skript [7] (Algebra a teoretická aritmetika I.).

KAPITOLA 1:

OPAKOVÁNÍ
A DOPLNĚNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

§1: ZÁKLADNÍ LOGICKÉ POJMY

[1.1.A1]. U.p. výroků A, B tak, aby konjunkce $A \wedge B$ byl pravdivý výrok a disjunkce $A \vee B$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A2]. U.p. výroků A, B tak, aby konjunkce $A \wedge B$ a disjunkce $\neg A \vee \neg B$ byly nepravdivé výroky.

[1.1.A3]. U.p. výroků A, B tak, aby $A \Rightarrow B$ byl pravdivý výrok a $B \Rightarrow A$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A4]. U.p. výroků A, B tak, aby $A \Rightarrow B$ byl pravdivý výrok a $\neg B \Rightarrow \neg A$ byl nepravdivý výrok.

[1.1.A5]. U.p. výroků A, B tak, aby obě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ byly pravdivými výroky.

[1.1.A6]. U.p. výroků A, B tak, aby obě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ byly nepravdivými výroky.

[1.1.A7]. U.p. výrokové funkce, jejíž definiční obor je roven oboru pravdivosti.

[1.1.A8]. U.p. výrokové funkce, jejímž oborem pravdivosti je prázdná množina.

[1.1.A9]. U.p. matematické věty, kterou znáte ze střední školy, a která má tvar ekvivalence dvou výroků.

[1.1.A10]. U.p. matematické věty, kterou jste na střední škole dokazovali matematickou indukcí.

♣ ♣ ♣

[1.1.B1]. Rozhodněte, která z uvedených sdělení jsou výroky. U výroku pak určete jeho pravdivostní hodnotu:

a) "Kolik je hodin?" b) "Číslo $2^{10}+1$ je prvočíslo."
c) "Číslo x je sudé číslo." d) "Odbočení vpravo je zakázáno!"

[1.1.B2]. Nechť symboly A, resp. B, resp. C značí tyto výroky:

"Číslo $2^{10}+1$ je dělitelné třemi", resp. "Číslo $2^{10}+1$ je dělitelné pěti", resp. "Číslo $2^{10}+1$ je dělitelné sedmi".

Potom zapište pomocí symbolů A, B, C a logických spojek následující výroky:

a) "Je-li $2^{10}+1$ dělitelné 3, pak není dělitelné 7."

b) "Není-li $2^{10}+1$ dělitelné 3 a je dělitelné 5, pak je dělitelné 7."

c) "Není-li $2^{10}+1$ dělitelné 5, pak není dělitelné 3 nebo 7."

d) "$2^{10}+1$ je dělitelné 5 právě když není dělitelné 3 ani 7."

[1.1.B3]. Rozhodněte o pravdivosti výroků A, B, C z předchozího příkladu a dále o pravdivosti složených výroků z a), b), c), d) předchozího příkladu.

[1.1.B4]. Dokažte, že výroky $\neg(A \Rightarrow B)$ a $(A \wedge \neg B)$ jsou ekvivalentní.

[1.1.B5]. Logická spojka $|$, definovaná tabulkou pravdivostních hodnot:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A\,\vert\,B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

se nazývá *Shefferův symbol*. Dá se dokázat, že pomocí Shefferova symbolu lze vyjádřit každou z logických spojek $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Rozhodněte, která z uvedených logických spojek je vyjádřena vztahem:

a) $A \mid (A \mid B)$ b) $(A \mid B) \mid (A \mid B)$.

[1.1.B6]. Výrok, jehož pravdivostní hodnota je vždy 1, nezávisle na tom, jaké jsou pravdivostní hodnoty výroků, z nichž je utvořen, se nazývá *tautologie*.
Dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

a) $\neg(A \wedge (\neg A))$ b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B))$ d) $A \Leftrightarrow (A \wedge (A \vee B))$.

[1.1.B7]. Určete obor pravdivosti následující výrokové formy, jejímž definičním oborem je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel:

a) $|2x-1| < |3-x|$ b) $x-6 \geq x\cdot(x-3)$
c) $x^2-5x+6 > 3-x$ d) $(x+2)\cdot(x-2) \geq 2x-5$

[1.1.B8]. Utvořte negaci (bez použití obratu "není pravda, že...") výroku:

a) "Napsal to Petr nebo Pavel."
b) "Dnes bude pršet a zítra nebude svítit slunce."
c) "Jestliže se budu učit, pak zkoušku z algebry udělám."
d) "Budu-li mít volno, pak půjdu do kina nebo do divadla."

[1.1.B9]. Utvořte negaci (bez použití obratu "není pravda, že ...") výroku:

a) "Žádná kulička ležící na tomto stole není modrá."
b) "Alespoň jedno celé číslo je sudé a žádné celé číslo není liché."
c) "Pro všechna kladná reálná čísla r, s platí, že $r < r \cdot s$."
d) "Existují celá čísla $t_1, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že $t_1 + \dots + t_n = 0$."
e) "Pro libovolná přirozená čísla $a_1, \dots, a_n$, kde $n \geq 5$ a alespoň jedno z těchto čísel je větší než 5 platí: $a_1 + \dots + a_n \geq 10$."
f) "Existují komplexní čísla z_1, z_2, z_3, která jsou všechna ryze imaginární tak, že jejich součin $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ je číslo reálné."

[1.1.B10]. Udejte podmínku, která

a) je dostatečná, ale není nutná b) je nutná, ale není dostatečná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby přirozené číslo x bylo dělitelné 66.

[1.1.B11]. Následující tvrzení dokažte jednak matematickou indukcí a jednak bez použití matematické indukce:

a) pro každé přirozené číslo n platí: $1+2+\dots+n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

b) pro každé přirozené číslo n platí: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

[1.1.B12]. Matematickou indukcí dokažte, že

a) pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $6\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2) = n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$

b) pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $2^{n-1} \leq n!$

c) pro každé celé číslo $n \geq 3$ platí: $2^n > 2n+1$

d) pro každé celé číslo $n \geq 4$ platí: $3^n > n^3$

e) pro každé celé číslo $n \geq 5$ platí: $2^n > n^2$

[1.1.B13]. Nechť n značí libovolné přirozené číslo. Uvažme tvrzení:

$$" \; 2+4+\cdots+2n=(n+2)(n-1) \; ".$$

Pak ukažte, že
a) uvedené tvrzení neplatí pro žádné přirozené n
b) uvedené tvrzení lze "dokázat" matematickou indukcí, vynecháme-li v ní 1. krok (tzn. vidíme, že 1. krok nelze při důkazu matematickou indukcí vypustit).

[1.1.B14]. Posloupnost celých čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definována rekurentně takto:

$$a_1 = 3\,, \quad a_2 = 5\,; \qquad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \quad \text{pro } n \geq 3\,.$$

Matematickou indukcí dokažte, že pro $\forall n \in \mathbf{N}$ je : $a_n = 2^n + 1$.

[1.1.B15]. Posloupnost přirozených čísel $u_1, u_2, u_3, \dots$ je definována rekurentně takto:

$$u_1 = 1\,, \quad u_2 = 1\,; \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pro } n \geq 1$$

(tato posloupnost se nazývá *Fibonacciho posloupnost* a její členy se nazývají *Fibonacciho čísla*). Dokažte, že platí:

$$u_{n+s} = u_{n-1} \cdot u_s + u_n \cdot u_{s+1} \qquad \text{pro } \forall n \geq 2 \text{ celé}, \; \forall s \in \mathbf{N}\,.$$

(Návod: důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k s.)

§2: ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY

[1.2.A1]. U.p. konečné množiny M, jejímiž prvky jsou nekonečné množiny.

[1.2.A2]. U.p. nekonečné množiny M, jejímiž prvky jsou konečné množiny.

[1.2.A3]. U.p. množin A, B tak, aby množina $A \times 2^B$ měla 18 prvků.

[1.2.A4]. U.p. množin A, B, C takových, že $A \cap B \subseteq A \cap C$ a $B \not\subseteq C$.

[1.2.A5]. U.p. nekonečné množiny A a konečné množiny B tak, že $A - B = \emptyset$.

[1.2.A6]. U.p. dvou různých množin A, B tak, že $A - B \subseteq B - A$.

[1.2.A7]. U.p. množiny A, která má právě 3 podmnožiny.

[1.2.A8]. U.p. množin A, B tak, aby množina $A \times B$ měla právě 32 podmnožin.

[1.2.A9]. Nechť $A = \{0, 1, 2\}$. Přečtěte nahlas následující výroky a rozhodněte, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé:

a) $0 \in A$ b) $\{0\} \in A$ c) $0 \subseteq A$ d) $\{0\} \subseteq A$ e) $\emptyset \in A$ f) $\emptyset \subseteq A$

g) $\{\emptyset\} \in A$ h) $\{\emptyset\} \subseteq A$ i) $\{2\} \in \{2, \{2\}\}$ j) $\{2\} \subseteq \{2, \{2\}\}$

[1.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby množiny A, B byly různé.

♣ ♣ ♣

[1.2.B1]. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:
a) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$
b) $A \cap B = A - (A - B)$
c) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$
d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
f) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$

[1.2.B2]. Nechť I je neprázdná indexová množina a nechť A, B_i jsou množiny, pro každé $i \in I$. Dokažte, že platí:

a) $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ b) $A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

c) $A - \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A - B_i)$ d) $A \times \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$

[1.2.B3]. Nechť A_n, B_n ($n \in \mathbf{N}$) jsou množiny, splňující podmínky:

$(*)$ $\qquad A_n \supseteq A_{n+1} \quad , \quad B_n \supseteq B_{n+1} \qquad$ pro každé $n \in \mathbf{N}$

Potom:
a) dokažte, že: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$
b) ukažte, že předchozí rovnost neplatí, vynecháme-li předpoklad $(*)$.

[1.2.B4]. Nechť I značí množinu všech prvočísel. Pro každé prvočíslo $p \in I$ označme: $A_p = \{x \in \mathbf{N} \mid p \text{ dělí } x\}$. Dokažte, že pak platí:

a) $\bigcup_{p \in I} A_p = \mathbf{N} - \{1\}$ b) $\bigcap_{p \in I} A_p = \emptyset$

c) je-li $J \neq \emptyset$ libovolná konečná množina prvočísel, pak $\bigcap_{p \in J} A_p \neq \emptyset$.

[1.2.B5]. Dokažte, že pro intervaly na reálné ose platí:

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle 1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\rangle = \langle 1, 2\rangle$ b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle 1-\frac{n}{n+1}, 2+\frac{n}{n+1}\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle 1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\rangle = (0, 3)$ d) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle 1-\frac{n}{n+1}, 2+\frac{n}{n+1}\rangle = (0, 3)$

Definice. Nechť A, B jsou množiny. Pak množina $(A-B)\cup(B-A)$ se nazývá ***symetrická diference množin*** A, B a označuje se $A \div B$. Vidíme tedy, že $A \div B$ je množina všech takových prvků, které patří právě do jedné z množin A, B (nakreslete si obrázek !).

[1.2.B6]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A \div B = (A\cup B) - (A\cap B)$ b) $A \div B = B \div A$

c) $A\cup B = A \div (B \div (A\cap B))$ d) $A - B = A \div (A\cap B)$

e) $A\cap(B \div C) = (A\cap B) \div (A\cap C)$

[1.2.B7]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A \div B = \emptyset \iff A = B$ b) $A \div C = B \div C \implies A = B$

[1.2.B8]. Nechť A je konečná, n-prvková množina ($n \geq 0$). Dokažte, že množina 2^A má právě 2^n prvků.

[1.2.B9]. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$; nalezněte všechny prvky X množiny 2^A, pro které platí:

a) $X \cap \{a, b, d\} = \{a, d\}$ b) $X \cup \{a, b, d\} = \{a, d\}$

[1.2.B10]. Nechť A, B jsou množiny. Dokažte, že:

a) $2^A \cap 2^B = 2^{A\cap B}$ b) $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A\cup B}$

c) obecně neplatí rovnost $2^A \cup 2^B = 2^{A\cup B}$.

[1.2.B11]. Nechť $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \mathbf{K}$. Popište množiny: $A\times B$, resp. $B\times A$, resp. $B\times B$, resp. $B\times C$, resp. $B\times 2^B$.

[1.2.B12]. Nechť A, B, C, D jsou množiny. Dokažte, že:

a) $A\subseteq C,\ B\subseteq D \implies A\times B \subseteq C\times D$

b) $A\subseteq B \implies A\times C\subseteq B\times C$

c) obecně neplatí implikace: $A\subset B \implies A\times C\subset B\times C$

[1.2.B13]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

b) $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$

c) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

d) $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

e) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$

f) $(B-C)\times A = (B\times A)-(C\times A)$

[1.2.B14]. Nechť A, B, C, D jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$

b) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D) = (A\times D)\cap(B\times C)$

c) $(A\times B)-(C\times D) = ((A-C)\times B)\cup(A\times(B-D))$

[1.2.B15]. Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že obecně neplatí:

a) $A-B = B-A$ b) $A-(B-C) = (A-B)-C$

c) $A\cup(B\times C) = (A\cup B)\times(A\cup C)$

d) $A\cap(B\times C) = (A\cap B)\times(A\cap C)$

§3: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI CELÝCH ČÍSEL

[1.3.A1]. U.p. celých čísel a, b, c tak, že $a \mid b\cdot c$, ale $a\nmid b \wedge a\nmid c$.

[1.3.A2]. U.p. celých čísel x, y tak, že $7\nmid(21x-56y)$.

[1.3.A3]. U.p. dvou různých celých čísel a, b tak, že $a\mid b \wedge b\mid a$.

[1.3.A4]. U.p. celého čísla a, které po dělení 8 dává zbytek -2.

[1.3.A5]. U.p. celých čísel a, b, k nimž neexistuje (a, b).

[1.3.A6]. U.p. dvou různých celých čísel a, b tak, že $(a, b) = -a$.

[1.3.A7]. U.p. celých čísel a, b tak, že $a\equiv b \pmod 9 \wedge b\not\equiv a \pmod 9$.

[1.3.A8]. Uveďte, kolik existuje záporných čísel, která jsou kongruentní s číslem 6 podle modulu 7.

[1.3.A9]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby celá čísla a, b byla kongruentní podle modulu 6.

[1.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby celá čísla a, b nebyla nesoudělná.

♣ ♣ ♣

[1.3.B1]. Nalezněte podíl q a zbytek r po dělení čísla a číslem b, je-li:
a) $a = 0$, $b = 7$ b) $a = -5$, $b = 7$
c) $a = 47$, $b = -11$ d) $a = -47$, $b = 11$
e) $a = n^2 + 1$, $b = n + 1$, kde $n \geq 2$ je celé číslo
f) $a = n^3 - 1$, $b = n + 1$, kde n je přirozené číslo.

[1.3.B2]. Nechť a je libovolné celé číslo. Dokažte, že
a) a^2 dává po dělení 4 zbytek 0 nebo 1
b) a^4 dává po dělení 8 zbytek 0 nebo 1.

[1.3.B3]. Dokažte, že zbytek po dělení druhé mocniny libovolného celého čísla a číslem 12 může nabývat pouze čtyř hodnot a určete tyto hodnoty.
(Návod: nejprve vyjádřete dělení čísla a číslem 6.)

[1.3.B4]. Rozhodněte, zda $a \equiv b \pmod{16}$, je-li:
a) $a = 75$, $b = 139$ b) $a = -75$, $b = 139$
c) $a = 0$, $b = 139$ d) $a = 0$, $b = 0$

[1.3.B5]. Nechť m je přirozené číslo; $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Dokažte, že platí:
a) $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$
b) $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$

[1.3.B6]. Nechť $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ a nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že pak platí:
a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ b) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
c) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ d) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

[1.3.B7]. Nalezněte zbytek po dělení čísla $(3^{80} + 7^{80})$ číslem 100.

(Návod: užitím předchozích dvou cvičení spočtěte s čím je číslo 3^{80}, resp. 7^{80} kongruentní podle modulu 100.)

[1.3.B8]. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ mají čísla n^5 a n (vyjádřená v dekadickém zápisu) stejné poslední cifry.

(Návod: vyjádřete číslo n dekadicky, tj. $n = a_k \cdot 10^k + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, kde $0 \leq a_i \leq 9$ a ukažte, že $n^5 \equiv a_0 \pmod{10}$.)

[1.3.B9]. Nechť pro celé číslo $p \geq 2$ platí: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Dokažte, že potom p je prvočíslo.

[1.3.B10]. Nechť m je přirozené číslo; $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Dokažte, že:
a) obecně neplatí: $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m} \implies a \equiv b \pmod{m}$
b) platí: $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m} \wedge (c, m) = 1 \implies a \equiv b \pmod{m}$

[1.3.B11]. Nechť $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí, či neplatí a svoje rozhodnutí zdůvodněte:
a) $a \mid c \wedge b \mid c \implies a \cdot b \mid c^2$ b) $a \mid c \vee b \mid c \implies a \cdot b \mid c^2$
c) $a \cdot b \mid c^2 \implies a \mid c \wedge b \mid c$ d) $a \cdot b \mid c^2 \implies a \mid c \vee b \mid c$

[1.3.B12]. Nechť $a, b \in \mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí, či neplatí a svoje rozhodnutí zdůvodněte:
a) $(a, b) = 1 \implies (a + b, a - b) = 1$
b) $(a + b, a - b) = 1 \implies (a, b) = 1$

[1.3.B13]. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí:
a) číslo $10^n - 1$ je dělitelné 9 b) číslo $n^3 - n$ je dělitelné 6.

[1.3.B14]. Nalezněte všechna přirozená n, pro která platí: $72 \mid 10^n + 8$.
(Návod: proveďte zvlášť pro $n = 1, 2$ a zvlášť pro $n \geq 3$.)

[1.3.B15]. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí:
a) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ b) $7 \nmid 2^n + 1$

[1.3.B16]. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ existuje n po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou složenými čísly (tzn. v posloupnosti prvočísel jsou libovolně velké "mezery").
(Návod: začněte číslem $(n+1)! + 2$.)

§4: RELACE

[1.4.A1]. Nechť $M = \{x, y, z\}$. Uveďte, kolik lze definovat různých relací
a) mezi množinami M a 2^M b) mezi množinami M a $\emptyset$
c) na množině M d) na množině $M \times M$.

[1.4.A2]. U.p. neprázdné relace ϱ mezi množinami $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ a neprázdné relace σ mezi množinami $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ tak, že složená relace $\sigma \circ \varrho$ je prázdnou relací.

[1.4.A3]. U.p. relací ϱ, σ na množině $M = \{a, b\}$ tak, že ϱ, σ nejsou univerzálními relacemi, ale $\sigma \circ \varrho$ je univerzální relací na M.

[1.4.A4]. U.p. množiny M a relace ϱ na M, která je současně symetrická a antisymetrická.

[1.4.A5]. U.p. množiny M a relace ϱ na M, která není symetrická a není antisymetrická.

[1.4.A6]. U.p. relace ϱ, různé od relace rovnosti, na množině $\mathbf{Z}$ tak, že ϱ je reflexivní a není úplná.

[1.4.A7]. U.p. relace ϱ na množině $\mathbf{N}$, která je úplná a není reflexivní.

[1.4.A8]. U.p. množiny A tak, aby relace inkluze $\subseteq$ na množině 2^A byla úplnou relací.

[1.4.A9]. Dokažte, že relace dělitelnosti na množině $\mathbf{N}$ je antisymetrická, kdežto relace dělitelnosti na množině $\mathbf{Z}$ není antisymetrická.

[1.4.A10]. Popište, jak se z tabulky relace (na konečné množině) pozná, že tato relace je, resp. není

a) reflexivní b) symetrická
c) antisymetrická d) úplná.

♣ ♣ ♣

[1.4.B1]. Uveďte příklad dvou různých relací ϱ a σ mezi množinami $A = \{a,b,c\}$ a $B = \{1,2,3,4\}$. Potom popište (množinově, graficky i tabulkou) relace: ϱ^{-1}, resp. σ^{-1}, resp. $\varrho \cap \sigma$, resp. $\varrho \cup \sigma$.

[1.4.B2]. Proveďte množinový zápis relace ϱ na množině $\mathbf{N}$, která je slovně popsána takto:

a) číslo 3 je v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly a dále všechna sudá přirozená čísla větší než 50 jsou v relaci ϱ se všemi lichými přirozenými čísly
b) číslo 3 je v relaci ϱ s čísly 3 a 7 a dále, všechna čísla větší jak 7 jsou v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly, která jsou dělitelná 3 a 7
c) každé přirozené číslo je v relaci ϱ se všemi přirozenými čísly kromě sebe sama
d) v relaci ϱ jsou navzájem všechna prvočísla a dále jsou v relaci ϱ navzájem ta složená čísla, která jsou nesoudělná.

[1.4.B3]. Nechť ϱ je relace mezi množinami $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{N}$, definovaná:

$$\varrho = \{(x, 3x^2+1) \mid \text{pro} \forall x \in \mathbf{Z}\} ,$$

resp. σ je relace mezi množinami $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$, definovaná:

$$\sigma = \{(a,b) \mid b = -a \ \vee \ b = a^2 - 3 \text{ , pro } a,b \in \mathbf{N}\} .$$

Pak popište relaci $\sigma \circ \varrho$ a relaci $\varrho \circ \sigma$.

[1.4.B4]. Nechť ϱ je relace mezi množinami A a B; nechť σ_i je relace mezi množinami B a C pro každé $i \in I$ (kde $I \neq \emptyset$ je nějaká indexová množina). Dokažte, že:

a) $(\bigcup_{i\in I} \sigma_i) \circ \varrho = \bigcup_{i\in I} (\sigma_i \circ \varrho)$ b) $(\bigcap_{i\in I} \sigma_i) \circ \varrho \subseteq \bigcap_{i\in I} (\sigma_i \circ \varrho)$
c) ve vztahu b) obecně neplatí rovnost.

[1.4.B5]. Nechť ϱ_i (pro každé $i \in I$) je relace mezi množinami A a B. Dokažte, že pak platí:

a) $(\bigcup_{i\in I} \varrho_i)^{-1} = \bigcup_{i\in I} \varrho_i^{-1}$ b) $(\bigcap_{i\in I} \varrho_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} \varrho_i^{-1}$

[1.4.B6]. Nechť $M = \{a,b\}$. Vypište:

a) všechny relace na množině M b) všechny tranzitivní relace na M
c) všechny relace na M, které nejsou tranzitivní.
d) všechny relace na M, které nejsou antisymetrické

[1.4.B7]. Nechť M je n-prvková, neprázdná množina. Určete, kolik celkem existuje

a) reflexivních relací na M b) symetrických relací na M
c) antisymetrických relací na M d) úplných relací na M
e) relací na M, které jsou současně reflexivní a symetrické
f) relací na M, které jsou současně reflexivní a antisymetrické.

[1.4.B8]. Na množině $M = \{a,b,c\}$ udejte (tabulkou) příklad relací ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 tak, aby každá z těchto relací měla vždy právě jenom jednu z vlastností: reflexivní, symetrická, antisymetrická, úplná.

[1.4.B9]. Je dána relace ϱ na množině $\mathbf{N}$. Rozhodněte, zda ϱ je reflexivní relace, resp. symetrická relace, resp. antisymetrická relace, resp. tranzitivní relace, resp. úplná relace, je-li pro $x, y \in \mathbf{N}$:

a) $x\varrho y \iff x \cdot y$ je liché číslo
b) $x\varrho y \iff x, y$ jsou nesoudělná čísla
c) $x\varrho y \iff y = x \quad \vee \quad y = 2x \quad \vee \quad y = 3x$
d) $x\varrho y \iff |x - y| = 3 \quad \vee \quad x = y$.

[1.4.B10]. Je dána relace ϱ na množině $\mathbf{Z}$. Rozhodněte, zda ϱ je reflexivní relace, resp. symetrická relace, resp. antisymetrická relace, resp. tranzitivní relace, resp. úplná relace, je-li pro $x, y \in \mathbf{Z}$:

a) $x\varrho y \iff x^2 = y$ b) $x\varrho y \iff 3 \mid (x + 2y)$
c) $x\varrho y \iff |x| < |y|$ d) $x\varrho y \iff |x| \geq |y|$

[1.4.B11]. Je dána relace ϱ na množině 2^A, kde A je neprázdná, konečná množina. Rozhodněte, zda ϱ je reflexivní relace, resp. symetrická relace, resp. antisymetrická relace, resp. tranzitivní relace, resp. úplná relace, je-li pro $X, Y \in 2^A$:

a) $X\varrho Y \iff X \cup Y = A$ b) $X\varrho Y \iff X \cap Y \neq \emptyset$
c) $X\varrho Y \iff X = \emptyset$ nebo $Y = A$
d) $X\varrho Y \iff$ množiny X, Y mají stejný počet prvků.

(Návod: uvědomte si, že v některých případech může vyšetřovaná vlastnost záviset na počtu prvků množiny A.)

[1.4.B12]. Dokažte, že průnik libovolného počtu
a) reflexivních relací na M je opět reflexivní relací na M
b) symetrických relací na M je opět symetrickou relací na M
c) relací na M, z nichž alespoň jedna je antisymetrická, je antisymetrickou relací na M
d) tranzitivních relací na M je opět tranzitivní relací na M
e) úplných relací na M nemusí být úplnou relací na M.

[1.4.B13]. Dokažte, že sjednocení libovolného počtu
a) relací na M, z nichž alespoň jedna je reflexivní, je reflexivní relací na množině M
b) symetrických relací na M je opět symetrickou relací na M
c) antisymetrických relací na M nemusí být antisymetrickou relací na množině M
d) tranzitivních relací na M nemusí být tranzitivní relací na M
e) relací na M, z nichž alespoň jedna je úplná, je úplnou relací na M.

[1.4.B14]. Nechť ϱ, σ jsou relace na M. Dokažte, že:
a) jsou-li ϱ, σ reflexivní, pak relace $\sigma \circ \varrho$ je reflexivní
b) jsou-li ϱ, σ symetrické, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být symetrická
c) jsou-li ϱ, σ antisymetrické, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být antisymetrická
d) jsou-li ϱ, σ tranzitivní, pak relace $\sigma \circ \varrho$ nemusí být tranzitivní
e) jsou-li ϱ, σ úplné, pak relace $\sigma \circ \varrho$ je úplná.

[1.4.B15]. Nechť ϱ, σ jsou tranzitivní relace na M. Dokažte, že pak:

$$\varrho \cup \sigma \text{ je tranzitivní relace } \iff (\varrho \circ \sigma) \cup (\sigma \circ \varrho) \subseteq (\varrho \cup \sigma).$$

[1.4.B16]. Nechť ϱ, σ jsou symetrické relace na M. Dokažte, že pak:

$$\sigma \circ \varrho \text{ je symetrická relace } \iff \sigma \circ \varrho = \varrho \circ \sigma.$$

Definice. Relace ϱ, σ na množině M se nazývají *záměnné relace*, jestliže platí: $\sigma \circ \varrho = \varrho \circ \sigma$.

[1.4.B17]. Udejte příklad dvou různých relací ϱ, σ na dané množině $M = \{a, b\}$ tak, že relace ϱ, σ:
a) jsou záměnné b) nejsou záměnné.

[1.4.B18]. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:
(i) na množině M jsou každé dvě relace záměnné
(ii) množina M je jednoprvková.

[1.4.B19]. Nechť ϱ, σ jsou tranzitivní a záměnné relace na M. Dokažte, že pak $\sigma \circ \varrho$ je tranzitivní relací na M.

§5: ZOBRAZENÍ

[1.5.A1]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, které
a) je injektivní a není surjektivní b) je surjektivní a není injektivní.

[1.5.A2]. U.p. injektivního zobrazení $f : A \times A \to 2^A$, je-li:
a) $A = \{a, b\}$ b) $A = \{a, b, c\}$.

[1.5.A3]. U.p. injektivního zobrazení
a) $f : \mathbf{Z} \to 2^{\mathbf{N}}$ b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

[1.5.A4]. U.p. surjektivního zobrazení
a) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ b) $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$.

[1.5.A5]. Uveďte, co všechno lze říci o počtu prvků konečné k-prvkové množiny A, víte-li, že
a) existuje injektivní zobrazení $2^A \to A \times A$
b) neexistuje žádné surjektivní zobrazení $A \times A \to A^A$.

(Návod: při a) využijte výsledku cvičení [1.1.B12]e).)

[1.5.A6]. U.p. množiny B, její vlastní podmnožiny A (t.j. $A \subset B$) a bijektivního zobrazení $f : A \to B$.

[1.5.A7]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ takových, že $f \circ g \neq g \circ f$.

[1.5.A8]. Nechť je $A = \{a, b\}$; u.p. zobrazení $f : 2^A \to A^A$ tak, že k tomuto zobrazení neexistuje inverzní zobrazení.

[1.5.A9]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby zobrazení $f : A \to B$ nebylo surjektivní.

[1.5.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby zobrazení $f : A \to B$ bylo bijektivní.

♣ ♣ ♣

[1.5.B1]. Rozhodněte, zda zadaný předpis f určuje zobrazení množiny A do množiny B, je-li:

a) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{N}$, $f(x) = |x|$ pro $\forall x \in \mathbf{Z}$

b) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Q}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{3x^2 - 2}$ pro $\forall x \in \mathbf{Z}$

c) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Z}$, $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 2 \mid x \\ -1 & \text{pro } 3 \mid x \\ 0 & \text{pro } 2 \nmid x \wedge 3 \nmid x \end{cases}$

d) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x < 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$

[1.5.B2]. Nakreslete všechna zobrazení $A \to B$ a uveďte, která z nich jsou injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní. Přitom
a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ b) $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$.

[1.5.B3]. Zadejte (výčtem prvků) množinu A^B a množinu B^A, je-li:
a) $A = \{a\}$, $B = \{x, y, z\}$ b) $A = B = \{x, y\}$.

[1.5.B4]. Nechť A je n-prvková množina, B je s-prvková množina ($n, s \in \mathbf{N}$). Dokažte, že počet všech zobrazení $A \to B$ je roven s^n.
(Návod: důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k n.)

[1.5.B5]. Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li pro každé $x \in \mathbf{N}$:
a) $f(x) = 5x - 3$ b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{pro } x \leq 6 \\ x - 6 & \text{pro } x > 6 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x + 1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$
e) $f(x) = \left[\dfrac{x+1}{2}\right]$ f) $f(x) = \left[\dfrac{3x+1}{2}\right]$
kde symbolem $[t]$ se označuje tzv. *celá část čísla* t, což je největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo t.

[1.5.B6]. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, je-li:
a) $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = x^2$ b) $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = x^2$
c) $f : \mathbf{Q} - \{0\} \to \mathbf{Q}^+$, $f(x) = x^2$ d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$
e) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+3} & \text{pro } x \neq -3 \\ 1 & \text{pro } x = -3 \end{cases}$
f) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \text{ sudé} \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}$
kde $\mathbf{R}^+$, resp. $\mathbf{Q}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel, resp. kladných racionálních čísel.

[1.5.B7]. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, je-li:
a) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\quad f((x, y)) = x + y$
b) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\quad f(x) = (2x, 2x + 1)$
c) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{N}}$, $\quad f((x, y)) = \{x, y\}$
d) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \times \{1, 2, 3\}$, $\quad f(x) = \begin{cases} (\frac{x}{3}, 1) & \text{pro } x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ (\frac{x-1}{3}, 2) & \text{pro } x \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \\ (\frac{x+1}{3}, 3) & \text{pro } x \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$
e) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $\quad f((x, y)) = \begin{cases} (\frac{y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ sudé, přirozené} \\ (\frac{1-y}{2}, x) & \text{pro } y \text{ liché, přirozené} \end{cases}$
f) $f : 2^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}$, $f(A) = \begin{cases} a_0 & \text{kde } a_0 \text{ je nejmenší číslo z } A \text{, je-li } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{je-li } A = \emptyset \end{cases}$

[1.5.B8]. Nechť A je n-prvková množina, B je s-prvková množina ($n, s \in \mathbf{N}$). Určete počet všech :
a) bijektivních zobrazení $A \to B$ b) injektivních zobrazení $A \to B$.

[1.5.B9]. Nechť $f : A \to B$, $g : B \to C$ jsou zobrazení. Dokažte, že platí:
a) f, g jsou injektivní $\Longrightarrow$ $g \circ f$ je injektivní
b) f, g jsou surjektivní $\Longrightarrow$ $g \circ f$ je surjektivní
c) $g \circ f$ je injektivní $\Longrightarrow$ f je injektivní
d) $g \circ f$ je surjektivní $\Longrightarrow$ g je surjektivní.

[1.5.B10]. Nechť $f : A \to B$ je zobrazení. Dokažte, že platí:
a) f je injektivní $\Longleftrightarrow$ existuje zobrazení $g : B \to A$ tak, že $g \circ f = id_A$
b) f je surjektivní $\Longleftrightarrow$ existuje zobrazení $h : B \to A$ tak, že $f \circ h = id_B$.
(Návod: při důkazu " $\Longrightarrow$ " v a), resp. v b) hledané zobrazení g, resp. h přímo zkonstruujte.)

[1.5.B11]. Nechť $f : A \to A$ je dané neidentické zobrazení. Dokažte, že pak existuje zobrazení $g : A \to A$ takové, že $f \circ g \neq g \circ f$.
(Návod: z předpokladu plyne, že v množině A existují dva různé prvky a, b takové, že $f(a) = b$. Této skutečnosti pak využijte při konstrukci zobrazení g.)

[1.5.B12]. Dokažte, že zobrazení $f : A \to B$ je bijektivní. Při tom:

a) $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}$, $\quad f((x,y)) = 2^{x-1} \cdot (2y-1)$

b) $A = (a,b)$, $B = (c,d)$, $\quad f(x) = c + \dfrac{d-c}{b-a} \cdot (x-a)$

c) $A = (a,b)$, $B = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = \dfrac{x-a}{b-x}$

d) $A = (a,b)$, $B = \mathbf{R}$; resp. p je pevné reálné číslo takové, že $a < p < b$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x-a} & \text{pro } a < x \leq p \\ \dfrac{x-p}{b-x} & \text{pro } p \leq x < b \end{cases}$$

kde $\mathbf{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel, resp. $(a,b), (c,d)$ značí otevřené intervaly na reálné ose.

(Návod: v a) využijte větu o rozkladu čísla na součin prvočísel.)

[1.5.B13]. Jsou dána bijektivní zobrazení $f, g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ takto :

$$f(x) = 3x - 4\,, \qquad g(x) = 2x + \tfrac{5}{3} \qquad \text{pro } \forall x \in \mathbf{Q}\,.$$

Potom zadejte zobrazení :

$f \circ g$; $g \circ f$; $(f \circ g)^{-1}$; $(g \circ f)^{-1}$; f^{-1} ; g^{-1} ; $f^{-1} \circ g^{-1}$; $g^{-1} \circ f^{-1}$.

[1.5.B14]. Nechť A, B, C jsou množiny a nechť $\varphi : A \to B$ je bijektivní zobrazení. Dokažte, že bijektivním zobrazením je pak také zobrazení:

a) $F : A^C \to B^C$, definované : $\quad F(f) = \varphi \circ f \quad$ pro $\forall f \in A^C$

b) $G : C^A \to C^B$, definované : $\quad G(g) = g \circ \varphi^{-1} \quad$ pro $\forall g \in C^A$.

[1.5.B15]. Nechť $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ je zobrazení, splňující podmínku :

$$(f \circ f)(x) = -x\,, \qquad \text{pro každé } x \in \mathbf{Z}\,.$$

Dokažte, že pak platí :

a) f je bijektivní zobrazení $\qquad$ b) $f(-x) = -f(x)$ pro $\forall x \in \mathbf{Z}$

c) $f(x) = 0 \iff x = 0$.

[1.5.B16]. Nechť A, B jsou konečné množiny přirozených čísel; nechť $f : A \to B$ je injektivní zobrazení s vlastností: $x \leq f(x)$ pro $\forall x \in A$, $g : B \to A$ je injektivní zobrazení s vlastností: $y \leq g(y)$ pro $\forall y \in B$.
Dokažte, že pak platí : $\quad A = B \quad$ a $\quad f = id_A = g$.

(Návod: označte $h = g \circ f$, ukažte, že h je bijekce splňující podmínku $x \leq h(x)$ pro každé $x \in A$ a dále (sporem) ukažte, že $h = id_A$.)

§6: USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

[1.6.A1]. Nakreslete hasseovský diagram čtyřprvkové uspořádané množiny, která má dva maximální prvky a nemá nejmenší prvek.

[1.6.A2]. Nakreslete hasseovský diagram čtyřprvkové uspořádané množiny, v níž každý prvek je současně maximálním prvkem i minimálním prvkem.

[1.6.A3]. Nakreslete hasseovský diagram konečné uspořádané množiny, která má tři minimální prvky a žádný maximální prvek.

[1.6.A4]. U.p. uspořádané množiny (M, ϱ), která má jeden maximální prvek a nemá největší prvek.

[1.6.A5]. U.p. uspořádané množiny (M, ϱ), která má jeden nejmenší prvek a tři minimální prvky.

[1.6.A6]. U.p. uspořádané množiny (M, ϱ), která obsahuje právě dva nesrovnatelné prvky a nemá přitom žádný maximální prvek ani minimální prvek.

[1.6A7]. U.p. nekonečné uspořádané množiny (M, ϱ), která neobsahuje žádné různé srovnatelné prvky.

[1.6.A8]. U.p. lineárně uspořádané množiny (M, ϱ), která má dva minimální prvky.

[1.6.A9]. U.p. množiny A tak, aby uspořádaná množina $(2^A, \subseteq)$ byla lineárně uspořádaná.

[1.6.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná $\qquad$ b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby v uspořádané množině $(M \varrho)$ neexistoval maximální prvek.

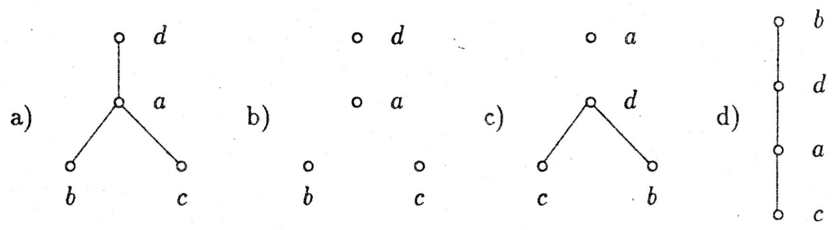
♣ ♣ ♣

[1.6.B1]. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je dána relace ϱ. Dokažte, že ϱ je relací uspořádání a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ), je-li:

a) $\varrho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (b,a), (b,c), (b,d)\}$

b) $\varrho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (d,a), (b,c)\}$.

[1.6.B2]. Uspořádaná množina (M, ϱ), kde $M = \{a, b, c, d\}$ je zadána hasseovským diagramem. Popište (výčtem prvků) relaci uspořádání ϱ, je-li:



[1.6.B3]. Je dána množina M. Rozhodněte kolik relací uspořádání lze na množině M definovat a nakreslete odpovídající hasseovské diagramy takto vzniklých uspořádaných množin, je-li:

a) $M = \{a, b\}$ b) $M = \{a, b, c\}$.

[1.6.B4]. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$, je-li:

a) $A = \emptyset$ b) $A = \{a\}$ c) $A = \{a, b\}$ d) $A = \{a, b, c\}$.

[1.6.B5]. Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je definována relace ϱ takto:

$$x \varrho y \iff \exists \text{ přirozené číslo } n \text{ tak, že } x = n \cdot y .$$

Dokažte, že ϱ je relací uspořádání a sestrojte hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ).

[1.6.B6]. Rozhodněte, zda $(\mathbf{N}, \varrho)$ je uspořádaná množina, resp. lineárně uspořádaná množina a pokud tomu tak je, pak schematicky nakreslete její hasseovský diagram. Relace ϱ je definována pro $x, y \in \mathbf{N}$ takto:

a) $x \varrho y \iff y = 4 \vee y = x$ b) $x \varrho y \iff x \not\equiv y \pmod 5$

c) $x \varrho y \iff$ počet cifer čísla x je menší nebo roven počtu cifer čísla y

d) $x \varrho y \iff (x = y) \vee (x \text{ je liché} \wedge y \text{ je sudé}) \vee (x + y \text{ je sudé} \wedge x < y)$.

[1.6.B7]. Rozhodněte, zda $(\mathbf{Z}, \varrho)$ je uspořádaná množina, resp. lineárně uspořádaná množina a pokud tomu tak je, pak schematicky načrtněte její hasseovský diagram. Relace ϱ je definována pro $x, y \in \mathbf{Z}$ takto:

a) $x \varrho y \iff x < y$ b) $x \varrho y \iff y \le x$

c) $x \varrho y \iff x \mid y$ (tj. $\exists z \in \mathbf{Z} : y = z \cdot x$)

d) $x \varrho y \iff (x = y) \vee (x, y \text{ jsou sudá čísla} \wedge x < y)$.

[1.6.B8]. Nechť $M = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_8, f_9\}$, kde pro $1 \le i \le 9$ je $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zobrazení, definované pro $\forall x \in \mathbf{R}$ takto:

$f_1(x) = |x| - 4$, $f_2(x) = |x| - 3$, $f_3(x) = |x| - 2$,

$f_4(x) = -|x| + 4$, $f_5(x) = -|x| + 3$, $f_6(x) = -|x| + 2$,

$f_7(x) = -|x|$, $f_8(x) = |x + 2|$, $f_9(x) = 2$.

Na množině M je definována relace ϱ takto :

$$f_i \varrho f_j \iff \text{pro každé } x \in \langle -2, 2 \rangle \text{ platí} : f_i(x) \le f_j(x) .$$

Dokažte, že ϱ je relace uspořádání na M a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ).

[1.6.B9]. Na množině reálných čísel $\mathbf{R}$ je definována relace ϱ takto: pro $x, y \in \mathbf{R}$ je

$$x \varrho y \iff \exists c \in \mathbf{R} , \ c \ge 1 \text{ tak, že } c \cdot x = y .$$

Dokažte, že ϱ je relace uspořádání na $\mathbf{R}$ a načrtněte schematicky hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbf{R}, \varrho)$.

[1.6.B10]. Nechť ϱ, σ jsou relace uspořádání na množině M. Dokažte, že potom:

a) relace ϱ^{-1} je uspořádání na M

b) relace $\varrho \cap \sigma$ je uspořádání na M

c) relace $\varrho \cup \sigma$ obecně není uspořádání na M

d) relace $\sigma \circ \varrho$ obecně není uspořádání na M.

[1.6.B11]. Vypište všechny minimální prvky, resp. maximální prvky, resp. nejmenší prvky, resp. největší prvky všech uspořádaných množin ze cvičení

a) [1.6.B2] b) [1.6.B6] c) [1.6.B7] d) [1.6.B8].

[1.6.B12]. Nechť ϱ je relace uspořádání na konečné množině M. Dokažte, že pak v (M, ϱ) existuje alespoň jeden minimální a alespoň jeden maximální prvek.

[1.6.B13]. Nechť ϱ je relace uspořádání na konečné množině M a nechť v uspořádané množině (M, ϱ) existuje jediný minimální prvek u. Potom:

a) dokažte, že u je nejmenším prvkem v (M, ϱ).

b) rozhodněte, zda stejné tvrzení platí i v případě, že množina M je nekonečná.

[1.6.B14]. Nechť A je konečná, neprázdná množina přirozených čísel. Na množině $M = 2^A - \{\emptyset\}$ definujeme relaci ϱ takto: pro $X, Y \in M$ je $X \varrho Y$ právě když

$\exists$ injektivní zobrazení $f : X \to Y$ takové, že $x \leq f(x)$ pro $\forall x \in X$.

Potom:
a) dokažte, že ϱ je relace uspořádání na M
b) nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) pro případ, že $A = \{1, 2, 3\}$
c) dokažte, že pro $X, Y \in M$ platí: $X \subseteq Y \implies X \varrho Y$
d) ukažte, že předchozí implikaci nelze obrátit.

(Návod: při důkazu a) využijte cvičení [1.5.B16].)

[1.6.B15]. Nechť (A, ϱ), (B, σ) jsou uspořádané množiny, přičemž $A \cap B = \emptyset$. Na množině $A \cup B$ definujeme relaci τ takto: pro $x, y \in A \cup B$ je

$$x \tau y \iff (x, y \in A \wedge x \varrho y) \vee (x, y \in B \wedge x \sigma y) \vee (x \in A, y \in B).$$

Potom:
a) dokažte, že τ je relace uspořádání na $A \cup B$
b) dokažte, že τ je lineární uspořádání $\iff$ ϱ i σ jsou lineární uspořádání
c) nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(A \cup B, \tau)$, je-li (A, ϱ) uspořádaná množina ze cvičení [1.6.B4] c), resp. (B, σ) je uspořádaná množina ze cvičení [1.6.B2] c)
d) nakreslete schematicky hasseovský diagram uspořádané množiny $(A \cup B, \tau)$, je-li A množina všech sudých přirozených čísel, B je množina všech lichých přirozených čísel a ϱ i σ jsou obvyklá uspořádání čísel podle velikosti.

§7: EKVIVALENCE A ROZKLADY

[1.7.A1]. U.p. relace ϱ na množině $\mathbf{Z}$, která je současně ekvivalencí i uspořádáním. Dále uveďte, kolik takových relací existuje.

[1.7.A2]. U.p. relace ϱ na množině $\mathbf{N}$, která je reflexivní a tranzitivní, ale není ekvivalencí ani uspořádáním.

[1.7.A3]. U.p. relace ekvivalence ϱ na množině $\mathbf{R}$ tak, aby rozklad $\mathbf{R}/\varrho$ (tj. rozklad na $\mathbf{R}$, příslušný ekvivalenci ϱ) měl právě 3 třídy rozkladu.

[1.7.A4]. U.p. rozkladu na $\mathbf{R}$, který má konečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje konečně mnoho prvků.

[1.7.A5]. U.p. rozkladu na $\mathbf{N}$, který má nekonečně mnoho tříd, přičemž každá třída obsahuje nekonečně mnoho prvků.

[1.7.A6]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ tak, aby rozklad příslušný zobrazení f měl nekonečně mnoho tříd rozkladu.

[1.7.A7]. U.p. zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}_3$ tak, aby rozklad příslušný zobrazení f měl
a) 2 třídy rozkladu b) 4 třídy rozkladu.

[1.7.A8]. Uveďte všechny hodnoty modulu m pro které čísla -7 a 7 patří do stejné zbytkové třídy podle tohoto modulu m.

[1.7.A9]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby relace ϱ na množině M byla ekvivalencí.

[1.7.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby systém množin $\mathcal{M} = \{A, B\}$, kde $A, B \subseteq \mathbf{N}$, byl rozkladem na $\mathbf{N}$.

♣ ♣ ♣

[1.7.B1]. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je definována relace ϱ. Rozhodněte, zda ϱ je relací ekvivalence na množině M a pokud tomu tak je, pak sestrojte rozklad M/ϱ (tj. rozklad na množině M příslušný ekvivalenci ϱ). Přitom:
a) $\varrho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a), (d,c), (c,d)\}$
b) $\varrho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a), (a,d), (d,a), (b,d), (d,b)\}$.

[1.7.B2]. Určete, kolik různých rozkladů lze utvořit na množině M a všechny tyto rozklady vypište. Přitom:
a) $M = \{a, b\}$ b) $M = \{a, b, c\}$ c) $M = \{a, b, c, d\}$.

[1.7.B3]. Na množině $M = \{u, v, x, y, z\}$ je dán rozklad $\mathcal{R}$. Sestrojte tabulku relace $\sim_{\mathcal{R}}$ (tj. relace ekvivalence na množině M, příslušné rozkladu $\mathcal{R}$). Přitom:
a) $\mathcal{R} = \{\{u\}, \{x\}, \{z\}, \{v, y\}\}$ b) $\mathcal{R} = \{\{u, y\}, \{v, x, z\}\}$.

[1.7.B4]. Na množině $M = \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20\}$ definujeme relaci ϱ takto:

$$x \varrho y \iff \text{čísla } x, y \text{ mají stejný součet cifer}.$$

Pak dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na M a sestrojte rozklad M/ϱ (tj. rozklad na M, příslušný ekvivalenci ϱ):

[1.7.B5]. Na množině M je definována relace ϱ. Rozhodněte, zda ϱ je relací ekvivalence na M, je-li

a) $M = \mathbf{Z}$; $\varrho = \{(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid y = x$ nebo $y = x + 1\}$

b) $M = \mathbf{R}$; $\varrho = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x - y \in \mathbf{Z}\}$

c) $M = 2^{\mathbf{N}}$; $\varrho = \{(A,B) \in 2^{\mathbf{N}} \times 2^{\mathbf{N}} \mid (A - B)$ je konečná množina$\}$

d) $M = 2^{\mathbf{N}}$; $\varrho = \{(A,B) \in 2^{\mathbf{N}} \times 2^{\mathbf{N}} \mid (A \div B)$ je konečná množina$\}$

kde $A \div B$ je symetrická diference, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$.

[1.7.B6]. Na množině $\mathbf{Z}$ je definována relace ϱ. Dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na $\mathbf{Z}$ a popište rozklad $\mathbf{Z}/\varrho$ (tj. rozklad na $\mathbf{Z}$, příslušný ekvivalenci ϱ). Přitom pro $x, y \in \mathbf{Z}$ je:

a) $x \varrho y \iff \exists\, k \in \mathbf{Z} : y = x + 4k$ b) $x \varrho y \iff x^2 \equiv y^2 \pmod 7$

c) $x \varrho y \iff x^2 + 2x = y^2 + 2y$ d) $x \varrho y \iff 2 \mid (x^2 - y^2)$.

[1.7.B7]. Na množině $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je definována relace ϱ. Dokažte, že ϱ je ekvivalencí na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ a načrtněte, jak vypadá rozklad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\varrho$ (zde $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ chápeme jako množinu všech bodů v rovině). Přitom pro $(x,y),(u,v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je:

a) $(x,y)\,\varrho\,(u,v) \iff x - u = 0$

b) $(x,y)\,\varrho\,(u,v) \iff y - v = 2(x - u)$

c) $(x,y)\,\varrho\,(u,v) \iff (x-u)(x+u) = (v-y)(v+y)$

d) $(x,y)\,\varrho\,(u,v) \iff x^2 + y^2 + x + y = u^2 + v^2 + u + v$.

[1.7.B8]. Je zadán systém $\mathcal{M}$ jistých podmnožin množiny $\mathbf{R}$. Rozhodněte, zda $\mathcal{M}$ je rozklad na $\mathbf{R}$ a pokud tomu tak je, pak definujte relaci $\sim_{\mathcal{M}}$ (tj. relaci ekvivalence na $\mathbf{R}$, příslušnou rozkladu $\mathcal{M}$). Přitom:

a) $\mathcal{M} = \{\langle a, a+1) \mid a \in \mathbf{Z}\}$ b) $\mathcal{M} = \{\langle a, a+2) \mid a \in \mathbf{Z}\}$

c) $\mathcal{M} = \{\{0\}, (-\infty, 0), (0, \infty)\}$ d) $\mathcal{M} = \{\mathbf{R}\}$.

[1.7.B9]. Dokažte, že

a) inverzní relace k ekvivalenci na M je opět ekvivalencí na M
b) průnik libovolného počtu ekvivalencí na M je opět ekvivalencí na M
c) sjednocení dvou ekvivalencí na M nemusí být ekvivalencí na M
d) složení dvou ekvivalencí na M nemusí být ekvivalencí na M.

[1.7.B10]. Nechť ϱ, σ jsou relace ekvivalence na množině M. Dokažte, že pak relace $\varrho \cup \sigma$ je ekvivalencí na M právě když pro každé $X \in M/\varrho$ a každé $Y \in M/\sigma$ platí:

$$X \subseteq Y \text{ nebo } Y \subseteq X \text{ nebo } X \cap Y = \emptyset.$$

[1.7.B11]. Nechť ϱ, σ jsou ekvivalence na množině M. Dokažte, že pak relace $\varrho \circ \sigma$ je ekvivalencí na M právě když $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$ (tzn. relace ϱ, σ jsou záměnné).

[1.7.B12]. Nechť ϱ, σ jsou relace ekvivalence na M, resp. nechť $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ jsou rozklady na M. Dokažte, že platí:

a) $\varrho \neq \sigma \implies M/\varrho \neq M/\sigma$ b) $\mathcal{R} \neq \mathcal{S} \implies \sim_{\mathcal{R}} \neq \sim_{\mathcal{S}}$.

(Návod: důkazy veďte nepřímo.)

[1.7.B13]. Je dáno zobrazení $f : A \to B$. Popište rozklad $\mathcal{M}$ na množině A, příslušný zobrazení f, je-li:

a) $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{x,y,z\}$,

$f(a) = z$, $f(b) = y$, $f(c) = z$, $f(d) = z$, $f(e) = y$

b) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(x) = [x]$, pro $\forall x \in \mathbf{R}$

c) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(x) = |[x]|$, pro $\forall x \in \mathbf{R}$

d) $A = 2^{\mathbf{N}}$, $B = \mathbf{Z}$, $f(X) = \begin{cases} -1 & \text{je-li } X \text{ konečná, neprázdná} \\ 0 & \text{je-li } X = \emptyset \\ 1 & \text{je-li } X \text{ nekonečná} \end{cases}$

přitom symbol $[x]$ v b), c) značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x.

[1.7.B14]. Nechť $\mathcal{R}$ je rozklad na množině M. Definujme zobrazení $f : M \to \mathcal{R}$, tak, že každému prvku $x \in M$ přiřadíme tu třídu rozkladu $\mathcal{R}$, v níž prvek x leží, tj.

$$f(x) = X, \qquad \text{kde } X \in \mathcal{R} \ \wedge\ x \in X.$$

Pak:

a) dokažte, že f je surjektivní zobrazení
b) udejte nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby zobrazení f bylo injektivní
c) sestrojte rozklad na M, příslušný zobrazení f.

KAPITOLA 2:

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

§1: STRUKTURY S JEDNOU OPERACÍ

[2.1.A1]. Uveďte, kolika různými způsoby je možno definovat operaci na množině $G = \{x, y, z\}$.

[2.1.A2]. U.p. grupoidu $(G, \cdot)$ tak, že tento grupoid má jedničkou, ale není pologrupou.

[2.1.A3]. U.p. grupoidu $(G, \cdot)$ tak, že v tomto grupoidu neplatí zákony o dělení.

[2.1.A4]. U.p. konečné pologrupy, která nemá neutrální prvek.

[2.1.A5]. U.p. nekonečné pologrupy, ve které neplatí zákony zákony o krácení.

[2.1.A6]. U.p. pologrupy s jedničkou, v níž k některému prvku existují dva prvky inverzní.

[2.1.A7]. U.p. dvou různých grup tak, že každá z těchto grup má 10 prvků.

[2.1.A8]. U.p. dvou nekomutativních grup tak, že jedna je konečná a druhá je nekonečná.

[2.1.A9]. U.p. pologrupy, ve které platí zákony o dělení a neplatí zákony o krácení.

[2.1.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná   b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná   d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby pologrupa $(G, \cdot)$ byla grupou.

♣ ♣ ♣

[2.1.B1]. Je dána množina G a předpis $\circ$. Rozhodněte, zda tento předpis definuje operaci na G. Přitom:

a) $G = \{-1, 0, 1\}$; $x \circ y = x + y$ b) $G = \{-1, 0, 1\}$; $x \circ y = x \cdot y$

c) $G = \mathbf{R}$; $x \circ y = \operatorname{cotg}(2x + 3y)$ d) $G = \mathbf{Q}$; $x \circ y = (x^2 + y^2)^{-1}$

e) $G = S$ (množina všech sudých celých čísel) ; $x \circ y = \dfrac{x + y}{2}$

f) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = \begin{cases} y & \text{je-li } x = 3 \\ x + 1 & \text{je-li } y = 3 \\ 3 & \text{je-li } x \neq 3 \ \wedge \ y \neq 3 \end{cases}$

[2.1.B2]. Na množině $G = \{a, b, c, d\}$ je dána operace $\circ$ tabulkou. Rozhodněte, zda grupoid $(G, \circ)$ je komutativní, resp. asociativní, resp. zda má neutrální prvek. Přitom:

a)

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	b	c	d
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

b)

$\circ$	a	b	c	d
a	b	a	b	b
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	b	d	b	b

[2.1.B3]. Je dán grupoid $(G, \circ)$. Rozhodněte zda tento grupoid je komutativní, resp. asociativní, resp. zda má neutrální prvek. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$, $x \circ y = |x|$ b) $G = \mathbf{R}$, $x \circ y = (x + y)(1 + xy)$

c) $G = \mathbf{R}^+$, $x \circ y = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ d) $G = \mathbf{N}$, $x \circ y = (x, y)$

e) $G = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $x \circ y = (x, y)$

f) $G = 2^{\mathbf{N}}$, $X \circ Y = \begin{cases} \emptyset & \text{je-li } X \cap Y = \emptyset \\ \mathbf{N} & \text{je-li } X \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$

kde $\mathbf{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel, resp. symbol (x, y) v d), e) značí kladný největší společný dělitel čísel x, y.

[2.1.B4]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid; nechť $a, b, c, d \in G$. Potom:

a) vypište všechny možné součiny prvků a, b, c, d v tomto pořadí (tj. při všech možných uzávorkováních)

b) je-li $(G, \cdot)$ navíc pologrupa, pak pouze s využitím asociativního zákona dokažte, že všechny možné součiny prvků a, b, c, d (v tomto pořadí) se nazájem rovnají.

[2.1.B5]. Nechť G je libovolná množina, která má alespoň 2 prvky. Na G definujeme operaci o takto: $x \circ y = x$, pro $\forall x, y \in G$. Potom:
a) dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní pologrupa, která nemá neutrální prvek
b) uveďte, co se změní na předchozím tvrzení, je-li množina G jednoprvková.

[2.1.B6]. Dokažte, že daný grupoid $(G, \circ)$ má neutrální prvek. Dále pak nalezněte ke každému prvku z G všechny prvky inverzní (pokud existují). Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + y + x \cdot y$ b) $G = \mathbf{Q}$; $x \circ y = x \cdot y$

c) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = \begin{cases} y & \text{je-li } x = 3 \\ x & \text{je-li } y = 3 \\ 3 & \text{je-li } x \neq 3 \wedge y \neq 3 \end{cases}$

[2.1.B7]. Dokažte, že daná pologrupa $(G, \circ)$ má neutrální prvek. Dále pak nalezněte každý prvek z G, k němuž existuje prvek inverzní a tento inverzní prvek určete. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + y - xy$ b) $G = \mathbf{Q}$; $x \circ y = x + y - xy$

c) $G = \mathbf{Z}_6$; $\circ$ je násobení zbytkových tříd podle modulu 6

d) $G = \mathbf{Z}_7$; $\circ$ je násobení zbytkových tříd podle modulu 7.

[2.1.B8]. Je dán grupoid $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \circ)$, tj. množina všech zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení. Dokažte, že $(\mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \circ)$ je pologrupa s jedničkou, ve které neplatí zákony o krácení.

[2.1.B9]. Rozhodněte, zda v daném grupoidu:

a) $(\mathbf{Z}_2, +)$ b) $(\mathbf{Z}_{16}, \cdot)$ c) $(\mathbf{N}, +)$ d) $(2^{\mathbf{N}}, \cap)$

platí zákony o dělení, resp. platí zákony o krácení.

[2.1.B10]. Nechť $(G, \cdot)$ je konečný grupoid. Dokažte, že pak:

v $(G, \cdot)$ platí zákony o dělení $\iff$ v $(G, \cdot)$ platí zákony o krácení.

[2.1.B11]. Nechť $(G, \cdot)$ je nekonečný grupoid. Ukažte, že pak v grupoidu $(G, \cdot)$
a) z platnosti zákonů o krácení obecně neplyne platnost zákonů o dělení
b) z platnosti zákonů o dělení obecně neplyne platnost zákonů o krácení.

[2.1.B12]. Nechť grupoid $(G, \circ)$, kde G je konečná množina, je zadán tabulkou. Popište, jak se z této tabulky pozná, že

a) operace $\circ$ je komutativní b) $(G, \circ)$ má neutrální prvek

c) v $(G, \circ)$ platí zákony o dělení d) v $(G, \circ)$ platí zákony o krácení.

[2.1.B13]. Nechť $G = \{x, y, z\}$. Napište všechny možné tabulky operace $\circ$ na G tak, aby $(G, \circ)$ byl komutativní grupoid, v němž platí zákony o krácení.

[2.1.B14]. Určete, kolika způsoby se dá doplnit tabulka operace $\circ$ na množině $G = \{x, y, z\}$ tvaru

$\circ$	x	y	z
x	z	y	x
y	.	.	y
z	.	.	.

tak, aby $(G, \circ)$

a) byl grupoid b) byl komutativní grupoid
c) byl grupoid s jedničkou d) byla komutativní pologrupa
e) byla pologrupa s jedničkou f) byla grupa.

[2.1.B15]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid s jedničkou e. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) operace $\cdot$ je komutativní a asociativní

(ii) pro každé $x, y, u, v \in G$ platí: $(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$

(iii) pro každé $x, y, z \in G$ platí: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y$

[2.1.B16]. Na množině $G = \{e, a, b, c, d\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou 1. Dokažte, že $(G, \cdot)$ je nekomutativní grupoid s jedničkou, v němž platí zákony o dělení, ale který není grupou.

$\cdot$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	e	d	b
b	b	d	a	e	c
c	c	e	d	b	a
d	d	b	c	a	e

Tabulka 1

$\cdot$	e	r	s	t	u	v
e	e	r	s	t	u	v
r	r	s	e	u	v	t
s	s	e	r	v	t	u
t	t	u	v	s	r	e
u	u	v	t	r	e	s
v	v	t	u	e	s	r

Tabulka 2

[2.1.B17]. Na množině $G = \{e, r, s, t, u, v\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou 2.
Dokažte, že $(G, \cdot)$ je komutativní grupoid s jedničkou, v němž platí zákony o dělení a ke každému prvku existuje prvek inverzní, ale přitom $(G, \cdot)$ není grupou.

[2.1.B18]. Nechť $(G, \cdot)$ je pologrupa. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $(G, \cdot)$ je grupa

(ii) existuje prvek $j \in G$ tak, že $a \cdot j = a$ pro $\forall a \in G$ $\wedge$ ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $y \in G$ tak, že $a \cdot y = j$.

[2.1.B19]. Je dán komutativní grupoid $(G, \circ)$. Rozhodněte, zda $(G, \circ)$ je komutativní grupou.
Přitom:

a) $G = \mathbf{Q}^+$; $\circ$ je násobení čísel

b) $G = \mathbf{Q} - \{0\}$; $x \circ y = |x \cdot y|$

c) $G = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \ \wedge \ |x| \leq 1\}$; $\circ$ je násobení čísel

d) $G = \langle 0, 1)$; $x \circ y = x + y - [x + y]$

e) $G = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$; $\circ$ je sčítání komplexních čísel

f) $G = \{a + \sqrt{5} \cdot b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Q} \ \wedge \ (a^2 + b^2) \neq 0\}$; $\circ$ je násobení komplexních čísel,

kde $\mathbf{Q}^+$ značí množinu všech kladných racionálních čísel, resp. $[x + y]$ značí celou část reálného čísla $x + y$, tj. největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo $x + y$.

[2.1.B20]. Na množině $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ definujeme operaci $+$ takto:

$$(C_i\,,\,C_j) + (C_r\,,\,C_s) = (C_i + C_r\;,\;C_j + C_s)$$

kde symbol $+$ na pravé straně značí sčítání zbytkových tříd podle modulu 2.
Pak:

a) napište tabulku výše definované operace

b) dokažte, že $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +)$ je komutativní grupa (tato grupa se též nazývá *Kleinova čtyřgrupa*).

[2.1.B21]. Definujeme zobrazení $f_i : \mathbf{R} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{0, 1\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, 6$ takto:

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) = \frac{1}{1-x}\,.$$

Dokažte, že pak množina $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ s operací skládání zobrazení je nekomutativní grupa.

[2.1.B22]. Na množině $G = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ definujeme operaci $\circ$ takto:
$(C_i, C_j, C_k) \circ (C_x, C_y, C_z) = (C_i + C_x + C_k \cdot C_y \;,\; C_j + C_y \;,\; C_k + C_z)$
kde $+$, resp. $\cdot$ na pravé straně značí sčítání, resp. násobení zbytkových tříd podle modulu 2. Pak:

a) sestrojte tabulku operace $\circ$ (přitom pro jednoduchost místo C_i pište vždy stručně pouze i)

b) dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa, která má 8 prvků

c) zobecněním uvedeného příkladu nalezněte pro libovolné $m \geq 2$, $s \geq 3$ nekomutativní grupu, která má právě m^s prvků.

[2.1.B23]. Je dána pologrupa $(G, \circ)$. Rozhodněte, zda $(G, \circ)$ je grupa, resp. komutativní grupa, je-li:

a) $G = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (tj. množina všech zobrazení $\langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$); $\circ$ je sčítání reálných funkcí, tj.
pro $f, g \in G$ je : $(f \circ g)(x) = f(x) + g(x)$, pro $\forall x \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $G = \mathbf{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ (tj. množina všech zobrazení $\langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \mathbf{R}$); $\circ$ je násobení reálných funkcí, tj.
pro $f, g \in G$ je : $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pro $\forall x \in \langle 0, 1 \rangle$

c) $G = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (tj. množina všech zobrazení $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$); $\circ$ je skládání zobrazení

d) $G = \{f \mid f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je bijektivní zobrazení$\}$; $\circ$ je skládání zobrazení.

[2.1.B24]. Je dán grupoid $(G, \circ)$. Dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa. Přitom:

a) $G = \mathbf{Z}$; $x \circ y = x + (-1)^x \cdot y$

b) $G = (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R}$; $(x, y) \circ (u, v) = (xu \;,\; xv + y)$

c) $G = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $(x, y, z) \circ (a, b, c) = (x + a \;,\; y + b \;,\; z + c + xb)$.

[2.1.B25]. Nechť $(A, \circ)$, $(B, *)$ jsou dané grupy. Na množině $A \times B$ definujeme operaci $\heartsuit$ takto:
$(a_1, b_1) \heartsuit (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2 \;,\; b_1 * b_2)$, pro $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$
Dokažte, že:

a) $(A \times B, \heartsuit)$ je grupa

b) grupa $(A \times B, \heartsuit)$ je komutativní $\Longleftrightarrow$ obě grupy $(A, \circ)$, $(B, *)$ jsou komutativní.

[2.1.B26]. Nechť $(G, \circ)$ je grupa; nechť $p \in G$ je pevný prvek. Na množině G definujeme operaci $*$ takto:

$$x * y = x \circ p \circ y \qquad \text{pro } \forall x, y \in G\,.$$

Rozhodněte, zda $(G, *)$ je grupa.

[2.1.B27]. Nechť $(G,\cdot)$ je grupa; e je její neutrální prvek. Dokažte, že:
a) jestliže $x\cdot x = e$, pro $\forall x \in G$, pak operace $\cdot$ je komutativní
b) jestliže $(x\cdot y)^2 = x^2\cdot y^2$, pro $\forall x, y \in G$, pak operace $\cdot$ je komutativní
c) jestliže $(x\cdot y)^2 = y\cdot x^2\cdot y$, pro $\forall x, y \in G$, pak operace $\cdot$ je komutativní
d) jestliže $\exists$ přirozené číslo k tak, že pro $\forall x, y \in G$ je:
$(x\cdot y)^k = x^k\cdot y^k \wedge (x\cdot y)^{k+1} = x^{k+1}\cdot y^{k+1} \wedge (x\cdot y)^{k+2} = x^{k+2}\cdot y^{k+2}$
pak operace $\cdot$ je komutativní.

(Návod: při důkazu d) využijte toho, že lze psát
$(x\cdot y)^{k+1} = x\cdot(y\cdot x)^k\cdot y$, resp. $(x\cdot y)^{k+2} = x\cdot(y\cdot x)^{k+1}\cdot y$.)

[2.1.B28]. Dokažte, že každá čtyřprvková grupa musí být komutativní.
(Návod: vyšetřete zvlášť případ, když $x^2 = e$ pro $\forall x \in G$ a zvlášť případ, když existuje $x \in G$ tak, že $x^2 \neq e$.)

[2.1.B29]. Nechť $(G,\cdot)$ je konečná grupa, která má sudý počet prvků. Dokažte, že pak existuje prvek $a \in G$, různý od neutrálního prvku e, takový, že $a^2 = e$.
(Návod: využijte toho, že je-li $a^2 \neq e$, pak je $a^{-1} \neq a$.)

§2: PODSTRUKTURY STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.2.A1]. U.p. dvou disjunktních podgrupoidů v grupoidu:
a) $(\mathbf{N},\cdot)$ b) $(\mathbf{N},+)$.

[2.2.A2]. U.p. nekomutativního podgrupoidu v grupoidu $(\mathbf{Z}_{12},\cdot)$.

[2.2.A3]. U.p. grupoidu $(G,\cdot)$ s jedničkou e a jeho podgrupoidu $(H,\cdot)$, který
a) nemá jedničku b) má jedničku, různou od e.

[2.2.A4]. U.p. grupy $(G,\cdot)$ a jejích dvou různých podgrup $(H_1,\cdot)$, $(H_2,\cdot)$ takových, že $(H_1 \cup H_2,\cdot)$
a) není podgrupou v $(G,\cdot)$ b) je podgrupou v $(G,\cdot)$.

[2.2.A5]. U.p. 17-ti prvkové podgrupy v grupě $(\mathbf{K}-\{0\},\cdot)$.

[2.2.A6]. Určete všechny podgrupy grupy celých čísel $(\mathbf{Z},+)$, které obsahují číslo 63.

[2.2.A7]. Popište (výčtem prvků) všechny netriviální podgrupy:
a) v grupě $(\mathbf{Z}_{12},+)$ b) v grupě $(\mathbf{Z}_{13},+)$.

[2.2.A8]. U.p. netriviální podgrupy v grupě $(\mathbf{Z}_{16},+)$, která
a) neobsahuje prvek C_8 b) neobsahuje prvek C_2.

[2.2.A9]. U.p. přirozeného čísla m tak, aby grupa $(\mathbf{Z}_m,+)$ měla právě
a) 4 podgrupy b) 5 podgrup
c) k podgrup, kde k je libovolné pevné přirozené číslo.

[2.2.A10]. Nechť $(G,\cdot)$ je grupa; nechť $H \subseteq G$. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby $(H,\cdot)$ byla podgrupou grupy $(G,\cdot)$.

♣ ♣ ♣

[2.2.B1]. Je dán grupoid $(\mathbf{N},+)$ a podmnožina $H \subseteq \mathbf{N}$. Rozhodněte, zda $(H,+)$ je podgrupoidem grupoidu $(\mathbf{N},+)$, je-li
a) $H = \mathbf{N} - \{1,2,4,5\}$ b) $H = \mathbf{N} - \{1,2,5,6\}$
c) H je libovolná, neprázdná konečná podmnožina v $\mathbf{N}$
d) $H = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 \mid x \vee 7 \mid x\}$.

[2.2.B2]. Je dána grupa $(\mathbf{K}-\{0\},\cdot)$ a dále neprázdná podmnožina $H \subseteq \mathbf{K}-\{0\}$. Rozhodněte, zda $(H,\cdot)$ je podgrupoidem, resp. podgrupou grupy $(\mathbf{K}-\{0\},\cdot)$, je-li:
a) $H = \{z \in \mathbf{K} \mid |z| \geq 1\}$ b) $H = \{a+b\cdot i \in \mathbf{K} \mid b > 0\}$
c) $H = \{a+b\cdot i \mid a,b \in \mathbf{Z} \wedge (a^2+b^2) \neq 0\}$
d) $H = \{z \in \mathbf{K}-\{0\} \mid z$ je reálné číslo nebo z je ryze imaginární číslo$\}$.

[2.2.B3]. Na množině $G = \{a,b,c,d\}$ je dána operace $\cdot$ tabulkou

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	c	c	a
b	b	b	c	a
c	b	c	b	a
d	a	b	b	a

V grupoidu $(G,\cdot)$ pak nalezněte všechny podgrupoidy, resp. všechny podpologrupy, resp. všechny podgrupy.

[2.2.B4]. Nechť $(G,\cdot)$ je grupoid. Dokažte, že průnik libovolného systému podgrupoidů grupoidu $(G,\cdot)$ je buď prázdná množina nebo podgrupoid v $(G,\cdot)$.

[2.2.B5]. Dokažte, že
a) v grupoidu $(\mathbf{N},+)$ neexistují žádné dva disjunktní podgrupoidy
b) v grupoidu $(\mathbf{N},\cdot)$ existuje nekonečně mnoho po dvou disjunktních podgrupoidů.

[2.2.B6]. Je dán grupoid $(\mathbf{N}, \circ)$, kde $x \circ y = y + 1$, pro $\forall x, y \in \mathbf{N}$. Pro každé přirozené číslo i označme :

$$H_i = \{ i , i+1 , i+2 , \ldots \} .$$

Dokažte, že pak :

a) $(H_1, \circ)$, $(H_2, \circ)$, $(H_3, \circ)$, ... jsou právě všechny podgrupoidy zadaného grupoidu $(\mathbf{N}, \circ)$

b) $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \emptyset$

c) průnik neprázdného systému podgrupoidů grupoidu $(\mathbf{N}, \circ)$ je podgrupoidem v $(\mathbf{N}, \circ)$ právě když tento systém je konečný.

[2.2.B7]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jedničkou e. Nechť dále je :

$$H = \{ x \in G \mid x \cdot x = x \} .$$

Dokažte, že pak $(H, \cdot)$ je podpologrupou pologrupy $(G, \cdot)$.

[2.2.B8]. Je dána grupa $(\mathbf{Q}, +)$ a neprázdná podmnožina $H \subseteq \mathbf{Q}$. Rozhodněte, zda $(H, +)$ je podgrupou grupy $(\mathbf{Q}, +)$, je-li:

a) $H = \left\{ \frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ ; } k \geq 0 \text{ celé číslo} \right\}$

b) $H = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ jsou nesoudělná } \wedge \; a \leq b \right\}$

c) p je pevné prvočíslo ; $H = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ jsou nesoudělná } \wedge \; p \nmid b \right\}$

d) $H = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) = 1 \wedge b \text{ není dělitelné čtvercem žádného prvočísla} \right\}$

[2.2.B9]. Je dána nekomutativní grupa $(G, \circ)$, kde $G = \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{R}$, resp.

$$(x, y) \circ (u, v) = (xu , xv + y) , \quad \text{pro } \forall (x, y), (u, v) \in \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{R}$$

(viz cvičení [2.1.B24] b)). Rozhodněte, zda $(H, \circ)$ je podgrupa, resp. komutativní podgrupa grupy $(G, \circ)$, je-li:

a) $H = \{(1, 0), (-1, 0)\}$
b) $H = \{(1, b) \mid b \in \mathbf{R} \text{ libovolné} \}$
c) $H = \mathbf{Q} - \{0\} \times \mathbf{Q}$
d) $H = \mathbf{R} - \{0\} \times \mathbf{Q}$.

[2.2.B10]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Potom :

a) dokažte, že průnik libovolného neprázdného systému podgrup grupy $(G, \cdot)$ je opět podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) ukažte, že sjednocení dvou podgrup grupy $(G, \cdot)$ obecně není podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

[2.2.B11]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a nechť M je libovolná podmnožina množiny G. Označme:

$$\langle M \rangle = \bigcap H_i \; (H_i \text{ je podgrupa v } G \wedge H_i \supseteq M\}$$

Dokažte, že $(\langle M \rangle, \cdot)$ je nejmenší (vzhledem k inkluzi $\subseteq$) podgrupa grupy $(G, \cdot)$, obsahující množinu M.

(Podgrupa $(\langle M \rangle, \cdot)$ se nazývá *podgrupa generovaná množinou* M.)

[2.2.B12]. V grupě $(\mathbf{Z}, +)$ popište podgrupu $(\langle M \rangle, +)$, je-li:

a) $M = \emptyset$
b) $M = \{ 4 , 5 \}$
c) $M = \{ 12 , 21 \}$
d) $M = \{ a \in \mathbf{Z} \mid a \geq 10.000 \}$.

[2.2.B13]. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Označme :

$$H = \{ a \in G \mid a \cdot x = x \cdot a \quad \text{pro } \forall x \in G \} .$$

Dokažte, že pak :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$
b) $H = G \iff$ grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.

(Podgrupa $(H, \cdot)$ se nazývá *centrum grupy* $(G, \cdot)$.)

[2.2.B14]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní grupa. Označme :

$$H = \{ a \in G \mid a \cdot a = e \}$$

(tj. H je množina všech prvků z G, které jsou samy k sobě inverzní). Dokažte, že :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$
b) předpoklad komutativnosti grupy $(G, \cdot)$ nelze vypustit, tj. je-li $(G, \cdot)$ nekomutativní grupa, pak $(H, \cdot)$ nemusí být podgrupou v $(G, \cdot)$.

(Návod: při b) uvažujte např. nekomutativní grupu všech bijektivních zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení.)

[2.2.B15]. Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní grupa. Označme :

$$H = \{ a \in G \mid \text{ existuje } n \in \mathbf{N} \text{ tak, že } a^n = e \}$$

(tj. H je množina těch prvků z G, jejichž některá přirozená mocnina je rovna jedničce grupy $(G, \cdot)$).
Dokažte, že :

a) $(H, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$
b) předpoklad komutativnosti grupy $(G, \cdot)$ nelze vypustit, tj. je-li $(G, \cdot)$ nekomutativní grupa, pak $(H, \cdot)$ nemusí být podgrupou v $(G, \cdot)$.

(Návod: při b) uvažujte např. nekomutativní grupu všech bijektivních zobrazení $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s operací skládání zobrazení.)

[2.2.B16]. Nechť $(G,\cdot)$ je pevná grupa. Nechť $\mathcal{B}(G)$ označuje množinu všech bijektivních zobrazení $G \to G$, resp. $\circ$ označuje skládání zobrazení. Dále, pro každé $a \in G$ definujeme zobrazení $f_a : G \to G$ takto:

$$f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1} \quad , \text{ pro } \forall\, x \in G$$

Množinu těchto zobrazení označme $\mathcal{H}(G)$, tj. $\mathcal{H}(G) = \{f_a \mid a \in G\}$. Dokažte, že pak :

a) $(\mathcal{B}(G), \circ)$ je grupa

b) f_a je bijektivní zobrazení (pro $\forall a \in G$)

c) $(\mathcal{H}(G), \circ)$ je podgrupou grupy $(\mathcal{B}(G), \circ)$

d) $\mathcal{H}(G)$ je jednoprvková množina $\iff$ $(G,\cdot)$ je komutativní grupa.

(Návod: při c) ověřujte m.j., že $f_a \circ f_b = f_{a\cdot b}$, resp. $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.)

[2.2.B17]. Nechť $G = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$ a nechť na množině G je definována operace $\circ$ takto:

$$(C_i, C_j, C_k) \circ (C_r, C_s, C_t) = (C_i + C_r \ , \ C_j + C_s \ , \ C_k + C_t)$$

kde $+$ na pravé straně značí sčítání zbytkových tříd podle modulu 3. Dále označme:

$e = (C_0, C_0, C_0)$, $x = (C_0, C_1, C_2)$, $y = (C_0, C_2, C_1)$, $z = (C_2, C_2, C_2)$ resp.

$$H_1 = \{e, x\} \ , \quad H_2 = \{e, x, y\} \ , \quad H_3 = \{e, x, y, z\} \, .$$

Potom:

a) určete, kolik prvků má množina G
b) dokažte, že $(G, \circ)$ je komutativní grupa
c) rozhodněte, zda $(H_1, \circ)$, resp. $(H_2, \circ)$, resp. $(H_3, \circ)$ jsou podgrupy v grupě $(G, \circ)$
d) rozhodněte, zda v grupě $(G, \circ)$ existuje dvouprvková podgrupa
e) v $(G, \circ)$ nalezněte nejmenší (vzhledem k inkluzi $\subseteq$) podgrupu, která obsahuje prvek $z = (C_2, C_2, C_2)$.

[2.2.B18]. V množině zbytkových tříd $\mathbf{Z}_m$ uvažujme podmnožinu

$$H_k = \{C_{i\cdot k} \mid i = 0, 1, \ldots, \tfrac{m}{k} - 1\}$$

pro každé přirozené k, které dělí modul m. Dokažte, že :

$(H,+)$ je podgrupou v $(\mathbf{Z}_m,+) \iff \exists\, k \in \mathbf{N}$ tak, že $k \mid m \ \wedge \ H = H_k$.

[2.2.B19]. V dané grupě zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+)$ vypiště všechny podgrupy a dále pak nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{H}, \subseteq)$, kde $\mathcal{H}$ značí množinu všech podgrup grupy $(\mathbf{Z}_m,+)$. Přitom daná grupa je:

a) $(\mathbf{Z}_3,+)$ b) $(\mathbf{Z}_8,+)$ c) $(\mathbf{Z}_{12},+)$ d) $(\mathbf{Z}_{21},+)$.

[2.2.B20]. V grupě $(\mathbf{Z}_{12},+)$ nalezněte podgrupu $(\langle M \rangle,+)$ (tj. podgrupu generovanou množinou $M \subseteq \mathbf{Z}_m$), je-li:

a) $M = \emptyset$ b) $M = \{C_0\}$
c) $M = \{C_9\}$ d) $M = \{C_0, C_6, C_9\}$.

[2.2.B21]. Pro zadaný modul m dokažte, že $(\mathbf{Z}_m - \{C_0\}, \cdot)$ je grupa. Dále pak vypište všechny podgrupy této grupy a nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$, kde $\mathcal{P}$ značí množinu všech podgrup dané grupy $(\mathbf{Z}_m - \{C_0\}, \cdot)$. Přitom:

a) $m = 5$ b) $m = 7$.

(Návod: použijte tabulku operace násobení zbytkových tříd podle daného modulu.)

§3: STRUKTURY SE DVĚMA OPERACEMI A JEJICH PODSTRUKTURY

[2.3.A1]. U.p. okruhu, ve kterém neplatí omezené zákony o krácení.

[2.3.A2]. U.p. okruhu, který nemá dělitele nuly a přitom není oborem integrity.

[2.3.A3]. U.p. konečného oboru integrity, který není tělesem.

[2.3.A4]. U.p. nenulového prvku v okruhu $(\mathbf{Z}_{17},+,\cdot)$, k němuž neexistuje prvek inverzní (vzhledem k operaci $\cdot$).

[2.3.A5]. U.p. okruhu, který nemá jedničku a jeho podokruhu, který jedničku má.

[2.3.A6]. Udejte, kolik existuje podokruhů v okruhu $(\mathbf{Z},+,\cdot)$, které obsahují číslo

a) 30 b) 45 c) 64.

[2.3.A7]. U.p. podokruhu okruhu $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ tak, že tento podokruh obsahuje čísla 76 a 77 a neobsahuje číslo 78.

[2.3.A8]. Popište všechny podokruhy okruhu

a) $(\mathbf{Z}_8,+,\cdot)$ b) $(\mathbf{Z}_{11},+,\cdot)$.

[2.3.A9]. U.p. přirozeného čísla m tak, aby okruh zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$ měl právě 6 podokruhů.

[2.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby okruh $(R,+,\cdot)$ byl oborem integrity.

♣ ♣ ♣

[2.3.B1]. Rozhodněte, zda množina M s operacemi obyčejného sčítání čísel a obyčejného násobení čísel je okruhem, je-li:

a) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbf{Z}, k \geq 0 \text{ celé}\}$ b) $M = \{a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

c) $M = \{a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ d) $M = \{a + b\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

[2.3.B2]. Rozhodněte, zda $(M, \oplus, \circ)$ je okruh, resp. obor integrity, resp. těleso. Přitom množina M a operace $\oplus, \circ$ jsou zadány takto:

a) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y + 3$, $x \circ y = -3$
b) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x \cdot y - 1$
c) $M = \mathbf{Z}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x + y - x \cdot y$
d) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y$, $x \circ y = y$
e) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y + 1$, $x \circ y = x + y + x \cdot y$
f) $M = \mathbf{Q}$; $x \oplus y = x + y - 1$, $x \circ y = x + y + x \cdot y$.

[2.3.B3]. Uvažme podmnožinu G množiny všech komplexních čísel :

$$G = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$$

(množina G se nazývá *množina Gaussových celých čísel*), s operacemi obyčejného sčítání komplexních čísel a obyčejného násobení komplexních čísel. Dokažte, že

a) $(G, +, \cdot)$ je obor integrity, který není tělesem
b) v $(G, +, \cdot)$ existují inverzní prvky (vzhledem k operaci$\cdot$) právě jenom k číslům $1, -1, i, -i$.

(Návod: při důkazu b) přejděte k absolutním hodnotám z komplexních čísel a využijte pravidel pro počítání s nimi.)

[2.3.B4]. Na množině $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, resp. na množině $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definujeme operace $+$ a $\cdot$ takto :

$(x, y) + (u, v) = (x + u\ ,\ y + v)$; $(x, y) \cdot (u, v) = (xu + 2yv\ ,\ xv + yu)$

Dokažte, že pak :

a) $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, +, \cdot)$ je těleso
b) $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou, který má dělitele nuly (tzn. není tělesem).

[2.3.B5]. Na množině $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ definujeme operace $+$ a $\cdot$ takto:

$$(C_i, C_j) + (C_r, C_s) = (C_i + C_r\ ,\ C_j + C_s)$$
$$(C_i, C_j) \cdot (C_r, C_s) = (C_i \cdot C_r + C_j \cdot C_s\ ,\ C_i \cdot C_s + C_j \cdot C_r + C_j \cdot C_s)$$

kde $+$, resp. $\cdot$ na pravých stranách značí sčítání, resp. násobení zbytkových tříd podle modulu 2. Potom:

a) napište tabulky operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$
b) dokažte, že $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +, \cdot)$ je těleso.

[2.3.B6]. Nechť $(R, +, \cdot)$, $(S, \oplus, \circ)$ jsou okruhy. Na množině $R \times S$ definujeme operace $\heartsuit$ a $*$ takto:

$$(r_1, s_1) \heartsuit (r_2, s_2) = (r_1 + r_2\ ,\ s_1 \oplus s_2)$$
$$(r_1, s_1) * (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2\ ,\ s_1 \circ s_2)$$

Dokažte, že platí:

a) $(R \times S, \heartsuit, *)$ je okruh
b) $(R \times S, \heartsuit, *)$ je komutativní okruh $\iff$ $(R, +, \cdot)$ a $(S, \oplus, \circ)$ jsou komutativní okruhy
c) $(R \times S, \heartsuit, *)$ je okruh s jedničkou $\iff$ $(R, +, \cdot)$ a $(S, \oplus, \circ)$ jsou okruhy s jedničkou
d) $(R \times S, \heartsuit, *)$ je okruh bez dělitelů nuly $\implies$ $(R, +, \cdot)$ a $(S, \oplus, \circ)$ jsou okruhy bez dělitelů nuly
e) jestliže $(R, +, \cdot)$ a $(S, \oplus, \circ)$ jsou okruhy bez dělitelů nuly, potom okruh $(R \times S, \heartsuit, *)$ nemusí být okruhem bez dělitelů nuly.

[2.3.B7]. Nechť $\mathbf{R}[x]$ značí množinu všech polynomů (tj. mnohočlenů) neurčité x, s reálnými koeficienty. Dokažte, že množina $\mathbf{R}[x]$ s operacemi obvyklého sčítání polynomů a obvyklého násobení polynomů je oborem integrity, který není tělesem.

[2.3.B8]. Nechť $(T, +, \cdot)$ je libovolné, pevné těleso. Nechť $M = \{f : \mathbf{Z} \to T \mid f(z) \neq 0_T \text{ pouze pro konečně mnoho } z \in \mathbf{Z}\}$.
Dále, pro $\forall f, g \in M$ definujeme $f \oplus g : \mathbf{Z} \to T$, resp. $f \circ g : \mathbf{Z} \to T$ takto: pro $\forall z \in \mathbf{Z}$ je

$$(f \oplus g)(z) = f(z) + g(z)\ , \qquad \text{resp. } (f \circ g)(z) = \sum_{a+b=z} f(a) \cdot g(b)$$

Dokažte, že pak $(M, \oplus, \circ)$ je oborem integrity.

[2.3.B9]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je netriviální okruh s jedničkou. Dokažte, že pak tato jednička a nulový prvek daného okruhu musí být různé.
(Návod: použijte nepřímý důkaz.)

[2.3.B10]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je netriviální okruh s jedničkou. Označme:

$$J = \{x \in R \mid \text{k prvku } x \text{ existuje prvek inverzní (vzhledem k } \cdot)\}\ .$$

Dokažte, že potom :

a) množina J neobsahuje žádné dělitele nuly okruhu $(R, +, \cdot)$
b) $(J, \cdot)$ je grupa (tj. je to podgrupa multiplikativní pologrupy $(R, \cdot)$)
c) $(J, +, \cdot)$ není podokruhem okruhu $(R, +, \cdot)$.

[2.3.B11]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je okruh. Potom :

a) dokažte, že průnik libovolného neprázdného systému podokruhů okruhu $(R, +, \cdot)$ je opět podokruhem tohoto okruhu
b) ukažte, že sjednocení dvou podokruhů okruhu $(R, +, \cdot)$ obecně není podokruhem tohoto okruhu.

[2.3.B12]. Nechť $(R,+,\cdot)$ je okruh. Označme :

$$S=\{a\in R \mid \text{pro každé } x\in R \text{ platí: } a\cdot x=x\cdot a\}.$$

Dokažte, že pak $(S,+,\cdot)$ je podokruhem okruhu $(R,+,\cdot)$.

[2.3.B13]. Uvažme množinu $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (tj. množinu všech zobrazení $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$) a pro $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definujme zobrazení $f+g$, $f\cdot g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takto:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\,,\quad \text{resp. } (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \qquad \text{pro } \forall x\in\mathbf{R}.$$

Pro každé $i\in\mathbf{N}$ označme symbolem S_i množinu všech zobrazení $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, která mimo interval $(-i,i)$ nabývají pouze nulových hodnot, tj.

$$S_i=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(x)=0 \ \text{ pro } \forall x\in\mathbf{R}-(-i,i)\}.$$

Dále označme $S=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Potom dokažte, že:

a) $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}},+,\cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou, který má dělitele nuly
b) pro každé $i\in\mathbf{N}$ je $(S_i,+,\cdot)$ podokruhem v $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}},+,\cdot)$ a tento podokruh má jedničku
c) $(S,+,\cdot)$ je podokruhem v $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}},+,\cdot)$ a tento podokruh jedničku nemá.

[2.3.B14]. Na množině $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ definujeme operace $+$ a $\cdot$ takto:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)+(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1+b_1\,,\ a_2+b_2\,,\ a_3+b_3\,,\ a_4+b_4)$$
$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot(b_1,b_2,b_3,b_4)=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_3\,,\ a_1b_2+a_2b_4\,,\ a_3b_1+a_4b_3\,,\ a_3b_2+a_4b_4)$$

Potom:

a) dokažte, že $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},+,\cdot)$ je nekomutativní okruh s jedničkou, který má dělitele nuly
b) označíme-li $S=\{(a,b,-b,a)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$, pak dokažte, že $(S,+,\cdot)$ je podtělesem okruhu $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},+,\cdot)$.

[2.3.B15]. Nechť M označuje množinu všech nekonečných posloupností reálných čísel. Na množině M definujeme operaci $\oplus$ jako "sčítání po složkách" a operaci $\circ$ jako "násobení po složkách", tj.,:

$$(a_1,a_2,\dots)\oplus(b_1,b_2,\dots)=(a_1+b_1\,,\ a_2+b_2\,,\dots)$$
$$(a_1,a_2,\dots)\circ(b_1,b_2,\dots)=(a_1\cdot b_1\,,\ a_2\cdot b_2\,,\dots)$$

Potom:

a) dokažte, že $(M,\oplus,\circ)$ je komutativní okruh s jedničkou
b) ukažte, že v $(M,\oplus,\circ)$ existují dělitelé nuly a popište je
c) rozhodněte, zda $(S,\oplus,\circ)$ je podokruhem okruhu $(M,\oplus,\circ)$, je-li S množina všech nekonečných posloupností reálných čísel, majících
   α) konečně mnoho složek různých od nuly
   β) konečně mnoho složek rovných nule
   γ) první dvě složky rovné nule
   δ) první dvě složky rovné jedné.

[2.3.B16]. V daném okruhu zbytkových tříd vypočtěte (pokud lze výpočet provést) výrazy x,y,z. Z důvodů stručnosti budeme psát místo C_i pouze i, resp. místo $C_i\cdot(C_j)^{-1}$ pouze $\frac{i}{j}$. Přitom:

a) v $(\mathbf{Z}_{10},+,\cdot)$

$$x=\frac{4}{4}\quad;\quad y=5\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{7}\right)\quad;\quad z=\frac{8\cdot6-7\cdot9}{9}\cdot\frac{-5-8\cdot8}{7}$$

b) v $(\mathbf{Z}_{13},+,\cdot)$

$$x=\frac{11}{10}-3\quad;\quad y=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\quad;\quad z=\frac{6}{-7}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)\cdot(12+11).$$

[2.3.B17]. Nalezněte všechny podokruhy v okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$ a rozhodněte, které z nich jsou navíc podtělesy. Přitom:

a) $m=9$ b) $m=10$ c) $m=11$ d) $m=12$.

[2.3.B18]. V okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$ nalezněte všechny prvky, k nimž existuje prvek inverzní (vzhledem k $\cdot$). Přitom:

a) $m=9$ b) $m=10$ c) $m=11$ d) $m=12$.

[2.3.B19]. Dokažte, že v každém okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$, kde $m\geq3$, platí:

a) k prvku C_{m-1} existuje vždy prvek inverzní, a sice sám prvek C_{m-1}
b) je-li m liché číslo, pak k prvku C_2 existuje inverzní prvek, kterým je prostřední člen posloupnosti $C_1,C_2,\dots,C_{m-1},C_0$
c) jestliže m je tvaru: $m=3k+2$, pak k prvku C_3 existuje prvek inverzní, a sice prvek $C_{\frac{m+1}{3}}$
d) jestliže m je liché číslo tvaru $m=3k+1$, pak k prvku $C_{\frac{m+3}{2}}$ existuje prvek inverzní, a sice prvek $C_{\frac{m+2}{3}}$.

[2.3.B20]. Dokažte, že v okruhu zbytkových tříd $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) k prvku $C_i\in\mathbf{Z}_m$ existuje prvek inverzní
(ii) $C_i\neq C_0 \ \wedge\ C_i$ není dělitelem nuly v $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$
(iii) $(i,m)=1$.

[2.3.B21]. Nechť $m\geq2$; dokažte, že pak v okruhu $(\mathbf{Z}_m,+,\cdot)$ pro každé $C_i\neq C_0$ platí : $C_i^2=C_{m-i}^2$.

[2.3.B22]. Nechť $p>2$ je prvočíslo. Dokažte, že v tělese $(\mathbf{Z}_p,+,\cdot)$ platí:

a) $1\leq i,j\leq\frac{p-1}{2}\ \wedge\ i\neq j \implies C_i^2\neq C_j^2$
b) pro pevné $C_i\in\mathbf{Z}_p\ \wedge\ C_i\neq C_0$ má rovnice: $C_x^2=C_i$ buď 2 řešení nebo nemá žádné řešení.

[2.3.B23]. Nechť p je prvočíslo. Řekneme, že *prvek* $C_i \in \mathbf{Z}_p$ *je čtvercem* v tělese $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$, jestliže existuje $C_x \in \mathbf{Z}_p$ tak, že: $C_i = C_x^2$.
Určete všechny prvky C_i, které jsou čtvercem v tělese $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$, je-li:

a) $p = 3$ b) $p = 5$ c) $p = 7$ d) $p = 11$.

[2.3.B24]. Nechť $p > 2$ je prvočíslo. Dokažte, že pak v tělese $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$ vždy $\frac{p+1}{2}$ prvků je čtvercem a $\frac{p-1}{2}$ prvků není čtvercem.
(Návod: vyšetřujte zvlášť prvek C_0 a zvlášť všechny nenulové prvky z tělesa $(\mathbf{Z}_p, +, \cdot)$, u nichž využijte výsledek cvičení [2.3.B22] a) a výsledek cvičení [2.3.B21].)

[2.3.B25]. Nechť T je konečné těleso takové, že char $T \neq 2$ (tj. $1 \neq -1$). Dokažte, že potom množina T má lichý počet prvků.
(Návod: nejprve sporem dokazujte, že pro prvek $a \in T$, $a \neq 0, 1, -1$ musí být $a^{-1} \neq a$.)

[2.3.B26]. Určete charakteristiku následujících okruhů, resp. těles:
a) okruhu Gaussových celých čísel $(G, +, \cdot)$ ze cvičení [2.3.B3]
b) tělesa $(\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, +, \cdot)$ ze cvičení [2.3.B4] a)
c) tělesa $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +, \cdot)$ ze cvičení [2.3.B5]
d) okruhu $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +, \cdot)$ ze cvičení [2.3.B13].

[2.3.B27]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je netriviální okruh, v němž platí:

$$x \cdot x = x \quad \text{pro každé } x \in R\,.$$

Dokažte, že pak okruh $(R, +, \cdot)$ má charakteristiku 2.

[2.3.B28]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je obor integrity, který má charakteristiku $p \neq 0$ (tzn. p je prvočíslo). Nechť $0 \neq a \in R$, resp. $m, n \in \mathbf{N}$. Dokažte, že pak platí:

$$m \cdot a = n \cdot a \iff p \mid (m - n)\,.$$

[2.3.B29]. Nechť $(R, +, \cdot)$ je obor integrity, který má charakteristiku $p \neq 0$ (tzn. p je prvočíslo). Dokažte, že pak pro každé $x, y, \in R$ a každé přirozené číslo n platí:

a) $(x + y)^p = x^p + y^p$ b) $(x - y)^p = x^p - y^p$
c) $(x + y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$ d) $(x - y)^{p^n} = x^{p^n} - y^{p^n}$.

§4: ČÍSELNÁ TĚLESA

[2.4.A1]. U.p. tělesa, které není číselným tělesem.

[2.4.A2]. U.p. číselného tělesa, které není oborem integrity.

[2.4.A3]. U.p. číselného tělesa, které neobsahuje číslo 13.

[2.4.A4]. U.p. číselného tělesa, které neobsahuje číslo $\sqrt{13}$.

[2.4.A5]. U.p. číselného tělesa, různého od $(\mathbf{K}, +, \cdot)$, které obsahuje číslo $(1 + i)$.

[2.4.A6]. Udejte, kolik existuje různých číselných těles.

[2.4.A7]. U.p. číselného tělesa $(T, +, \cdot)$ tak, že platí: $\mathbf{Q} \subset T \subset \mathbf{R}$.

[2.4.A8]. U.p. konečného číselného tělesa.

[2.4.A9]. U.p. číselného tělesa, které má charakteristiku rovnu 2.

[2.4.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby $(T, +, \cdot)$ bylo číselné těleso.

♣ ♣ ♣

[2.4.B1]. Dokažte, že jedinými číselnými tělesy obsahujícími všechna reálná čísla jsou pouze tělesa $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{K}, +, \cdot)$.

[2.4.B2]. Dokažte, že pro $a, b, c \in \mathbf{Q}$ platí:
a) $a + b\sqrt{2} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$
b) $a + b\sqrt[3]{2} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$
c) $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$
d) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$.
(Návod: využijte toho, že $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ nejsou racionální čísla.)

[2.4.B3]. Ukažte, že ani jedno tvrzení z předchozího cvičení neplatí, jestliže místo $a, b, c \in \mathbf{Q}$ předpokládáme, že $a, b, c \in \mathbf{R}$.

[2.4.B4]. Rozhodněte, zda $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T=\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ b) $T=\{a+b\sqrt{7}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$

c) $T=\left\{\frac{a}{2^k}\mid a\in\mathbf{Z}\,,\ k\geq 0 \text{ celé}\right\}$ d) $T=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\mid a,b,c\in\mathbf{Q}\}$

e) $T=\{a+b\sqrt[3]{4}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ f) $T=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$

g) $T=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in\mathbf{Q}\}$

h) $T=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in\mathbf{Q}\}$.

[2.4.B5]. Rozhodněte, zda $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso, jestliže $+$, resp. značí obyčejné sčítání, resp. násobení čísel a je-li:

a) $T=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$ b) $T=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$

c) $T=\{a+bi\mid a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{Q}\}$ d) $T=\{b\cdot i\mid b\in\mathbf{Q}\}$

e) $T=\{z\in\mathbf{K}\mid\ |z|=1\}$ f) $T=\{a+b\sqrt{5}i\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.

[2.4.B6]. Nechť $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso; nechť $z\in\mathbf{K}$ je libovolné pevné komplexní číslo. Symbolem $T(z)$ označme množinu

$$\left\{\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}\mid \forall m,n\in\mathbf{N}; a_i,b_j\in T\wedge b_0+\cdots+b_nz^n\neq 0\right\}$$

Dokažte, že pak:

a) $(T(z),+,\cdot)$ je číselné těleso b) $T\subseteq T(z)\ \wedge\ z\in T(z)$

c) $(T(z),+,\cdot)$ je nejmenším číselným tělesem obsahujícím množinu T a dané číslo z (tzn. je-li $(S,+,\cdot)$ nějaké číselné těleso s vlastnostmi: $T\subseteq S\ \wedge\ z\in S$, pak je $T(z)\subseteq S$).

[2.4.B7]. Při použití označení z předchozího cvičení dokažte, že:

a) $\mathbf{R}(\sqrt{3})=\mathbf{R}$ b) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$

c) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{4})$ d) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\mathbf{Q}(\frac{1+\sqrt{2}}{3})=\mathbf{Q}(\frac{3}{\sqrt{2}})$

e) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in\mathbf{Q}\}$

f) $\mathbf{Q}(i\sqrt{5})=\{a+b\sqrt{5}i\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.

KAPITOLA 3:

VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: VEKTOROVÝ PROSTOR NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM

[3.1.A1]. U.p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje konečně mnoho vektorů.

[3.1.A2]. U.p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje právě 8 vektorů.

[3.1.A3]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(\sqrt{2})^2$.

[3.1.A4]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(i)^3$.

[3.1.A5]. Popište vektorový prostor $\mathbf{R}_4[x]$.

[3.1.A6]. Popište vektorový prostor $\mathbf{K}^5$.

[3.1.A7]. Nechť $(T,+,\cdot)$ je libovolné číselné těleso. Popište, jak lze T chápat jako vektorový prostor nad T.

[3.1.A8]. U.p. vektorového prostoru V nad T a dvou různých vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ takových, že $3\cdot\mathbf{u}=3\cdot\mathbf{v}$.

[3.1.A9]. U.p. dostatečné, ale nikoliv nutné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nulový vektor.

[3.1.A10]. U.p. nutné a dostatečné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nenulový vektor.

♣ ♣ ♣

[3.1.B1]. Je dáno číselné těleso T a množina čísel V. Sčítání vektorů definujeme jako obyčejné sčítání čísel a násobení čísla s vektorem definujeme jako obyčejné násobení čísel.
Rozhodněte, zda V je pak vektorový prostor nad T, je-li:

a) $T=\mathbf{K}$; $V=\mathbf{K}$ b) $T=\mathbf{R}$; $V=\mathbf{K}$

c) $T=\mathbf{R}$; $V=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$

d) $T=\mathbf{Q}$; $V=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.

[3.1.B2]. Uvažme množinu $\mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ (t.zn. množinu všech zobrazení $\langle 0,1\rangle \to \mathbf{R}$). Pro $f,g \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme $f+g \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$, resp. $r \cdot f \in \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ takto:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, resp. $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$, pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$.

Dokažte, že pak $\mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B3]. Uvažme množinu $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (tj. množinu všech zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Pro $f,g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme $f+g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, resp. $r \cdot f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ , resp. } (r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x)) \text{ , pro } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dokažte, že pak $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B4]. Nechť $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ značí množinu všech spojitých reálných funkcí (tj. spojitých zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$). Pro $f,g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme $f+g$, resp. $r \cdot f$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ , resp. } (r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x)) \text{ , pro } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Potom:
a) zdůvodněte, že $f+g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $r \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$
b) dokažte, že $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B5]. Nechť $\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ značí množinu všech reálných funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$ a majících na tomto intervalu spojité derivace až do řádu n včetně (kde n je pevné přirozené číslo). Pro $f,g \in \mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme $f+g$, resp. $r \cdot f$ takto:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, resp. $(r \cdot f)(x) = r \cdot (f(x))$, pro $\forall x \in \langle 0,1\rangle$.

Potom:
a) zdůvodněte, že $f+g \in \mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$, $r \cdot f \in \mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$
b) dokažte, že $\mathcal{D}^n\langle 0,1\rangle$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B6]. Uvažme množinu T^A (tj. množinu všech zobrazení $A \to T$), kde A je libovolná neprázdná množina a T je libovolné číselné těleso. Pro $f,g \in T^A$ a pro $t \in T$ definujeme $f+g \in T^A$, resp. $t \cdot f \in T^A$ takto:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \text{ , resp. } (r \cdot f)(a) = r \cdot (f(a)) \text{ , pro } \forall a \in A.$$

Dokažte, že pak T^A je vektorový prostor nad T.

[3.1.B7]. Nechť $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ značí množinu všech posloupností reálných čísel. Pro $(x_1, x_2, \ldots)$, $(y_1, y_2, \ldots) \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ a pro $r \in \mathbf{R}$ definujeme:

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1 \,,\, x_2 + y_2 \,, \ldots)$$
$$r \cdot (x_1, x_2, \ldots) = (r \cdot x_1 \,,\, r \cdot x_2 \,, \ldots).$$

Dokažte, že pak $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

[3.1.B8]. Nechť V_1, V_2 jsou vektorové prostory nad číselným tělesem T. Pro libovolné $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2$ a $t \in T$ definujeme:

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \,,\, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$, resp. $t \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (t \cdot \mathbf{u}_1 \,,\, t \cdot \mathbf{u}_2)$.

Dokažte, že pak $V_1 \times V_2$ je vektorový prostor nad T.

[3.1.B9]. Je dáno číselné těleso T a množina V s operací $\oplus$. Dále je dán součin $\circ$ čísla z T s prvkem z V.
Rozhodněte, zda V je vektorový prostor nad tělesem T, jestliže:

a) $T = \mathbf{Q}$, $V = \mathbf{R}$
pro $u, v \in \mathbf{R}$ je: $u \oplus v = u + v$, pro $t \in \mathbf{Q}$, $u \in \mathbf{R}$ je: $t \circ u = u$

b) $T = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^+$ (tj. množina všech kladných reálných čísel)
pro $u, v \in \mathbf{R}^+$ je: $u \oplus v = u \cdot v$, pro $t \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^+$ je: $t \circ u = u^t$

c) $T = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}^+$ (tj. množina všech kladných reálných čísel)
pro $u, v \in \mathbf{R}^+$ je: $u \oplus v = u + v$, pro $t \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}^+$ je: $t \circ u = u^t$

d) $T = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{Z}$
pro $u, v \in \mathbf{Z}$ je: $u \oplus v = u + v$ pro $t \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{Z}$ je: $t \circ u = [t \cdot u]$
kde $[t \cdot u]$ značí celou část z reálného čísla $t \cdot u$, tj. největší celé číslo, nepřevyšující číslo $t \cdot u$

e) $T = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$
pro $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je: $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 \,,\, x_2 + y_2)$
pro $t \in \mathbf{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je: $t \circ (x_1, x_2) = (t \cdot x_1 \,,\, 0)$

f) $T = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$
pro $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je: $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1 \,,\, x_2 \cdot y_2)$
pro $t \in \mathbf{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je: $t \circ (x_1, x_2) = (t \cdot x_1 \,,\, t \cdot x_2)$.

[3.1.B10]. Nechť V je vektorový prostor nad T; nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, resp. $r, s \in T$. Dokažte, že platí:
a) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ b) $(-r) \cdot (-\mathbf{u}) = r \cdot \mathbf{u}$
c) $r \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} \iff r = s \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}$
d) $r \cdot \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{v} \iff r = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

[3.1.B11]. Nechť V je vektorový prostor nad T. Dokažte, že pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{u} \in V$ a pro libovolná dvě různá čísla $t, s \in T$ jsou vektory $t \cdot \mathbf{u}$ a $s \cdot \mathbf{u}$ také různé.

[3.1.B12]. Dokažte, že v definici vektorového prostoru lze axiom (iv) (tj. axiom : $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ pro $\forall \mathbf{u} \in V$) nahradit axiomem

$(*)$ $t \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o} \implies t = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(Návod: při důkazu "$(*) \implies$ (iv)" nejprve užitím axiomů (i),(ii),(iii) vektorového prostoru ukažte, že pro $t \neq 0$ je $t \cdot (1 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}) = \mathbf{o}$.)

§2: PODPROSTORY VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.2.A1]. U.p. podmnožiny M vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$, která
a) je nekonečná a není podprostorem v $\mathbf{Q}^4$
b) je konečná a je podprostorem v $\mathbf{Q}^4$.

[3.2.A2]. U.p. netriviálního podprostoru ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$.

[3.2.A3]. U.p. podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ tak, že
a) $(1,4,2) \in W \wedge (1,1,1) \notin W$ b) W obsahuje právě 3 vektory.

[3.2.A4]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že:
a) W_1, W_2 jsou disjunktní b) $W_1 \cap W_2 \subset \{(1,4,2)\}$
c) $W_1 \cap W_2 = \{(1,4,2)\}$ d) $W_1 \cap W_2 \supset \{(1,4,2)\}$.

[3.2.A5]. U.p. podmnožiny M ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby platilo:
a) $M \subset [M]$ b) $M = [M]$ c) $M \supset [M]$
d) $[M] = \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1)\}$.

[3.2.A6]. U.p. nekonečné množiny $M \subset \mathbf{Q}^2$ tak, že $[M] = \mathbf{Q}^2$.

[3.2.A7]. U.p. dvou podmnožin M, L ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ takových, že $M \neq L$, ale $[M] = [L]$.

[3.2.A8]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R}^2$ tak, že jejich součet $W_1 + W_2$ není přímým součtem.

[3.2.A9]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R}^4$ tak, že:
a) $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$ b) $W_1 \cup W_2 \supset W_1 + W_2$
c) $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$ d) $W_1 \cup W_2 = W_1 \dot{+} W_2$.

[3.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby součet dvou podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru V byl přímým součtem.

♣ ♣ ♣

[3.2.B1]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, je-li:
a) $W = \{(x, y.z) \mid x = \sqrt{2}y + \sqrt{3}z\}$
b) $W = \{(0, \sin x, \cos x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
c) $W = \{(x, y, z) \mid x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\}$
d) $W = \{(r, -2r, \sqrt{2}r) \mid r \in \mathbf{R} \text{ libovolné}\}$.

[3.2.B2]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{K}^3$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{K}^3$, je-li:
a) $W = \{(0, (1+i)\cdot r, 0) \mid \text{pro } \forall r \in \mathbf{R}\}$
b) $W = \{(z, i\cdot z, (2-i)\cdot z) \mid \text{pro } \forall z \in \mathbf{K}\}$
c) $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid |z_1| = |z_2| = |z_3|\}$
d) $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid (1+i)z_1 + (2-i)z_2 - 3z_3 = 0\}$.

[3.2.B3]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$, je-li:
a) $W = \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1)\}$
b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$
c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$
d) $W = \{(2s+t, s-t, t, s) \mid t, s \in \mathbf{Q} \text{ libovolné}\}$.

[3.2.B4]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^n$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$, je-li
a) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$
b) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$
c) $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{Z}\}$
d) $W = \{(r, 2\cdot r, \dots, n\cdot r) \mid \text{pro } \forall r \in \mathbf{R}\}$.

[3.2.B5]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^{\langle 0,1\rangle}$ (viz cvičení [3.1.B2]), je-li:
a) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$
b) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(0)\cdot f(1) = 0\}$
c) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(x) \geq 1 \text{ pro konečně mnoho } x \in \langle 0,1\rangle\}$
d) $W = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbf{R} \mid f(x) = f(1-x) \text{ pro } \forall x \in \langle 0,1\rangle\}$.

[3.2.B6]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]), je-li:
a) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ pouze pro konečně mnoho } x \in \mathbf{R}\}$
b) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = 0 \text{ pouze pro konečně mnoho } x \in \mathbf{R}\}$
c) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ je nespojitá funkce}\}$
d) $W = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ je shora ohraničená funkce}\}$.

[3.2.B7]. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbf{R}[x]$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}[x]$, je-li:

a) $W = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R} \ \wedge \ a \neq 0\}$

b) $W = \{ax^5 + bx^2 + cx \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$

c) $W = \{f \in \mathbf{R}[x] \mid \exists g \in \mathbf{R}[x] \text{ tak, že } f = (x^2+1) \cdot g\}$

d) $W = \{f \in \mathbf{R}[x] \mid f(-x) = -f(x)\ , \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}$.

[3.2.B8]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V. Rozhodněte, zda následující množiny jsou také podprostory ve V:

a) $(W_1 + W_2) \cap W_3$ b) $(W_1 + W_2) - W_3$

c) $(W_1 - W_2) \cap W_3$ d) $W_1 \times W_2 \times W_3$.

[3.2.B9]. Dokažte, že vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ nemůže být generován konečně mnoha vektory (tj. polynomy).

(Návod: důkaz veďte sporem, s využitím vlastností stupně polynomu.)

[3.2.B10]. Nechť W_α, kde $\alpha \in I \neq \emptyset$, jsou podprostory ve vektorovém prostoru V (nad T). Označme:

$$H = \bigcap W_\alpha \ (\alpha \in I)\ .$$

Dokažte, že pak H je největší (vzhledem k $\subseteq$) podprostor ve V, který je obsažen v každém podprostoru W_α.

[3.2.B11]. Nechť M, L jsou podmnožiny ve vektorovém prostoru V. Dokažte, že platí:

a) $[\,\emptyset\,] = \{o\}$ b) $[\,[M]\,] = [M]$

c) $M \subseteq L \implies [M] \subseteq [L]$ d) $M \subseteq L \subseteq [M] \implies [M] = [L]$.

[3.2.B12]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V. Dokažte, že pak platí:

a) $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2 \iff W_1 \subseteq W_2$ nebo $W_2 \subseteq W_1$

b) $W_1 \cup W_2 = V \iff W_1 = V$ nebo $W_2 = V$.

[3.2.B13]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$W_1 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

[3.2.B14]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak dokažte, že:

a) $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$
b) v inkluzi a) obecně neplatí rovnost
c) jsou-li W_1, W_2 v inkluzi, pak v a) platí rovnost
d) jestliže v a) platí rovnost, pak W_1, W_2 nemusí být v inkluzi.

[3.2.B15]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory vektorového prostoru V. Pak dokažte, že

a) $W_1 \cap (W_2 + W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$
b) v inkluzi a) obecně neplatí rovnost
c) jsou-li W_1, W_2 v inkluzi, pak v a) platí rovnost
d) jestliže v a) platí rovnost, pak W_1, W_2 nemusí být v inkluzi.

[3.2.B16]. Ve vektorovém prostoru V jsou dány podprostory W_1, W_2. Rozhodněte, zda součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$
$W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 2y + 3z\}$, $W_2 = \{(r, -2r, -3r) \mid \text{ pro } \forall r \in \mathbf{R}\}$

b) $V = \mathbf{R}^3$
$W_1 = \{(x, y, z) \mid x - 2y - 3z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \mid x = z\}$

c) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$
$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
$W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$

d) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$
$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 2x_n\}$,
$W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 3x_1 + 6x_2 = 0\}$

e) $V = \mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2])
$W_1 = \{f : (0,1) \to \mathbf{R} \mid f(1) = 0\}$,
$W_2 = \{f : (0,1) \to \mathbf{R} \mid f(x) = f(1-x) \text{ pro } \forall x \in (0,1)\}$

f) $V = \mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2])
$W_1 = \{f \in \mathbf{R}^{(0,1)} \mid f(1) = 0\}$,
$W_2 = \{f \in \mathbf{R}^{(0,1)} \mid f \text{ je konstantní funkce}\}$.

[3.2.B17]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$ jsou dány podprostory:

$$W_1 = \{(x-1) \cdot g(x) \mid \text{ pro } \forall\, g(x) \in \mathbf{R}[x]\}$$
$$W_2 = \{(x-2) \cdot h(x) \mid \text{ pro } \forall\, h(x) \in \mathbf{R}[x]\}.$$

Dokažte, že pak $\mathbf{R}[x] = W_1 + W_2$, přičemž součet není přímým součtem.

(Návod: ukažte nejprve, že $1 \in W_1 + W_2$, resp. $x^k \in W_1 + W_2$ pro každé přirozené číslo k.)

[3.2.B18]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[x]$ jsou dány podprostory:

$$W_1 = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(x) = f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}$$
$$W_2 = \{f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(x) = -f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}.$$

Dokažte, že prostor $\mathbf{R}[x]$ je přímým součtem podprostorů W_1, W_2.

[3.2.B19]. Nechť W, W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V a dále nechť $V = W_1 \dot{+} W_2$. Potom:

a) jestliže $(W \supseteq W_1 \ \vee \ W \supseteq W_2)$, pak $W = (W \cap W_1) \dot{+} (W \cap W_2)$

b) ukažte na příkladu, že předpoklad $(W \supseteq W_1 \ \vee \ W \supseteq W_2)$ nelze v a) vypustit.

(Návod: příklad pro b) hledejte např. v prostoru $V = \mathbf{R}^2$.)

[3.2.B20]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Potom dokažte, že:

a) součet $W_1 + \cdots + W_k$ je přímý $\Longrightarrow$ $W_i \cap W_j = \{\mathbf{o}\}$ pro $\forall\, i \neq j$

b) je-li $k = 2$, pak platí i opačná implikace

c) je-li $k \geq 3$, pak opačná implikace někdy platí a někdy neplatí.

(Návod: část c) ukažte na příkladech, např. v prostoru $V = \mathbf{R}^3$.)

[3.2.B21]. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou podprostory nenulového vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda následující výrok je či není nutnou podmínkou, resp. zda je či není dostatečnou podmínkou pro to, aby součet $W_1 + W_2 + W_3$ byl přímým součtem:

a) $W_1 + W_2 + W_3 = \{\mathbf{o}\}$ b) $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{o}\}$.

c) $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = V$

d) $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{\mathbf{o}\}$

[3.2.B22]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) součet podprostorů $W_1 + \cdots + W_k$ je přímým součtem

(ii) $\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{u}_1 = \cdots = \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$

(iii) existuje vektor $\mathbf{u} \in W_1 + \cdots + W_k$, který lze vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$.

[3.2.B23]. Nechť $W_1, \ldots, W_k$ $(k \geq 2)$ jsou podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že jestliže součet podprostorů $W_1 + \cdots + W_k$ není přímým součtem, pak žádný vektor $\mathbf{u} \in W_1 + \cdots + W_k$ nelze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k$, kde $\mathbf{u}_i \in W_i$.

§3: LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

[3.3.A1]. U.p. tří různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$, které

a) generují prostor $\mathbf{R}^2$ b) negenerují prostor $\mathbf{R}^2$.

[3.3.A2]. U.p. různých vektorů (tj. polynomů) $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R}_2[x]$, které

a) generují prostor $\mathbf{R}_2[x]$ b) negenerují prostor $\mathbf{R}_2[x]$.

[3.3.A3]. U.p. různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$ tak, že vektor $\mathbf{u}$ generuje tentýž podprostor v $\mathbf{R}^4$, jako vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

[3.3.A4]. U.p. vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ tak, aby vektor $\mathbf{u}$ generoval jiný podprostor v $\mathbf{R}^3$, než vektor $\sqrt{2} \cdot \mathbf{u}$.

[3.3.A5]. U.p. nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Q}^3$ tak, aby

a) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ b) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$.

[3.3.A6]. U.p. vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^4$, které jsou lineárně závislé a přitom vektor $\mathbf{u}_1$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

[3.3.A7]. U.p. tří vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{Q}^4$ takových, že

a) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé

b) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.

[3.3.A8]. U.p. nekonečně mnoha vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \ldots$ z vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby každé dva z nich byly lineárně nezávislé.

[3.3.A9]. U.p. vektorů z $\mathbf{R}^3$, které

a) jsou lineárně nezávislé a negenerují prostor $\mathbf{R}^3$

b) jsou lineárně nezávislé a generují prostor $\mathbf{R}^3$

c) jsou lineárně závislé a negenerují prostor $\mathbf{R}^3$

d) jsou lineárně závislé a generují prostor $\mathbf{R}^3$.

[3.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z vektorového prostoru V byly lineárně nezávislé.

♣ ♣ ♣

[3.3.B1]. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ generují tentýž podprostor ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_1 = (2,-1,3,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,-1)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,-1,2,-3)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,2,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,2,0,3)$.

[3.3.B2]. Rozhodněte, zda dané vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$ generují vektorový prostor $\mathbf{Q}^4$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,2,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1,1)$,
$\mathbf{u}_4 = (-2,0,-1,-3)$, $\mathbf{u}_5 = (-1,1,0,-2)$

b) $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,0,1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,3,4)$,
$\mathbf{u}_4 = (2,3,4,6)$, $\mathbf{u}_5 = (1,-3,5,-7)$.

[3.3.B3]. Rozhodněte, zda dané vektory (polynomy) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ generují vektorový prostor $\mathbf{R}_2[x]$, je-li:

a) $\mathbf{f}_1 = x+1$, $\mathbf{f}_2 = x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_3 = x^2-2x-3$

b) $\mathbf{f}_1 = x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_2 = x^2-2x-3$, $\mathbf{f}_3 = 2x+3$.

[3.3.B4]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ jsou vektory z vektorového prostoru V (nad T) takové, že platí:

$$2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \quad \wedge \quad 5\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_4 = \mathbf{o}$$

Dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ generují tentýž podprostor ve V, jako vektory $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.

[3.3.B5]. Nalezněte všechna $r \in \mathbf{R}$, pro která vektor $\mathbf{w} = (r,1,2)$ leží v podprostoru $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-1,3)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,2)$

c) $\mathbf{u}_1 = (1,2,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-1,1)$

d) $\mathbf{u}_1 = (1,1,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,r)$, $\mathbf{u}_3 = (-r,-4,r^2)$.

[3.3.B6]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]) jsou dány vektory (tj. zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$):

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos x, \quad g_1(x) = \sin^2 \tfrac{x}{2}, \quad g_2(x) = \cos^2 \tfrac{x}{2}.$$

Potom:

a) popište množinu $[f_1, f_2]$ b) dokažte, že $[f_1, f_2] = [g_1, g_2]$.

[3.3.B7]. Nechť V je vektorový prostor (nad T), nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Dokažte, že platí:

a) $[\mathbf{u}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}-\mathbf{u}]$ b) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w}]$.

[3.3.B8]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ jsou vektory splňující: $\mathbf{w} \notin [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \ \wedge \ \mathbf{w} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}]$. Dokažte, že pak je $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}]$.

[3.3.B9]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ jsou vektory splňující: $t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v} + t_3\mathbf{w} = \mathbf{o}$, přičemž $t_1 \cdot t_3 \neq 0$. Potom:

a) dokažte, že $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

b) ukažte, že bez předpokladu $t_1 \cdot t_3 \neq 0$ předchozí rovnost neplatí.

[3.3.B10]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V (nad T) takové, že W_1 je generován vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, resp. W_2 je generován vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$. Dokažte, že pak součet podprostorů $W_1 + W_2$ je generován vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$.

[3.3.B11]. Rozhodněte, zda dané vektory z vektorového prostoru V jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé, je-li:

a) $V = \mathbf{Q}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,2,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-3,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,2)$

b) $V = \mathbf{Q}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,2)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,-8)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (0,-1,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,-1,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,1,1)$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-4,1,1,-3)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-3,1,-1)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,1)$

e) $V = \mathbf{K}^3$; $\mathbf{u}_1 = (10, 8-14i, 2+4i)$, $\mathbf{u}_2 = (2+i, 3-2i, i)$

f) $V = \mathbf{K}^3$; $\mathbf{u}_1 = (2, 2+2i, 2i)$, $\mathbf{u}_2 = (1-i, 1+3i, -1+i)$, $\mathbf{u}_3 = (1+i, 1-i, 1+i)$

g) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = 2x^2+x-4$, $\mathbf{f}_2 = x^2-3$, $\mathbf{f}_3 = (x+1)^2$

h) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = x^2+x+1$, $\mathbf{f}_2 = x \cdot (x^2+x+1)$, $\mathbf{f}_3 = (x+1)^2$.

[3.3.B12]. Uvažme množinu komplexních čísel $\mathbf{K}$ jako vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b)).
Dokažte, že v tomto vektorovém prostoru jsou každá tři komplexní čísla lineárně závislá.

[3.3.B13]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2]) uvažme dva různé vektory (tj. zobrazení $(0,1) \to \mathbf{R}$) $f \neq g$.
Potom:

a) dokažte, že když existuje $x_0 \in (0,1)$ tak, že
$$f(x_0) = g(x_0) \neq 0,$$
potom jsou f, g lineárně nezávislé

b) ukažte na příkladech, že když neexistuje žádné $x_0 \in (0,1)$ takové, že $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$, pak f, g mohou být jak lineárně závislé, tak i lineárně nezávislé.

[3.3.B14]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (viz cvičení [3.1.B3]) jsou dány vektory (tj. zobrazení $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) f, g, h.
Dokažte, že f, g, h jsou lineárně závislé. Přitom:

a) $f = 1$, $g = \cos x$, $h = \cos^2 \frac{x}{2}$

b) $f = \sqrt{2}$, $g = \sin^2 x$, $h = \cos^2 x$

c) $f = \sin x$, $g = \cos x$, $h = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

d) $f = e^x$, $g = \sin x + \cos x$, $h = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

(Návod: přímou úpravou, užitím známých vztahů pro goniometrické funkce, sestavujte rovnici $t_1 \cdot f + t_2 \cdot g + t_3 \cdot h = 0$.)

[3.3.B15]. Dokažte, že dané vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^3$ jsou lineárně závislé a nalezněte mezi nimi všechny vektory, které nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících.
Přitom:

a) $\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (1, \sqrt{2}, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (-\sqrt{2}, -2, 2)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -2)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (2, \sqrt{2}, 1)$.

[3.3.B16]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které jsou tyto vektory lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé.
Přitom:

a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, a, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 2, a)$
b) $\mathbf{u} = (0, 2, a)$, $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{w} = (2, -4, a)$
c) $\mathbf{u} = (a, 4, 11)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 4)$.

[3.3.B17]. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů jsou zadané vektory z $\mathbf{Q}^4$ lineárně závislé:

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2+a, 4, 6)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3-b, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 4, b-6, 7)$,
$\mathbf{u}_4 = (1, 2-a, 2-b, 1)$
b) $\mathbf{u}_1 = (a, b, c, d)$, $\mathbf{u}_2 = (b, -a, d, -c)$, $\mathbf{u}_3 = (c, -d, -a, b)$,
$\mathbf{u}_4 = (d, c, -b, -a)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, b, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (c, 1, 1, 1)$
d) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, a+1, a^4+3a^2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, a+1, 1, a^3+3a^2)$,
$\mathbf{u}_3 = (a+1, 1, 1, a^2+3a)$.

[3.3.B18]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda následující vektory z V jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé:

a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$, $(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
b) $(2\mathbf{u}+3\mathbf{v}+3\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+4\mathbf{v}-\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+5\mathbf{v}+4\mathbf{w})$
c) $(3\mathbf{u}+4\mathbf{v}+5\mathbf{w})$, $(4\mathbf{u}+3\mathbf{v}+5\mathbf{w})$, $(5\mathbf{u}+4\mathbf{v}+3\mathbf{w})$
d) $(\mathbf{u}-2\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+\mathbf{v}-2\mathbf{w})$, $(7\mathbf{u}+14\mathbf{v}-13\mathbf{w})$.

[3.3.B19]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda vektory:

$$\mathbf{u}_1 \,,\, (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2) \,,\, (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3) \,,\ldots,\, (\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2+\cdots+k\cdot\mathbf{u}_k)$$

jsou lineárně závislé, či lineárně nezávislé.

[3.3.B20]. Nechť V je vektorový prostor (nad T) a nechť $\mathbf{u} \in V$. Dokažte, že platí: vektor $\mathbf{u}$ je lineárně závislý $\iff \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

[3.3.B21]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$. Dokažte, že potom platí:

a) vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé $\wedge$ vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou lineárně závislé $\Longrightarrow \mathbf{d} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.
b) vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé $\wedge$ $\mathbf{c} \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{o}$ nebo $\exists\, t \in T : \mathbf{b} = t \cdot \mathbf{a}$.

[3.3.B22]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k \geq 2)$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V (nad T) taková, že $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že pak:
vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff$ existuje vektor $\mathbf{u}_i$ $(2 \leq i \leq k)$, který je lineární kombinací předcházejících vektorů (tj. vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$).

[3.3.B23]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k \geq 2)$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V (nad T) taková, že $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že pak:
vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff$ existuje vektor $\mathbf{u}_i$ $(1 \leq i \leq k-1)$, který je lineární kombinací následujících vektorů (tj. vektorů $\mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_k$).

[3.3.B24]. Nechť ve vektorovém prostoru V (nad T) jsou dány lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ a vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$. Dokažte, že potom nejvýše jeden vektor z posloupnosti vektorů $\mathbf{w}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je lineární kombinací předchozích vektorů.
(Návod: důkaz veďte sporem.)

[3.3.B25]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V (nad T) takové, že jejich součet je přímým součtem. Nechť dále $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in W_1$ jsou lineárně nezávislé vektory a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \in W_2$ jsou lineárně nezávislé vektory.
Dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé.

§4: BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.4.A1]. U.p. vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$, které
a) jsou generátory, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$
b) jsou lineárně nezávislé, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R}_2[x]$.

[3.4.A2]. U.p. vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{Q}^2$, které
a) jsou lineárně nezávislé b) negenerují vektorový prostor $\mathbf{Q}^2$.

[3.4.A3]. Uveďte, co všechno můžete říci o čísle n, víte-li, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$
a) generují vektorový prostor $\mathbf{Q}^n$
b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_n[x]$.

[3.4.A4]. Uveďte, co všechno můžete říci o čísle s, víte-li, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$

a) generují vektorový prostor $\mathbf{R}_5[x]$

b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}^5$.

[3.4.A5]. U.p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ takových, že průnik $W_1 \cap W_2$

a) nemá bázi

b) má bázi $\mathbf{u} = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (3,2,1)$.

[3.4.A6]. U.p. jednodimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_4[x]$.

[3.4.A7]. U.p. dvoudimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že:

a) W obsahuje vektor $(\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}, 7)$

b) W obsahuje vektory $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$.

[3.4.A8]. U.p. podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^3$ takových, že

a) $\dim W_1 = \dim W_2 \ \wedge \ W_1 \neq W_2$

b) $\dim W_1 = \dim W_2 \ \wedge \ W_1 \subset W_2$.

[3.4.A9]. U.p. dvou třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^5$ takových, že jejich součet je přímým součtem.

[3.4.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná

b) je dostatečná, ale není nutná

c) je nutná i dostatečná

d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ byly bází vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$.

♣ ♣ ♣

[3.4.B1]. Rozhodněte, zda zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V, je-li

a) $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{u}_1 = (2,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-3,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (5,4,3)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u}_1 = (1,5,5,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,3,-1)$,
$\mathbf{u}_3 = (1,-1,1,2)$, $\mathbf{u}_4 = (1,8,7,-7)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$; $\mathbf{f}_1 = 2x^2 + 3x - 5$, $\mathbf{f}_2 = x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_3 = 3x^2 + 2x - 2$

d) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = x^2 + x$, $\mathbf{f}_2 = x^3 + 2x^2$, $\mathbf{f}_3 = x^3 + x^2 - x - 1$,
$\mathbf{f}_4 = x^3 - 1$.

[3.4.B2]. Nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoří bázi vektorového prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda následující vektory také tvoří bázi tohoto vektorového prostoru V:

a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{v}-\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$

b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, $(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$

c) $(2\mathbf{u}+\mathbf{v}+3\mathbf{w})$, $(\mathbf{v}+2\mathbf{w})$, $(\mathbf{u}-\mathbf{v}+7\mathbf{w})$

d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}+2\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+2\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $(3\mathbf{u}+\mathbf{v}-4\mathbf{w})$.

[3.4.B3]. Určete všechny hodnoty parametrů, pro něž zadané vektory tvoří bázi vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u}_1 = (2,3,a)$, $\mathbf{u}_2 = (3,4,2a)$, $\mathbf{u}_3 = (5,8,1+2a)$

b) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u}_1 = (1,a,b)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,c)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,1)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$; $\mathbf{f}_1 = ax^2 - 4x - 1$, $\mathbf{f}_2 = 4x^2 - 6x - 3$, $\mathbf{f}_3 = x^2 + x - a$

d) $V = \mathbf{R}_3[x]$; $\mathbf{f}_1 = 3x^3 - 2ax^2 + 1$, $\mathbf{f}_2 = x^3 - 1$, $\mathbf{f}_3 = x^2 + x + 1$.

[3.4.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$

a) nalezněte bázi, která obsahuje vektor $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,4)$

b) nalezněte dvě báze, které mají společné právě vektory
$\mathbf{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1,1)$.

[3.4.B5]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ nechť je zadán podprostor $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a vektor $\mathbf{v} \in W$.
Nalezněte bázi podprostoru W, která obsahuje vektor $\mathbf{v}$, je-li:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,0,-2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-1,-2,0)$;
$\mathbf{v} = (2,1,1,2)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,1,4,3)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,4,6,5)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,2,2)$;
$\mathbf{v} = (3,-2,2,1)$.

[3.4.B6]. Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru V, je-li

a) $V = \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{K}$ (viz cvičení [3.1.B1] a))

b) $V = \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b))

c) $V = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ nad tělesem $\mathbf{Q}$ (viz cvičení [3.1.B1] d))

d) $V = \mathbf{R}^A$, kde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (viz cvičení [3.1.B6])

e) $V = \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, nad tělesem $\mathbf{R}$, přičemž sčítání vektorů a násobení reálného čísla s vektorem je definováno "po složkách".

[3.4.B7]. Dokažte, že vektorový prostor V nemá bázi. Přitom :

a) $V = \mathbf{R}[x]$

b) $V = \mathbf{R}^{(0,1)}$ (viz cvičení [3.1.B2])

c) $V = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ (viz cvičení [3.1.B4])

d) $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$ (viz cvičení [3.1.B7]).

(Návod: ukažte, že pro každé přirozené n lze ve V vždy sestrojit n lineárně nezávislých vektorů.)

[3.4.B8]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 2)$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Dokažte, že potom:

a) vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n$ jsou bází prostoru V

b) vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n + t_1\mathbf{u}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$ jsou pro libovolná $t_1, \dots, t_{n-1} \in T$ také bází prostoru V.

Definice. Řekneme, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ je *minimální systém generátorů prostoru* V, jestliže :

(i) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = V$

(ii) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n] \subset V$ pro každé $i = 1, \dots, n$

tzn. jinými slovy řečeno: vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ generují prostor V, ale vynecháme-li libovolný z nich, pak zbývající vektory již prostor V negenerují.

[3.4.B9]. Dokažte, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je bází vektorového prostoru V právě když je minimálním systémem generátorů prostoru V.

[3.4.B10]. Ve vektorovém prostoru V je dán podprostor W. Nalezněte bázi a dimenzi tohoto podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^5$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 = 0 \wedge x_4 + x_5 = 0\}$

b) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_n\}$

c) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$

d) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$

e) $V = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$; $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 0 \text{ pro sudé } i\}$

f) $V = \mathbf{R}_5[x]$, $W = \{f(x) \mid f(x) = f(-x) \text{ pro } \forall x \in \mathbf{R}\}$.

[3.4.B11]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ je dán podprostor

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}.$$

Pak:

a) ukažte, že vektory $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0,1)$ jsou lineárně nezávislé a leží ve W

b) určete dimenzi podprostoru W

c) doplňte vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ na bázi podprostoru W.

[3.4.B12]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q}^4$ nechť je zadán podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$. Z generátorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ podprostoru W vyberte všechny možné báze W. Přitom:

a) $\mathbf{u}_1 = (1,2,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,0,0)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{u}_4 = (3,6,0,0)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,4,5)$, $\mathbf{u}_3 = (3,4,5,6)$, $\mathbf{u}_4 = (4,5,6,7)$

c) $\mathbf{u}_1 = (2,1,-3,1)$, $\mathbf{u}_2 = (4,2,-6,2)$, $\mathbf{u}_3 = (6,3,-9,3)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,1)$

d) $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,-1,1)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,1,-1)$

[3.4.B13]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ nechť je zadán podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5]$. Z generátorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ podprostoru W vyberte nějakou bázi W a potom každý z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ vyjádřete pomocí této báze. Přitom:

a) $\mathbf{u}_1 = (2,-1,3,5)$, $\mathbf{u}_2 = (4,-3,1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (3,-2,3,4)$, $\mathbf{u}_4 = (4,-1,15,17)$, $\mathbf{u}_5 = (7,-6,-7,0)$

b) $\mathbf{u}_1 = (1,2,3,-4)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3,-4,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,-5,8,-3)$, $\mathbf{u}_4 = (5,26,-9,-12)$, $\mathbf{u}_5 = (3,-4,1,2)$.

[3.4.B14]. V závislosti na parametrech určete dimenzi podprostoru W ve vektorovém prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,a,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,2,a)$

b) $V = \mathbf{R}^3$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, kde $\mathbf{u}_1 = (5,7,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2a,1,-2)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,1,a,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,b,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (c,1,1,1)$.

[3.4.B15]. Nechť V je vektorový prostor nad T takový, že $\dim V = n$. Dokažte, že pro každé $k = 0, 1, \dots, n$ existuje ve V podprostor, jehož dimenze je rovna k.

[3.4.B16]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V (nad T). Dokažte, že platí:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1 \implies W_1 \subset W_2 \text{ nebo } W_2 \subset W_1.$$

(Návod: důkaz veďte sporem.)

[3.4.B17]. Určete bázi a dimenzi průniku podprostorů $W_1 \cap W_2$ ve vektorovém prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,1,-3)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,2)$, $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,3,3)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,2,0,2)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1,2)$, $\mathbf{u}_3 = (3,1,3,1)$, $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,3,1,3)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2,0,1)$

d) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1,3,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,2,-1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (1,4,-4,7,-1)$, $\mathbf{v}_1 = (0,2,-3,4,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,2,1,2,4)$, $\mathbf{v}_3 = (2,6,-5,12,3)$.

[3.4.B18]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V, přičemž : $\dim V = 2$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$.

Dokažte, že pak je buď $W_1 = W_2$ nebo $V = W_1 \dot{+} W_2$.

[3.4.B19]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory vektorového prostoru V takového, že $\dim V = 3$.
Dokažte, že pak platí:

a) $\dim W_1 = \dim W_2 = 2 \implies$

$\implies W_1 = W_2$ nebo $(W_1 + W_2 = V \wedge \dim (W_1 \cap W_2) = 1)$

b) $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2 \implies W_1 \subset W_2$ nebo $V = W_1 \dot{+} W_2$

c) $\dim W_1 = \dim W_2 = 1 \implies$

$\implies W_1 = W_2$ nebo $(W_1 \cap W_2 = \{o\} \wedge \dim (W_1 + W_2) = 2)$.

[3.4.B20]. Nechť W_1, W_2 jsou podprostory ve vektorovém prostoru V takové, že prostor V je jejich přímým součtem (tj. $V = W_1 \dot{+} W_2$). Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ je báze W_1 , resp. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ je báze W_2.

Dokažte, že pak $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s$ je báze prostoru V.

[3.4.B21]. Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor $(n \geq 1)$ a nechť W_1 je libovolný podprostor ve V .
Dokažte, že ve vektorovém prostoru V existuje podprostor W_2 takový, že platí: $V = W_1 \dot{+} W_2$.

[3.4.B22]. Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor $(n \geq 1)$ a nechť U, W_1, W_2 jsou podprostory ve V takové, že platí:

$$W_1 \subseteq W_2 \quad \wedge \quad U \cap W_1 = U \cap W_2 \quad \wedge \quad U + W_1 = U + W_2 .$$

Dokažte, že potom je $W_1 = W_2$.

(Návod: stačí dokázat (proč ?), že $\dim W_1 = \dim W_2$.)

[3.4.B23]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1) , \quad \mathbf{u}_2 = (0,1,1,1) , \quad \mathbf{u}_3 = (0,0,1,1) , \quad \mathbf{u}_4 = (0,0,0,1) .$$

Vyjádřete pak souřadnice vektoru $\mathbf{w} = (2,1,1,4)$

a) v bázi $\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_4$

b) v bázi $\mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_4 , \mathbf{u}_1$.

[3.4.B24]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_5[x]$ nalezněte souřadnice vektoru (tj. polynomu) $f = 2x^5 - x^3 - 5x^2 + 4$ v bázi :

a) $x^5 + x^4 , \quad x^4 + 2x^3 , \quad 2x^3 + 3x^2 , \quad 3x^2 + 4x , \quad 4x + 5 , \quad x + 1$

b) $x^5 + 2x^2 , \quad x^4 + 4 , \quad x^3 + x , \quad 3x^5 + x , \quad x^4 + 3x^2 , \quad x^2 + 1$

c) $1 , (x-1) , (x-1)^2 , (x-1)^3 , (x-1)^4 , (x-1)^5$.

(Návod: při c) využijte Taylorovu větu, kterou znáte z analýzy.)

[3.4.B25]. Nalezněte bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, v níž vektor $\mathbf{u} = (1,0,0)$ má souřadnice $(1,1,1)$ a vektor $\mathbf{v} = (1,1,1)$ má souřadnice $(1,0,0)$.
Uveďte, kolik takových bází existuje.

KAPITOLA 4:

MATICE A DETERMINANTY

§1: POŘADÍ A PERMUTACE

[4.1.B1]. Určete počet inverzí v daném pořadí z 9-ti prvků:

a) $(2,1,7,9,8,6,5,3,4)$ b) $(9,8,7,6,5,4,3,2,1)$.

[4.1.B2]. Určete počet inverzí v daném pořadí z $2n$ prvků:

a) $(1,3,\dots,2n-1,2,4,\dots,2n)$ b) $(2,4,\dots,2n,1,3,\dots,2n-1)$

c) $(2n,2n-1,2n-2,\dots,2,1)$ d) $(2n-1,2n,\dots,3,4,1,2)$.

[4.1.B3]. Určete počet inverzí v daném pořadí z $3n$ prvků:

a) $(3,6,\dots,3n,1,4,\dots,3n-2,2,5,\dots,3n-1)$

b) $(1,4,\dots,3n-2,2,5,\dots,3n-1,3,6,\dots,3n)$

c) $(2,5,\dots,3n-1,3,6,\dots,3n,1,4,\dots,3n-2)$.

[4.1.B4]. Nechť v pořadí $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ je celkem I inverzí. Určete počet inverzí v pořadí $(r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1)$.

[4.1.B5]. Prvky $1,2,\dots,n$ rozdělme na dvě části takto:

$$r_1 < \dots < r_k \quad , \quad \text{resp.} \quad s_1 < \dots < s_{n-k} \quad , \quad \text{kde } 1 \le k \le n-1.$$

Určete počet inverzí v pořadí $(r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_{n-k})$.

[4.1.B6]. Nechť $(r_1,r_2,\dots,r_n)$ je pořadí z n prvků, v němž je I inverzí. Utvoříme-li z prvků $r_1,r_2,\dots,r_n$ pořadí $(1,2,\dots,n)$, pak indexy těchto prvků utvoří jisté pořadí, v němž je rovněž I inverzí. Dokažte.

[4.1.B7]. Určete x,y tak, aby pořadí

a) $(1,2,7,4,x,5,6,y,9)$ bylo sudé b) $(5,1,y,8,9,4,x,6,3)$ bylo liché.

[4.1.B8]. Rozhodněte, kdy daná dvě pořadí z n prvků $(n \ge 3)$:

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n) \quad \text{a} \quad (r_2, r_3, \dots, r_n, r_1)$$

mají stejnou paritu, resp. různou paritu.

[4.1.B9]. Seřaďte všechna pořadí ze 4 prvků tak, že každé pořadí obdržíte z předcházejícího pořadí provedením jedné transpozice. Přitom:

a) pořadí $(4,2,1,3)$ bude napsáno jako první

b) pořadí $(1,3,4,2)$ bude napsáno jako poslední

c) pořadí $(4,2,1,3)$ bude napsáno jako první a pořadí $(1,3,4,2)$ bude napsáno jako poslední.

[4.1.B10]. Vypište všechny formálně různé zápisy dané permutace:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

[4.1.B11]. Zjistěte paritu permutace P, je-li:

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & \dots & 3n & 1 & 4 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 \\ 1 & 4 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & \dots & 3n \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & \dots & 3n & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$.

[4.1.B12]. Nalezněte permutace $R \circ P$ a $P \circ R$, je-li dáno:

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

[4.1.B13]. Nechť jsou dány permutace:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pak nalezněte permutaci:

a) $P \circ R^2$ b) $P \circ R \circ P^{-1}$ c) $P^{-2} \circ R$.

[4.1.B14]. Nechť jsou dány permutace:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pak nalezněte všechny permutace X, splňující vztah:

a) $R \circ X \circ S = T$ b) $S \circ X \circ R = T$.

[4.1.B15]. Pro zadanou permutaci P nalezněte všechny permutace X takové, že platí: $P \circ X = X \circ P$. Přitom:

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[4.1.B16]. Nechť $S_3 = \{e, r, s, t, u, v\}$ značí množinu všech permutací 3-prvkové množiny, přičemž

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom:
a) napište tabulku operace grupy $(S_3, \circ)$
b) nalezněte všechny podgrupy v grupě $(S_3, \circ)$
c) značí-li $\mathcal{P}$ množinu všech podgrup grupy $(S_3, \circ)$, pak nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

(Návod: při b) využijte faktu, že v $(S_3, \circ)$ neexistuje žádná 4-prvková, ani 5-prvková podgrupa.)

[4.1.B17]. Nechť $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{T}$ značí množinu všech sudých, resp. všech lichých permutací 3-prvkové množiny; nechť $\circ$ značí skládání permutací. Rozhodněte, zda $(\mathcal{S}, \circ)$, resp. $(\mathcal{T}, \circ)$ jsou grupy.

[4.1.B18]. Nechť G je množina všech sudých permutací na 4-prvkové množině, přičemž prvky množiny G označíme takto:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$o = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť $\circ$ značí skládání permutací. Potom:
a) napište tabulku operace $\circ$ a dokažte, že $(G, \circ)$ je nekomutativní grupa

b) víte-li, že v $(G, \circ)$ kromě triviálních podgrup existují ještě právě 3 dvouprvkové, 4 tříprvkové a jedna čtyřprvková podgrupa, pak nalezněte všechny tyto podgrupy
c) nechť $\mathcal{P}$ značí množinu všech podgrup grupy $(G, \circ)$. Nakreslete hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

§2: DETERMINANTY

[4.2.A1]. U.p. čtvercové matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že $\det A$ má právě 16 členů.

[4.2.A2]. U.p. čtvercové matice A řádu 5 (nad $\mathbf{Q}$), jejíž všechny prvky jsou nenulové, ale $\det A = 0$.

[4.2.A3]. U.p. matice A řádu n (nad $\mathbf{K}$) tak, aby $\det A = c$, kde c je libovolné, pevné komplexní číslo.

[4.2.A4]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) tak, aby $|A'| = -|A|$.

[4.2.A5]. Nechť A je matice řádu 5 (nad $\mathbf{R}$) taková, že $|A| = \sqrt{2}$. Nechť matice B vznikne z matice A tak, že každý její prvek vynásobíme číslem $-\sqrt{3}$. Uveďte, čemu se rovná $|B|$.

[4.2.A6]. Nechť A je matice řádu 6 (nad $\mathbf{R}$) a nechť jsou pevně zvoleny 3 její sloupce. Uveďte, kolik submatic řádu 3 lze ze zvolených sloupců vybrat.

[4.2.A7]. Nechť A je matice řádu n (nad T) a nechť $0 < k < n$ je celé číslo. Uveďte, kolik submatic řádu k lze v matici A sestrojit.

[4.2.A8]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| \neq 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nulové.

[4.2.A9]. U.p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| = 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nenulové.

[4.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby determinant čtvercové matice A byl nenulový.

♣ ♣ ♣

[4.2.B1]. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:

a) $n = 6$; $a_{31} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{52} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$
b) $n = 6$; $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{41} \cdot a_{56} \cdot a_{65} \cdot a_{22}$
c) $n = 8$; $a_{72} \cdot a_{17} \cdot a_{43} \cdot a_{21} \cdot a_{64} \cdot a_{35} \cdot a_{56}$
d) $n = 8$; $a_{72} \cdot a_{61} \cdot a_{58} \cdot a_{47} \cdot a_{84} \cdot a_{16} \cdot a_{35} \cdot a_{23}$.

[4.2.B2]. Určete (v závislosti na i, j, resp. k) znaménko daného členu determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n je-li :

a) $n = 5$; $a_{31} \cdot a_{1i} \cdot a_{54} \cdot a_{43} \cdot a_{2j}$

b) $n = 5$; $a_{i1} \cdot a_{j5} \cdot a_{2i} \cdot a_{1j} \cdot a_{5k}$

c) $n = 6$; $a_{23} \cdot a_{1i} \cdot a_{42} \cdot a_{65} \cdot a_{3j} \cdot a_{5k}$

d) $n = 6$; $a_{35} \cdot a_{66} \cdot a_{2i} \cdot a_{5j} \cdot a_{1k} \cdot a_{i1}$.

[4.2.B3]. Uveďte všechny členy determinantu dané matice $A = (a_{ij})$ řádu 4, které:

a) obsahují prvky a_{12} , a_{34}

b) obsahují prvek a_{23} a mají znaménko minus.

[4.2.B4]. Určete znaménko, s nímž se v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n vyskytuje součin prvků

a) hlavní diagonály b) vedlejší diagonály.

[4.2.B5]. Užitím pouze definice determinantu spočtěte:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B6]. Bez užití definice determinantu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a_1+b_1 & a_1+c_1 & b_1+c_1 \\ a_2+b_2 & a_2+c_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

[4.2.B7]. Spočtěte determinant :

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

[4.2.B8]. Spočtěte (nad tělesem komplexních čísel) determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2+i & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3-2i & 1-i \\ 2-3i & 1+i & 1+2i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & z^2 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$,

kde $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ kde $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

[4.2.B9]. Nechť je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Pak spočtěte minor $|B|$, resp. doplněk minoru $|B|$, resp. algebraický doplněk minoru $|B|$, jestliže submatice B je vytvořena

a) 1. a 3. řádkem a 2. a 3. sloupcem matice A

b) 2., 3., 4. řádkem a 1., 2., 4. sloupcem matice A.

[4.2.B10]. Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ z předchozího cvičení. Spočtěte algebraický doplněk A_{23}, resp. A_{33}, resp. A_{41}.

[4.2.B11]. Spočtěte determinant

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B12]. Pouze užitím Laplaceovy věty a definice determinantu spočtěte:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

[4.2.B13]. Užitím Laplaceovy věty spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(Návod: nejprve proveďte rozvoj podle 1. sloupce.)

[4.2.B14]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu $n \geq 3$ (nad T) taková, že $a_{11} \neq 0$. Dokažte, že pak platí :

$$|A| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

(Návod: determinant $|A|$ upravujte tak, aby pod prvkem a_{11} vznikly samé nuly a potom použijte Laplaceovu větu.)

[4.2.B15]. Opakovaným užitím výsledku předchozího cvičení a úpravou (vytknutím z jednoho řádku, resp. sloupce) vypočtěte determinanty ze cvičení [4.2.B11].

[4.2.B16]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n (nad T) a nechť $p \in T$ je pevný prvek. Utvořme matici B tak, že ke každému prvku matice A přičteme číslo p, tzn. $B = (a_{ij} + p)$. Dokažte, že pak :

$$|B| = |A| + p \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

kde A_{ij} značí algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A.

[4.2.B17]. Nechť $n \geq 2$; užitím Cauchyovy věty vypočtěte determinant:

a) $\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_2 - y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \dots & x_n - y_n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \sin(x_1 + y_1) & \sin(x_1 + y_2) & \dots & \sin(x_1 + y_n) \\ \sin(x_2 + y_1) & \sin(x_2 + y_2) & \dots & \sin(x_2 + y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(x_n + y_1) & \sin(x_n + y_2) & \dots & \sin(x_n + y_n) \end{vmatrix}$

(Návod: danou matici vyjádřete nejprve jako součin dvou vhodných matic.)

[4.2.B18]. Užitím úprav, které nemění hodnotu determinantu, spočtěte determinant dané matice řádu $n \geq 2$:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 \dots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 3 & 2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$

[4.2.B19]. Spočtěte determinant dané matice řádu $n \geq 2$:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 2 \dots n-2 & n-1 \\ a_1 & a_2 & 1 \dots n-3 & n-2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 \dots & n & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n-1 & n & 1 \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

[**4.2.B20**]. Nechť A_n značí matici řádu n. Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

a) $|A_n| = 2^{n+1} - 1$, kde $A_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $|A_n| = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$, kde $A_n = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{bmatrix}$

c) $|A_n| = \dfrac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$, pro $x \neq y$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} x+y & x\cdot y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & x\cdot y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{bmatrix}$$

d) $|A_n| = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{bmatrix}$$

[**4.2.B21**]. Nechť A_k značí matici řádu k; dokažte, že
a) pro každé $n \geq 2$ a $x \neq y$ platí:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot x \cdot y \cdot (x^{n-1} - y^{n-1})}{x - y}$$

b) pro každé $n \geq 1$ platí:

$$|A_{2n}| = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & y & \dots & x & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = (x^2 - y^2)^n$$

c) pro každé $n \geq 1$ platí:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \equiv 0, 1 \pmod 6 \\ 0 & \text{pro } n \equiv 2, 5 \pmod 6 \\ -1 & \text{pro } n \equiv 3, 4 \pmod 6 \end{cases}$$

[**4.2.B22**]. Dokažte, že pro každé přirozené n platí:

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tzn. každý polynom stupně $n \geq 1$ se uvedeným způsobem dá vyjádřit ve tvaru determinantu matice řádu $n + 1$.

[**4.2.B23**]. Nechť A_n značí matici řádu n. Dokažte, že pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí:

a) je-li $x \neq k\pi$ $(k \in \mathrm{Z})$, pak

$$|A_n| = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \quad \text{kde } A_n = \begin{bmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x \end{bmatrix}$$

b) $|A_n| = \cos nx$, kde $A_n = \begin{bmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{bmatrix}$

(Návod: při výpočtu b) rozvíjejte determinant podle posledního řádku.)

[4.2.B24]. Dokažte, že pro každé přirozené n platí: $|A_n| = |B_n|$, kde

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

(Návod: stačí ukázat, že posloupnosti $\{|A_n|\}$ a $\{|B_n|\}$ mají stejný rekurentní vzorec a stejné první dva členy.)

[4.2.B25]. Nechť A je daná matice řádu n. Napíšeme-li řádky matice A v opačném pořadí, dostaneme matici B.
Vyjádřete determinant $|B|$ pomocí determinantu $|A|$.

[4.2.B26]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad $\mathbf{K}$ a nechť $B = (\overline{a_{ij}})$, tj. prvky matice B jsou čísla komplexně sdružená k odpovídajícím prvkům matice A.
Dokažte, že pak platí: $|B| = \overline{|A|}$, tj. determinant matice B je číslo komplexně sdružené k determinantu matice A.

[4.2.B27]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n nad $\mathbf{K}$. Pak:
a) dokažte, že je-li $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ pro $\forall\, i,j$, potom $|A|$ je reálné číslo
b) ukažte, že předchozí implikaci nelze obrátit.

[4.2.B28]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice lichého řádu $2k+1$ nad $\mathbf{R}$ taková, že platí: $a_{ij} + a_{ji} = 0$ pro každé $,i,j$.
Dokažte, že pak je $|A| = 0$.

[4.2.B29]. Nechť A je matice řádu n (nad T); nechť $1 \le k \le n-1$. Dokažte, že platí: jsou-li všechny minory řádu k v matici A nulové, pak jsou všechny minory všech řádů větších než k též nulové.

[4.2.B30]. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \ge 2$ platí:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1).$$

Uvedený determinant se nazývá *Vandermondův determinant* a označuje se $V(x_1, \dots, x_n)$. Můžeme tedy dokazovanou rovnost stručně psát ve tvaru:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

(Návod: při odvozování rekurentního vzorce nejprve od každého sloupce (počínaje posledním) odečtěte x_n-násobek předchozího sloupce, pak rozviňte podle posledního řádku a dále z každého řádku vytkněte číslo $(-1) \cdot (x_n - x_i)$.)

[4.2.B31]. Užitím výsledku předchozího cvičení spočtěte determinant:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, kde $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

(Návod: při d) nejprve danou matici vhodně vyjádřete jako součin dvou matic.)

[4.2.B32]. Dokažte, že pro každé $n \ge 2$ je:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix} = (x_1 + \dots + x_n) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(Návod: nejprve od posledního sloupce odečtěte x_n^2-násobek předchozího sloupce, pak od předposledního sloupce odečtěte x_n-násobek předchozího sloupce a dále postupujte podobně jako ve cvičení [4.2.B30].)

§3: ALGEBRA MATIC

[4.3.A1]. U.p. matic A, B (nad $\mathbf{R}$), které nejsou čtvercové a přitom existují oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

[4.3.A2]. U.p. matice $X \in \mathrm{Mat}_{mm}(T)$ tak, aby $X \cdot A = t \cdot A$, kde $A \in \mathrm{Mat}_{mm}(T)$ je daná matice a $t \in T$ je dané číslo.

[4.3.A3]. U.p. báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{32}(\mathbf{Q})$.

[4.3.A4]. U.p. generátorů vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou bází tohoto prostoru.

[4.3.A5]. U.p. dvou regulárních matic A, B , které jsou děliteli nuly v okruhu $(\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

[4.3.A6]. U.p. dvou singulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že matice $A \cdot B$ je regulární.

[4.3.A7]. U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{Q})$, k níž neexistuje matice inverzní.

[4.3.A8]. U.p. matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{Q})$, k níž existuje více než jedna inverzní matice.

[4.3.A9]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že $A \cdot B = E_2$ a $B \cdot A \neq E_2$.

[4.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ existovala matice inverzní.

♣ ♣ ♣

[4.3.B1]. Pro dané matice A, B (nad $\mathbf{K}$) spočtěte matici $A \cdot B$:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3-i \\ -i \end{bmatrix}$ $B = [1+3i \quad 1+2i \quad 2]$

c) $A = B = \begin{bmatrix} i & 1+i & -1+i \\ 0 & i & -1+i \\ i & 0 & 1+i \end{bmatrix}$

[4.3.B2]. Pro dané matice A, B, C (nad $\mathbf{K}$) spočtěte matici $A \cdot B \cdot C$:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = [1+i \quad 2-i \quad 1-i]$, $B = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$, $C = [1+2i \quad 2+i]$

d) $A = \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1-i \end{bmatrix}$, $B = [1+i \quad 2-i \quad 1-i]$, $C = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$

[4.3.B3]. Spočtěte matici $A \cdot B - B \cdot A$, je-li :

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 12 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

[4.3.B4]. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí :

a) $$\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na & \frac{nab}{2}(n-1) + nc \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $$A^n = \begin{cases} E_2 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ A & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases} , \quad \text{kde } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} .$$

[4.3.B5]. Nalezněte všechny matice X, které jsou zaměnitelné s danou maticí A (tj. platí $A \cdot X = X \cdot A$), je-li:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[4.3.B6]. K dané matici $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ nalezněte všechny matice X, resp. Y, resp. Z, splňující vztah :

$X \cdot A = O_{33}$, resp. $A \cdot Y = O_{33}$, resp. $Z \cdot A = A \cdot Z = O_{33}$

(kde O_{33} značí nulovou matici řádu 3). Přitom:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4.3.B7]. Řešte maticovou rovnici (tj. nalezněte všechny matice X, které splňují danou rovnost) :

$$\text{a) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } X \cdot A = B \ , \ \text{kde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) $A \cdot X \cdot B = C$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

[4.3.B8]. K dané čtvercové matici A nalezněte adjungovanou matici A^*. Přitom :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 3-i & 3+4i & -5+5i \\ 1-i & 2+i & -1+3i \\ 1+5i & -7+4i & -7+9i \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a \end{bmatrix}$$

kde matice A v příkladu d) je řádu $n \geq 2$.

[4.3.B9]. K zadané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1} (pomocí adjungované matice). Přitom :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i & 1+i \\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a \end{bmatrix}$$

kde matice A v příkladu d) je řádu $n \geq 2$.

[4.3.B10]. Dokažte, že

a) pro $A, B \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ platí : $(A+B)' = A' + B'$

b) pro $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$, $t \in T$ platí : $(t \cdot A)' = t \cdot (A')$

c) pro $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$, $B \in \mathrm{Mat}_{np}(T)$, $t \in T$ platí :

$(t \cdot A) \cdot B = A \cdot (t \cdot B) = t \cdot (A \cdot B)$

d) pro $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ regulární a $0 \neq t \in T$ platí: $(t \cdot A)^{-1} = \frac{1}{t} \cdot (A^{-1})$.

[4.3.B11]. Dokažte, že pro čtvercové matice A, B řádu n platí:

a) $A \cdot B = E_n \iff B \cdot A = E_n$

b) $A \cdot A' = E_n \iff A' \cdot A = E_n$.

[4.3.B12]. Nechť $k \geq 2$ je celé číslo a nechť $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou regulární matice řádu n . Dokažte, že pak platí :

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} .$$

(Návod : důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem ke k .)

[4.3.B13]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$. Dokažte, že platí:

$A \cdot X = X \cdot A$ pro $\forall\, X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T) \iff \exists\, t \in T$ tak, že $A = t \cdot E_n$.

(Návod: při důkazu " $\Longrightarrow$ " zkoumejte rovnosti $A \cdot U_{rs} = U_{rs} \cdot A$, kde U_{rs} je matice mající na r, s-tém místě jedničku a jinde samé nuly .)

[4.3.B14]. Součet prvků v hlavní diagonále čtvercové matice X se nazývá *stopa matice* X a označuje symbolem $\mathrm{tr}(X)$ (zkratka z anglického "trace" = stopa).

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n (nad T), resp. $B = (b_{ij})$ je matice typu n/m (nad T). Dokažte, že pak platí:

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A) = \mathrm{tr}(A' \cdot B') = \mathrm{tr}(B' \cdot A') .$$

Definice. Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ se nazývá
- *symetrická*, jestliže $A' = A$ (tj. je-li $a_{ij} = a_{ji}$ pro $\forall\, i,j$)
- *kososymetrická*, jestliže $A' = -A$ (tj. je-li $a_{ij} = -a_{ji}$ pro $\forall\, i,j$).

[4.3.B15]. Nechť A je libovolná matice typu m/n (nad T). Dokažte, že pak matice $A' \cdot A$ je symetrická a matice $A \cdot A'$ je také symetrická.

[4.3.B16]. Nechť A, B jsou symetrické matice. Dokažte, že pak platí:
a) A je regulární matice $\Longrightarrow$ A^{-1} je symetrická matice
b) $A \cdot B$ je symetrická matice $\Longleftrightarrow$ $A \cdot B = B \cdot A$.

[4.3.B17]. Nechť A, B jsou kososymetrické matice. Dokažte, že pak platí:
a) A je regulární matice $\Longrightarrow$ A^{-1} je kososymetrická matice
b) $A \cdot B$ je kososymetrická matice $\Longleftrightarrow$ $A \cdot B = -B \cdot A$.

[4.3.B18]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{R})$ (tzn. A je reálná matice). Pak:
a) dokažte, že platí: $A \cdot A' = O_{mm} \Longleftrightarrow A = O_{mn}$
b) ukažte, že za předpokladu $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(\mathbf{K})$ (tzn. je-li A komplexní matice) předchozí tvrzení neplatí.

[4.3.B19]. Nechť je dána množina matic

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{K} \text{ libovolné} \right\}$$

(kde $\overline{x}$, resp. $\overline{y}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu x, resp. y) a nechť $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání, resp. násobení matic.
Dokažte, že pak :
a) $(M, +, \cdot)$ je netriviální okruh s jedničkou, který nemá dělitele nuly
b) $(M, +, \cdot)$ není obor integrity.

[4.3.B20]. Dokažte, že daná množina matic M, s operacemi sčítání matic a násobení matic, je tělesem. Přitom:

a) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ b) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$.

[4.3.B21]. Nechť a, b jsou pevná reálná čísla. Nechť

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & a(y-x) \\ b(y-x) & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

a $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání matic, resp. násobení matic. Pak:
a) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou
b) ukažte, že existují $a, b \in \mathbf{R}$ tak, že $(M, +, \cdot)$ není obor integrity
c) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $a \cdot b < \frac{1}{4}$.

[4.3.B22]. Nechť a, b jsou pevná reálná čísla. Nechť

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ ay & x+by \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

a $+$, resp. $\cdot$ značí sčítání matic, resp. násobení matic. Pak:
a) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní okruh s jedničkou
b) ukažte, že existují $a, b \in \mathbf{R}$ tak, že $(M, +, \cdot)$ není obor integrity
c) dokažte, že $(M, +, \cdot)$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $4a + b^2 < 0$.

[4.3.B23]. Na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$ definujeme relaci ϱ takto:
$A \varrho B \Longleftrightarrow \exists$ regulární matice $X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ tak, že $B = X' \cdot A \cdot X$.
Dokažte, že ϱ je relací ekvivalence na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$.

[4.3.B24]. Rozhodněte, zda dané matice A, B, C, D tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

[4.3.B25]. Rozhodněte, zda W je podprostorem vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ a pokud je, pak určete jeho dimenzi. Přitom:
a) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j\}$
b) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{i1} = 0 \text{ pro } \forall i\}$
c) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q}\}$
d) $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R}) \mid a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$.

[4.3.B26]. Nechť $W(S)$, resp. $W(K)$ značí množinu všech symetrických matic, resp. všech kososymetrických matic řádu $n \geq 2$ (nad T). Pak:
a) dokažte, že $W(S)$ a $W(K)$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{nn}(T)$
b) určete $\dim W(S)$ a $\dim W(K)$
c) dokažte, že $\mathrm{Mat}_{nn}(T) = W(S) \dot{+} W(K)$
d) dokažte, že každou čtvercovou matici lze napsat jako součet symetrické matice a kososymetrické matice, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Nechť $m \geq 2$ a

[4.3.B27]. Jsou dány tyto podmnožiny množiny $\overline{\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})}$ (tj. množiny všech regulárních matic řádu n nad $\mathbf{R}$) :

$H_1 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q}\}$, $H_2 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Q} \wedge |A| = 1\}$
$H_3 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z}\}$, $H_4 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{Z} \wedge |A| = 1\}$
$H_5 = \{A = (a_{ij}) \mid |A| = 1\}$, $H_6 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} > 0 \text{ pro } \forall\, i,j\}$.

Potom:
a) rozhodněte, zda H_i (pro $i = 1,2,3,\dots,6$) je podgrupou grupy regulárních matic $(\overline{\mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})}, \cdot)$
b) sestrojte hasseovský diagram uspořádané množiny $(\{H_1,\dots,H_6\}, \subseteq)$

Definice. Reálná čtvercová matice A se nazývá *ortogonální matice*, jestliže je regulární a platí: $A^{-1} = A'$.

[4.3.B28]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) A je ortogonální matice
(ii) $A \cdot A' = E_n$
(iii) $A' \cdot A = E_n$.

[4.3.B29]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Potom:
a) dokažte, že platí: A je ortogonální matice $\Longrightarrow$ $|A| = \pm 1$
b) ukažte, že opačná implikace obecně neplatí.

[4.3.B30]. Nechť H značí množinu všech ortogonálních matic řádu $n \geq 2$. Pak:
a) dokažte, že $(H,\cdot)$ je grupa (přičemž $\cdot$ značí násobení matic)
b) rozhodněte, zda grupa $(H,\cdot)$ je komutativní.

§4: HODNOST MATICE A DALŠÍ VLASTNOSTI MATIC

[4.4.A1]. U.p. matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a sloupce matice A jsou lineárně závislé.

[4.4.A2]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

[4.4.A3]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{75}(\mathbf{R})$ jsou všechny minory řádu 4 nulové. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

[4.4.A4]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2,4 a 6. Uveďte, co všechno lze pak říci o hodnosti matice A.

[4.4.A5]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ takových, že $h(A\cdot B) \neq h(B\cdot A)$.

[4.4.A6]. U.p. regulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ tak, že $h(A\cdot B) = 2$.

[4.4.A7]. U.p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

[4.4.A8]. U.p. matice H tak, aby $H \cdot A$ byla matice, která vznikne ze zadané matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ přičtením dvojnásobku 3.řádku k 1.řádku.

[4.4.A9]. U.p. bází (1) a (2) vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, že maticí přechodu od báze (1) k bázi (2) je matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

[4.4.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby $h(A\cdot B) \neq h(A)$, kde $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$.

♣ ♣ ♣

[4.4.B1]. Určete hodnost matice A (nad $\mathbf{R}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

[4.4.B2]. Určete hodnost matice A (nad $\mathbf{K}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i & 1-i \\ 1-i & -1+i & 1+3i \\ 1 & i & 1+i \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 1+2i \\ 1-5i & -7-4i & 4-7i \\ 1-i & -1-2i & 2-i \\ 2+4i & 7-i & 1+7i \end{bmatrix}$

[4.4.B3]. Je dána matice A (nad $\mathbf{R}$) tvaru :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Určete $h(A)$, resp. $h(B)$, resp. $h(A \cdot B)$, je-li :

a) $B = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

[4.4.B4]. Určete hodnost dané matice A (v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbf{R}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 2b & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2a & -2 & b \\ 2 & 3b & 3 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{bmatrix}$

[4.4.B5]. Určete hodnost dané matice A (v závislosti na parametrech $u, v \in \mathbf{K}$), je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} i & u & 4+2i \\ 1 & 2i & 1-i \\ -i & 2 & v \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & i & 2-i \\ i & u & -1 & 1+2i \\ -i & 1-2i & 1 & v \end{bmatrix}$

[4.4.B6]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Dokažte, že platí:
a) všechny minory řádu k (kde $k < \min(m, n)$) v matici A jsou nulové $\Longrightarrow$ každý minor řádu $r > k$ v matici A je nulový
b) v matici A existuje nenulový minor řádu $k > 1$ $\Longrightarrow$ pro každé přirozené $s < k$ existuje v matici A nenulový minor řádu s.

[4.4.B7]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je matice taková, že $h(A) = r \geq 2$. Dále, nechť M je čtvercová submatice v A, která je vybrána z r lineárně nezávislých řádků matice A. Pak:
a) ukažte, že může být $|M| = 0$
b) dokažte, že je-li navíc matice M vybrána z r lineárně nezávislých sloupců, pak musí být $|M| \neq 0$.

[4.4.B8]. Nechť $A, B, X \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ jsou matice takové, že A, B jsou regulární. Dokažte, že potom:

a) $h(A \cdot X \cdot B) = h(X)$ b) $h(A \cdot X \cdot A^{-1}) = h(X)$.

[4.4.B9]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$. Dokažte, že platí :

$$h(A+B) \leq h(A) + h(B) .$$

[4.4.B10]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je matice mající hodnost r a nechť M je její submatice typu s/n (tzn. A a M mají stejný počet sloupců). Pak:
a) dokažte, že $h(M) \geq r + s - m$
b) ukažte, že předchozí nerovnost neplatí v případě, když submatice M má méně než n sloupců.

[4.4.B11]. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}, a to jednak pomocí adjungované matice a jednak pomocí elementárních řádkových úprav:

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1+2i & 1-i \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

[4.4.B12]. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}, je-li :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 0 & -6 \\ 3 & 10 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

[4.4.B13]. Nalezněte inverzní matici k matici A, řádu $n \geq 2$, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \dots a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a \dots a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ 1 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$

d) $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \ \wedge \ 2 \leq i \leq n \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

[4.4.B14]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ je regulární matice, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že potom:

inverzní matice A^{-1} má pouze celočíselné prvky $\iff |A| = \pm 1$.

[4.4.B15]. Nalezněte ty hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které má podprostor W vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ nejmenší dimenzi a určete tuto dimenzi, je-li:

a) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (a, 4, 10, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, -3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 5, 13, 2)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 2, 4, 1)$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 7, a, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 3, -4, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, a, -14, 1)$.

[4.4.B16]. Zobrazení $f : \mathbf{K} \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ je definováno takto:

$$f(a + b\,i) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \text{pro } \forall\, a + b\,i \in \mathbf{K}.$$

Potom rozhodněte:

a) zda f je injektivní, resp. surjektivní zobrazení
b) zda pro $\forall\, u, v \in \mathbf{K}$ platí:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad , \qquad \text{resp. } f(u \cdot v) = f(u) \cdot f(v).$$

[4.4.B17]. Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, -3)$
$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 3, 3)$

b) $V = \mathbf{K}^3$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (-2+i\,, -i\,, 1-2i)$, $\mathbf{u}_2 = (1-i\,, i\,, -1)$
$\mathbf{v}_1 = (-1+i\,, 3+i\,, 2i)$, $\mathbf{v}_2 = (i\,, 2-i\,, 1+i)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 2, 3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 4, -1, 1)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, 5, 4)$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 3, 1, 0)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 3, 0, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, -1)$

e) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 2, 1, 2, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, -2, 8, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 2, -3, 4, -2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 4, -4, 7, -1)$

f) $V = \mathbf{R}^5$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 2, -5, -9)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -3, -2, 0, 3)$,
$\mathbf{u}_4 = (-1, 1, 2, 3, 2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 4, 2, 4, 3)$,
$\mathbf{v}_4 = (-1, 7, 3, 7, 5)$

g) $V = \mathbf{R}^6$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (2, 1, 1, 2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 4, 5, 3, 4, 5)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 3, 4, 1, 3, 4)$,
$\mathbf{u}_4 = (4, 0, -1, 5, 0, -1)$, $\mathbf{u}_5 = (4, -2, -4, 6, -2, -4)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 2, -3, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 3, -1, 2, 3)$,
$\mathbf{v}_4 = (-1, 2, 3, -3, 2, 3)$

h) $V = \mathbf{R}^6$; $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, -1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, -1, 0, 1, 0)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_4 = (1, -1, 1, 2, 1, -2)$
$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, -2, 0, 0)$
$\mathbf{v}_3 = (3, 0, 2, -1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (4, 1, 3, -4, 0, 2)$.

[4.4.B18]. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorového prostoru V (nad T).
Dokažte, že A je regulární matice.

[4.4.B19]. Nechť (1), (2), (3) jsou tři báze vektorového prostoru V nad T. Nechť A je matice přechodu od báze (1) k bázi (2), resp. B je matice přechodu od báze (2) k bázi (3).
Dokažte, že pak $A \cdot B$ je maticí přechodu od báze (1) k bázi (3).

[4.4.B20]. Nalezněte matici přechodu od báze (1) k bázi (2) vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^2$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (2,-3)\ ,\ \mathbf{u}_2 = (-1,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (1,0)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (0,-2)$

b) $V = \mathbf{R}^3$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,2,1)\ ,\mathbf{u}_2 = (2,-1,3)\ ,\ \mathbf{u}_3 = (-2,3,2)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (-5,9,2)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (6,-10,5)\ ,\ \mathbf{v}_3 = (-1,2,9)$

c) $V = \mathbf{R}^4$,

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,2,0,0)\ ,\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0)\ ,\ \mathbf{u}_3 = (1,0,0,-1)\ ,$
$\mathbf{u}_4 = (1,1,-1,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (2,2,0,0)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (3,3,-1,0)\ ,\ \mathbf{v}_3 = (2,4,0,1)\ ,$
$\mathbf{v}_4 = (2,3,1,-1)$.

[4.4.B21]. Je dána báze (1) vektorového prostoru V a matice A. Nalezněte bázi (2) prostoru V takovou, aby A byla maticí přechodu od báze (1) k bázi (2). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$) (viz cvičení [3.1.B1]b)) ;

$(1): \mathbf{u}_1 = 1+2i,\ \mathbf{u}_2 = 2-3i$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$,

$(1): \mathbf{u}_1 = x^2+3x+2\ ,\quad \mathbf{u}_2 = 2x^2+x+1\ ,\quad \mathbf{u}_3 = 2x+3$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

$$(1): U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4.4.B22]. Je dána báze (2) vektorového prostoru V a matice A. Nalezněte bázi (1) prostoru V takovou, aby A byla maticí přechodu od báze (1) k bázi (2). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$) (viz cvičení [3.1.B1]b)) ;

$(2): \mathbf{v}_1 = 3-2i\ ,\ \mathbf{v}_2 = 1+i\ ,\quad$ resp. $\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $V = \mathbf{K}^3$,

$(2): \mathbf{v}_1 = (1\,,\,2-i\,,\,0)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (1+i\,,\,0\,,\,1)\ ,\ \mathbf{v}_3 = (0\,,\,2i\,,\,2+i)$

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & 1-2i & -2-i \\ 4+3i & -8-3i & -3+9i \\ -2+i & 3-3i & -3-3i \end{bmatrix}$$

[4.4.B23]. Nalezněte rovnice pro transformaci souřadnic vektoru při přechodu od báze (1) k bázi (2) vektorového prostoru V (tzn. vyjádřete souřadnice vektoru v bázi (1) pomocí souřadnic téhož vektoru v bázi (2)). Přitom:

a) $V = \mathbf{K}^2$

$(1): \mathbf{u}_1 = (1+i\,,\,2-i)\ ,\ \mathbf{u}_2 = (1-i\,,\,1+2i)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (7+i\,,\,-3+4i)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (2\,,\,-1+3i)$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$,

$(1): \mathbf{u}_1 = x^2+2x+1\ ,\ \mathbf{u}_2 = 2x^2-x+3\ ,\ \mathbf{u}_3 = -2x^2+3x+2$

$(2): \mathbf{v}_1 = -5x^2+9x+2\ ,\ \mathbf{v}_2 = 6x^2-10x+5\ ,\ \mathbf{v}_3 = -x^2+2x+9$

c) $V = \mathbf{K}^3$

$(1): \mathbf{u}_1 = (1,1,1)\ ,\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1)\ ,\ \mathbf{u}_3 = (0,0,1)$

$(2): \mathbf{v}_1 = (1+i\,,\,1+i\,,\,1+i)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (2+i\,,\,3+2i\,,\,3+2i)\ ,$
$\mathbf{v}_3 = (3+i\,,\,5+2i\,,\,6+3i)$

d) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

$$(1): U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2): V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ V_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

KAPITOLA 5:

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

§1: GAUSSOVA METODA ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.1.B1]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=5\\ 2x_1+3x_2+x_3&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3&=11\\ 5x_1+5x_2+2x_3&=6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 36x_1-23x_2+29x_3-43x_4&=3\\ 45x_1-28x_2+34x_3-52x_4&=9\\ 35x_1-21x_2+28x_3-45x_4&=16\\ 46x_1-32x_2+36x_3-48x_4&=-18 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1-x_2-x_3-2x_4&=-4\\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4&=-3\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4&=-6\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=1\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4&=-4 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_3+2x_4+3x_5&=2\\ -x_2-2x_3-3x_4&=2\\ x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ x_1+2x_2+3x_3&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_2+x_3&=0\\ 2x_1+x_2-x_3&=1\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2\\ x_1+2x_2&=-1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-4x_3+6x_4-4x_5&=-4\\ 5x_1+5x_2+8x_4-x_5&=-7\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8\\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1\\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3 \end{aligned}$$

[5.1.B2]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 5x_1-9x_2+5x_3&=1\\ 2x_1+3x_2+3x_3&=2\\ x_1+8x_2&=1\\ x_1-2x_2+x_3&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7\\ 2x_1+6x_2+8x_3+3x_4&=3\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=2\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12\\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4&=20 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 10x_1+23x_2+17x_3+44x_4&=25\\ 15x_1+35x_2+26x_3+69x_4&=40\\ 25x_1+57x_2+42x_3+108x_4&=65\\ 30x_1+69x_2+51x_3+133x_4&=95 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_2+4x_3+3x_4&=0\\ x_2+3x_3+5x_4+3x_5&=0\\ x_2+x_3+x_4&=0\\ x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ x_2+2x_3+3x_4&=1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5&=2\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5&=2\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5&=1\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5&=1 \end{aligned}$$

[5.1.B3]. Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1\\ x_1-2x_2+x_3&=0\\ 5x_1-9x_2+5x_3&=1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=1\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_2+x_4&=1\\ 3x_1-2x_2-3x_3+4x_4&=-2\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2\\ x_1-x_3&=1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=1\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5&=0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_2+2x_3+2x_4-4x_5&=5\\ x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5&=3\\ -x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5&=0\\ -2x_1+3x_2+3x_3-6x_5&=2 \end{aligned}$$

[5.1.B4]. Nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic, zadané rozšířenou maticí soustavy (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 3&3&2&1&10\\ 4&2&3&1&8\\ 3&5&1&1&15\\ 7&4&5&2&18 \end{array}\right]$$

b) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0&2&3&1&0&0\\ 3&4&5&5&6&9\\ 1&5&4&3&2&3\\ 2&1&2&3&4&6 \end{array}\right]$$

c) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&2\\ 7&0&0&0&4&3\\ 5&0&0&0&3&4 \end{array}\right]$$

d) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3&0&0&0&2&1\\ 1&0&0&0&1&1\\ 7&0&0&0&4&1\\ 5&0&0&0&3&1 \end{array}\right]$$

e) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0&\sqrt{2}&\sqrt{3}&\sqrt{6}&0&3\\ 2&2&\sqrt{3}&-2&-\sqrt{5}&-2\\ 0&2&\sqrt{5}&2\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\ 3&3&\sqrt{3}&-3&0&3 \end{array}\right]$$

f) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&0&\sqrt{3}&-\sqrt{6}&3&\sqrt{3}\\ \sqrt{2}&0&\sqrt{2}&-2&\sqrt{6}&\sqrt{2}\\ 3&0&-\sqrt{6}&2\sqrt{3}&-3\sqrt{2}&-\sqrt{6}\\ \sqrt{3}&0&1&-\sqrt{2}&\sqrt{3}&1 \end{array}\right]$$

[5.1.B5]. Gaussovou metodou řešte zadanou soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{K}$):

a) $$\begin{aligned}(1-2i)\,x_1 + (2+3i)\,x_2 &= 8+5i\\ (1-4i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 &= 5-2i\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(3-i)\,x_1 + (-5+i)\,x_2 &= 1+i\\ (1-2i)\,x_1 + (-2+3i)\,x_2 &= 1\\ (5-5i)\,x_1 + (-9+7i)\,x_2 &= 3+i\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}2\,x_1 + (2+2i)\,x_2 + 2i\,x_3 &= 1\\ (1-i)\,x_1 + (1+3i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 &= 0\\ (1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 1\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}(1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 1\\ x_1 + (1+i)\,x_2 + i\,x_3 &= 1\\ (1-i)\,x_1 + (1+3i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (-1-i)\,x_2 + x_3 &= 1-i\end{aligned}$$

[5.1.B6]. Řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$), v závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$:

a) $$\begin{aligned}4x_1-2x_2+3x_3+7x_4 &= 1\\ 5x_1-3x_2+3x_3+4x_4 &= 3\\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4 &= 9\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4 &= a\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}a x_1-4x_2+9x_3+10x_4 &= 11\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4 &= 5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4 &= 7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4 &= 9\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}a x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+a x_2+x_3 &= a\\ x_1+x_2+a x_3 &= a^2\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}a x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+a x_2+x_3 &= 1\\ x_1+x_2+a x_3 &= 1\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}(1+a)\,x_1+x_2+x_3 &= 1\\ x_1+(1+a)\,x_2+x_3 &= a\\ x_1+x_2+(1+a)\,x_3 &= a^2\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}(a+1)\,x_1+x_2+x_3 &= a^2+3a\\ x_1+(a+1)\,x_2+x_3 &= a^3+3a^2\\ x_1+x_2+(a+1)\,x_3 &= a^4+3a^3\end{aligned}$$

§2: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.2.A1]. U.p. dvou ekvivalentních soustav lineárních rovnic (nad $\mathbf{Q}$), které sestávají z různého počtu rovnic.

[5.2.A2]. U.p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě jedno řešení.

[5.2.A3]. U.p. soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě jedno řešení.

[5.2.A4]. U.p. soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých (nad $\mathbf{R}$), která má právě 2 řešení.

[5.2.A5]. U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{Q}$) tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být voleny za volné neznámé.

[5.2.A6]. U.p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{Q}$) tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

[5.2.A7]. Je dána soustava 3 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž matice soustavy je singulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

[5.2.A8]. Je dána soustava 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

[5.2.A9]. U.p. nehomogenní soustavy lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{R}$) tak, že množina všech řešení této soustavy je podprostorem ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

[5.2.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad T) byla neřešitelná.

♣ ♣ ♣

[5.2.B1]. Rozhodněte, zda daná soustava lineárních rovnic je řešitelná, či nikoliv. U řešitelné soustavy udejte, kolik má řešení (bez hledání těchto řešení):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+10x_2+2x_3-x_4&=-2\\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4&=1\\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4&=5\\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4&=2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1+3x_2+2x_3+x_4&=10\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4&=15\\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4&=8\\ 4x_1+4x_2+2x_3+x_4&=13\\ 4x_1+x_2+3x_3+x_4&=8 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3\\ 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4&=7\\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4&=1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3&=10\\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4&=11\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12\\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4&=20 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} (1+i)\,x_1+(2-i)\,x_2&=3+5i\\ (3+4i)\,x_1+x_2+(2-5i)\,x_3&=7-2i\\ (2+i)\,x_1+(1-i)\,x_2+(3-4i)\,x_3&=1+6i \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} (2+3i)\,x_1+(1-i)\,x_2+2\,x_3&=1+i\\ (1+2i)\,x_1+2i\,x_3&=3+i\\ (-1+i)\,x_1+(1+i)\,x_2+(2+2i)\,x_3&=-2i \end{aligned}$$

[5.2.B2]. V závislosti na parametrech rozhodněte o řešitelnosti, resp. o počtu řešení (bez hledání těchto řešení) soustavy lineárních rovnic, která je zadaná rozšířenou maticí soustavy (nad $\mathbf{R}$):

a) $$\left[\begin{array}{cccc|c} a&1&1&1&1\\ 1&a&1&1&1\\ 1&1&a&1&1\\ 1&1&1&a&1 \end{array}\right]$$

b) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 4&1&4&a&2\\ 2&3&6&8&5\\ 3&2&5&4&3\\ 6&-1&2&-8&-3 \end{array}\right]$$

c) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&a\\ 0&1&1&0&b\\ 0&0&1&1&c\\ 1&0&0&1&d \end{array}\right]$$

d) $$\left[\begin{array}{ccc|c} d&1&1&a\\ 1&d&1&b\\ 1&1&d&c \end{array}\right]$$

e) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&a&1&3\\ b&1&1&2c\\ 1&1&1&1 \end{array}\right]$$

f) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&0\\ a&b&c&1\\ a^2&b^2&c^2&0 \end{array}\right]$$ kde $a,b\geq 0$.

[5.2.B3]. Určete všechny hodnoty parametru $a\in\mathbf{R}$, pro které je daná soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) řešitelná:

a) $$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ 3x_1-7x_2+3x_3+6x_4&=7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ -2x_1+2x_2-4x_3+2x_4&=7 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3-x_4&=1\\ -x_1-3x_2-5x_3+10x_4&=a\\ -x_1-7x_2+3x_3+6x_4&=7 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1+x_2+(1+a)x_3&=a^2\\ x_1+(1+a)x_2+x_3&=a\\ (1+a)x_1+x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$

[5.2.B4]. Nechť a,b,c,d jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Dokažte, že pak následující soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) má jediné řešení:

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4&=1\\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4&=9\\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4&=8\\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4&=9 \end{aligned}$$

(Návod: počítejte determinant matice soustavy a užijte Cramerovo pravidlo.)

[5.2.B5]. Nechť $0\neq t\in T$ a nechť jsou dány soustavy lineárních rovnic:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ \vdots\qquad\qquad&\ \ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=b_k \end{aligned} \qquad\qquad (2)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=t\cdot b_1\\ \vdots\qquad\qquad&\ \ \vdots\\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n&=t\cdot b_k \end{aligned}$$

Pak:

a) dokažte, že soustava (1) je řešitelná $\Longleftrightarrow$ soustava (2) je řešitelná

b) ukažte, že předchozí tvrzení neplatí, vynecháme-li předpoklad $t\neq 0$.

[5.2.B6]. Dokažte, že soustava lineárních rovnic (zapsaná maticově) $A\cdot X=B$ je řešitelná $\Longleftrightarrow$ sloupcový vektor B je lineární kombinací sloupců matice A.

[5.2.B7]. Nechť A je matice typu k/n nad T. Dokažte, že množina všech vektorů $\mathbf{u}\in T^k$, pro které je soustava lineárních rovnic $A\cdot X=\mathbf{u}'$ řešitelná, tvoří podprostor v T^k, jehož dimenze je rovna $h(A)$.

(Návod: při důkazu využijte předchozí cvičení.)

[5.2.B8]. Je dána soustava lineárních rovnic $A\cdot X=B$, kde

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sloupcových vektorů B takových, že

a) soustava $A\cdot X=B$ je řešitelná

b) soustava $A\cdot X=B$ není řešitelná

[5.2.B9]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze vektorového prostoru V nad T. Uvažme vektory:

$$a_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \ , \ a_2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \ , \ \ldots \ , \ a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_n \ , \ a_n\mathbf{u}_n$$

kde $a_i \in T$. Nalezněte všechny hodnoty $a_1, \ldots, a_n$, pro které jsou uvedené vektory lineárně nezávislé.

(Návod: použijte úvah o řešitelnosti a počtu řešení soustavy lineárních rovnic.)

[5.2.B10]. Danou soustavu lineárních rovnic řešte pomocí Cramerova pravidla (pokud je to možné):

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - i\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 2+i \\ i\,x_1 - x_2 &= 0 \\ (1-i)\,x_1 + i\,x_3 &= 1+3i \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 13x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 8 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 7x_1 - 6x_2 + 18x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

[5.2.B11]. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu n lineárních rovnic o n neznámých (nad T):

$$\begin{aligned} bx_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + ax_n &= 2 \\ ax_1 + bx_2 + \ldots + ax_{n-1} + ax_n &= 2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \ \vdots \\ ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + bx_n &= 2 \end{aligned} \ , \qquad \text{kde } b \neq a \ \wedge \ b \neq (1-n)\cdot a \,.$$

[5.2.B12]. Je dána soustava lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 &= c \\ c\,x_1 + b\,x_3 &= a \\ c\,x_2 + a\,x_3 &= b \end{aligned}$$

přičemž platí, že tato soustava má jediné řešení. Potom:

a) dokažte, že $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

b) pomocí Cramerova pravidla najděte toto řešení.

[5.2.B13]. Je dána řešitelná soustava lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$). Pomocí obecného Cramerova pravidla nalezněte všechna její řešení:

a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

§3:HOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.3.A1]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{R}$) tak, že za volné neznámé je nutno volit právě neznámé x_1, x_3.

[5.3.A2]. U.p. podprostoru W v $\mathbf{R}^5$, který není množinou řešení žádné homogenní soustavy lineárních rovnic o 5 neznámých nad $\mathbf{R}$.

[5.3.A3]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 4.

[5.3.A4]. U.p. homogenní soustavy 2 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 2.

[5.3.A5]. Nechť W je podprostor řešení homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 6 neznámých (nad $\mathbf{R}$). Udejte, jakých všech hodnot může nabývat $\dim W$.

[5.3.A6]. U.p. homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byly vektory $(1,1,0,0,0)$ a $(0,0,0,0,1)$.

[5.3.A7]. U.p. homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$ tak, aby bází jejího podprostoru řešení byl vektor $(1,1,1,1)$.

[5.3.A8]. U.p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

[5.3.A9]. U.p. homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

[5.3.A10]. U.p. podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná

pro to, aby homogenní soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad $\mathbf{R}$) měla nekonečně mnoho řešení.

♣ ♣ ♣

[5.3.B1]. Řešte zadanou homogenní soustavu lineárních rovnic (nad **R**, resp. nad **K**):

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0\\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0\\ 3x_1 + 16x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= 0\\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0\\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 6x_5 &= 0\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0\\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0\\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0\\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0\\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0\\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0\\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0\\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} (1+i)\,x_1 + (3-i)\,x_2 + (1+2i)\,x_3 &= 0\\ (2+3i)\,x_1 + (2+i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\\ (1+2i)\,x_1 + (-1+2i)\,x_2 + (1-3i)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} (1-i)\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (1+i)\,x_3 &= 0\\ (1+3i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (-1+i)\,x_3 &= 0\\ (1+i)\,x_1 + x_2 + i\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

[5.3.B2]. V závislosti na parametrech řešte homogenní soustavu lineárních rovnic nad **R**:

a)
$$\begin{aligned} a\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 &= 0\\ 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 0\\ 3\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 &= 0\\ a^2x_1 + x_2 + (a-1)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4 &= 0\\ b\,x_1 - a\,x_2 + d\,x_3 - c\,x_4 &= 0\\ c\,x_1 - d\,x_2 - a\,x_3 + b\,x_4 &= 0\\ d\,x_1 + c\,x_2 - b\,x_3 - a\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} a\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 &= 0\\ 4\,x_1 - 6\,x_2 - 3\,x_3 &= 0\\ x_1 + x_2 - a\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(Návod: při řešení c) spočtěte nejprve determinant matice soustavy.)

[5.3.B3]. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které má daná homogenní soustava lineárních rovnic (nad **R**) nenulové řešení:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0\\ 2\,x_1 + x_2 - x_3 + 2\,x_4 &= 0\\ x_2 + x_3 + 4\,x_4 &= 0\\ x_1 + x_4 &= 0\\ x_1 - x_2 - 3\,x_3 + a\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a\,x_1 - x_2 + x_4 &= 0\\ x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 &= 0\\ 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 &= 0\\ (a+1)\,x_1 + 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 0\\ (a+2)\,x_1 + 3\,x_3 + 3\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} a\,x_1 + 3\,x_2 + a\,x_3 &= 0\\ (a-1)\,x_1 + 3\,x_2 + 2a\,x_3 &= 0\\ (2a+1)\,x_1 + 6\,x_2 + a\,x_3 &= 0\\ -x_1 + x_2 + (a+2)\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 5\,x_2 - (a+2)\,x_3 + (2a-2)\,x_4 &= 0\\ 2\,x_1 + 3\,x_2 - (a+1)\,x_3 + (a-1)\,x_4 &= 0\\ 3\,x_1 + 4\,x_2 - (2a+1)\,x_3 + (a-1)\,x_4 &= 0\\ (a+1)\,x_1 + a\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 &= 0\\ (a+1)\,x_1 + (a+1)\,x_2 + (a+1)\,x_3 + a\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[5.3.B4]. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých taková, že matice soustavy má hodnost $(n-1)$.
Dokažte, že potom pro libovolná dvě nenulová řešení $(r_1, \ldots, r_n)$, $(s_1, \ldots, s_n)$ této soustavy existuje $t \in T$ tak, že:

$$r_i = t \cdot s_i\,, \quad \text{pro každé } i = 1, \ldots, n\,.$$

[5.3.B5]. Nechť $A \cdot X = B$ a $C \cdot X = D$ jsou dvě ekvivalentní řešitelné soustavy lineárních rovnic o n neznámých (nad T). Pak:

a) dokažte, že zhomogenizované soustavy k těmto soustavám jsou také ekvivalentní

b) ukažte, že bez předpokladu řešitelnosti soustav $A \cdot X = B$ a $C \cdot X = D$ předchozí tvrzení obecně neplatí.

[5.3.B6]. Nalezněte bázi a dimenzi podprostoru řešení W zadané homogenní soustavy lineárních rovnic (nad **R**):

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 0\\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 0\\ 3x_1 + 14x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 0\\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= 0\\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 &= 0\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0\\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0\\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 14x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 0\\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 9x_5 &= 0\\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 20x_4 + 3x_5 &= 0\\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 15x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[5.3.B7]. Je dána homogenní soustava lineárních rovnic o 3 neznámých, nad **K**. Nalezněte bázi a dimenzi jejího podprostoru řešení W (ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}^3$):

a) $$\begin{aligned}(1+i)\,x_1 + (1-i)\,x_2 + (2-i)\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (3+2i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(2+3i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\\ (1-8i)\,x_1 + 5i\,x_2 + (3-i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(1+2i)\,x_1 + (-2+3i)\,x_2 + 3i\,x_3 &= 0\\ (2+i)\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (1+2i)\,x_3 &= 0\\ (2-3i)\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (1+2i)\,x_3 &= 0\\ (3+3i)\,x_1 + (-1+4i)\,x_2 + (1+5i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}(1-i)\,x_1 + i\,x_2 + (1-i)\,x_3 &= 0\\ (-1+i)\,x_1 + (2+i)\,x_2 + (3+i)\,x_3 &= 0\\ (1-i)\,x_1 + (1+2i)\,x_2 + (3-i)\,x_3 &= 0\\ (-2+2i)\,x_1 + (3+i)\,x_2 + (4+2i)\,x_3 &= 0\end{aligned}$$

[5.3.B8]. Nalezněte homogenní soustavu lineárních rovnic, jejíž množina řešení je rovna podprostoru W vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $W = [(1,2,-1), (2,1,1)]$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $W = [(1,-1,1,0), (1,1,0,1), (2,0,1,1)]$

c) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(1,1,5,5,2), (2,2,0,0,-1), (1,1,-1,-1,-1), (1,1,1,1,0)]$

d) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(3,2,5,2,7), (6,4,7,4,5), (3,2,-1,2,-11), (6,4,1,4,13)]$

e) $V = \mathbf{R}^5$;
$W = [(2,1,1,2,1), (3,1,2,3,1), (4,-1,5,7,3), (5,-2,5,6,0)]$

f) $V = \mathbf{R}^4$; $W = \{(2a-b-c, 3a-b+2c, a-2b+3c, c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$

g) $V = \mathbf{R}^5$; $W = \{(t, 2t, 0, -t, 4t) \mid t \in \mathbf{R}\}$

h) $V = \mathbf{R}^5$; $W =$
$\{(5a-2b+3c, 6a-4b+4c, a+3b-3c, 2a+b+2c, 3a+b+c) \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$.

[5.3.B9]. Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic, jejíž množinou řešení je zadaná množina vektorů z vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $M = \{(0,0,0), (1,1,1), (-1,-1,-1)\}$

b) $V = \mathbf{R}^3$, $M = \{(x,0,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

c) $V = \mathbf{R}^4$, $M = \{(a+b+1, a+b, 0, 0) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$

d) $V = \mathbf{R}^4$, $M = \mathbf{R}^4 - \{(1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1)\}$.

[5.3.B10]. Nalezněte homogenní soustavu 2 lineárně nezávislých lineárních rovnic (nad **R**) takovou, že jejími řešeními jsou (kromě jiných) vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$, kde:

a) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (2,-3,1,0)$, $\mathbf{w} = (3,-5,-1,1)$

b) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (2,-3,1,0)$, $\mathbf{w} = (3,-5,-1,2)$

c) $\mathbf{u} = (1,-2,-2,2)$, $\mathbf{v} = (-1,2,2,-2)$, $\mathbf{w} = (\sqrt{2},-\sqrt{8},-\sqrt{8},\sqrt{8})$

[5.3.B11]. Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{u}$ je řešením zadané soustavy lineárních rovnic a pokud ano, pak pomocí vektoru $\mathbf{u}$ vyjádřete všechna řešení $\mathbf{x}$ této soustavy:

a) $\mathbf{u} = (1,-1,1,1)$; $$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1\\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \phantom{{}-x_4} &= 2\end{aligned}$$

b) $\mathbf{u} = (-8,3,6,0)$; $$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4\\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3\\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1\\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3\end{aligned}$$

c) $\mathbf{u} = (-16,23,0,0,0)$; $$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12\end{aligned}$$

d) $\mathbf{u} = (0,2,-2,0,3)$; $$\begin{aligned}x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= -3\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3\end{aligned}$$

KAPITOLA 6:

EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: SKALÁRNÍ SOUČIN, VELIKOST A ODCHYLKA VEKTORŮ

Úmluva. Všude v této kapitole, ve všech příkladech o euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ se předpokládá (není-li výslovně řečeno jinak), že skalární součin je v prostoru $\mathbf{R}^n$ definován "obvyklým způsobem", tzn. pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \,.$$

[6.1.A1]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{K}$ nad $\mathbf{R}$ (viz cvičení [3.1.B1] b)) definujte skalární součin.

[6.1.A2]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_3[x]$ definujte skalární součin dvěma různými způsoby.

[6.1.A3]. U.p. reálného vektorového prostoru, ve kterém nelze definovat skalární součin.

[6.1.A4]. U.p. nenulového vektoru $\mathbf{u}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$.

[6.1.A5]. U.p. normovaných vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{3}$.

[6.1.A6]. U.p. normovaných, lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$.

[6.1.A7]. Nechť skalární součin dvou normovaných vektorů v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ je roven -1. Uveďte, co lze říci o lineární závislosti či nezávislosti těchto vektorů.

[6.1.A8]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou normované vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$. Uveďte, co všechno lze říci o velikosti vektoru $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

[6.1.A9]. U.p. vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, že odchylka těchto vektorů je $\frac{2}{3}\pi$.

[6.1.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby pro vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ platilo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.

♣ ♣ ♣

[6.1.B1]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ je pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ definováno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}^2$ definován skalární součin. Přitom:
a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 5u_2v_2$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_2 + u_2v_1$ d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$

[6.1.B2]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definováno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}^3$ definován skalární součin. Přitom:
a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$
b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + 2u_3v_3$
d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 - u_2v_3 - u_3v_2$.

[6.1.B3]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ je pro libovolné dva vektory (tj. polynomy) $\mathbf{f} = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\mathbf{g} = b_2x^2 + b_1x + b_0$ definováno reálné číslo $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$.
Rozhodněte, zda je takto v $\mathbf{R}_2[x]$ definován skalární součin. Přitom:
a) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = 1$ b) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$
c) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt$ d) $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = | a_2 \cdot b_2 |$.

[6.1.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ je pro libovolné vektory (tj. matice) $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ definováno reálné číslo $A \cdot B$.

Rozhodněte, zda je takto v $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ definován skalární součin. Přitom:
a) $A \cdot B = \det(A \cdot B)$ b) $A \cdot B = \det(A + B)$
c) $A \cdot B = a_1b_1 + a_4b_4$. d) $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$

[6.1.B5]. Nechť V je euklidovský vektorový prostor (se skalárním součinem $\cdot$). Rozhodněte, zda $*$ je též skalárním součinem ve V, jestliže pro $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ položíme:
a) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ b) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
c) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = t \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, kde t je pevné reálné číslo.

[6.1.B6]. Nechť v reálném vektorovém prostoru V jsou definovány dva skalární součiny $\circ$ a $*$.
Dokažte, že jestliže pro každý vektor $\mathbf{u} \in V$ platí : $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} * \mathbf{u}$, pak jsou oba skalární součiny $\circ$ a $*$ shodné.

(Návod: počítejte $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \circ (\mathbf{u}+\mathbf{v})$ a $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) * (\mathbf{u}+\mathbf{v})$.)

[6.1.B7]. V euklidovském prostoru V spočtěte velikost zadaného vektoru $\mathbf{u}$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^5$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, 7, \sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b) $V = \mathbf{R}^7$, $\mathbf{u} = (-9, -4, 0, \sqrt{15}, 0, 7, 8)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,

$\mathbf{u} = 5x^2 + 6x - 3$

d) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,

$\mathbf{u} = 5x^2 + 6x - 3$.

[6.1.B8]. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které je zadaný vektor $\mathbf{u}$ z euklidovského prostoru V normovaný. Přitom:

a) $V = \mathbf{R}^5$; $\mathbf{u} = (a+1, 0, a+2, 0, a+1)$

b) $V = \mathbf{R}^7$; $\mathbf{u} = (a+1, 1, 0, a+2, 1, 0, 2a-3)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,

$\mathbf{u} = 3x^2 + a$

d) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$,

$\mathbf{u} = 3x^2 + a$.

[6.1.B9]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou vektory z euklidovského prostoru V. Dokažte, že platí:

a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$

b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 4 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

c) jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nenulové vektory a φ je jejich odchylka, pak:

$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2 \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\varphi$

d) $|\,\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\,| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

(Návod: při d) počítejte $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ a použijte Schwarzovu nerovnost.)

[6.1.B10]. Nechť V je euklidovský prostor a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou vektory z V takové, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
Bez užití Schwarzovy nerovnosti dokažte, že pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

[6.1.B11]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Dokažte, že platí:

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \iff \exists\, r \geq 0$ tak, že $\mathbf{u} = r \cdot \mathbf{v}$ nebo $\mathbf{v} = r \cdot \mathbf{u}$.

[6.1.B12]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ jsou takové vektory, že $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé. Pak:

a) dokažte, že platí: $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}$

b) ukažte, že předchozí rovnost obecně neplatí, nahradíme-li předpoklad, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé předpokladem, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ jsou lineárně závislé.

[6.1.B13]. V euklidovském prostoru V jsou zadány dvě posloupnosti k vektorů : $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, resp. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ takové, že pro $\forall\, i, j$ platí :

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ je-li } i \neq j \quad \wedge \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0 .$$

Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou též lineárně nezávislé.

[6.1.B14]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$, resp. $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$. Dokažte, že platí : $t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \iff$

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + t_2(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k) &= 0 \\ t_1(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) + t_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \;\;\vdots \\ t_1(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1) + t_2(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2) + \ldots + t_k(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k) &= 0 \end{aligned}$$

(Návod: při důkazu "$\Longleftarrow$" nejprve pro každé $i = 1, \ldots, k$ v i-té rovnici "vytkněte" vektor $\mathbf{u}_i$, vynásobte číslem t_i a nakonec všechny takto vzniklé rovnice sečtěte.)

[6.1.B15]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Determinant

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{vmatrix}$$

se nazývá *Gramův determinant vektorů* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ a označuje se symbolem $G(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

Dokažte, že platí :

vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé $\iff G(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = 0$.

(Návod: použijte definici lineární závislosti a výsledek cvičení [6.1.B14].)

[6.1.B16]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V.
Rozhodněte, jak se změní Gramův determinant $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$, jestliže v posloupnosti $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$

a) zaměníme vektory $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{u}_j$ $(i \neq j)$

b) vektor $\mathbf{u}_i$ vynásobíme číslem $t \in \mathbf{R}$

c) k vektoru $\mathbf{u}_i$ přičteme vektor $\mathbf{u}_j$ $(i \neq j)$

d) k vektoru $\mathbf{u}_i$ přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů.

(Návod: při c) počítejte $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_k)$ tak, že nejprve rozepíšete i-tý řádek a po zjednodušení pak totéž provedete pro i-tý sloupec; při d) postupujte obdobným způsobem.)

[6.1.B17]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ jsou lineárně nezávislé vektory a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé vektory z euklidovského prostoru V takové, že:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \qquad \text{pro každé } i = 1, \dots, r, \; j = 1, \dots, s.$$

Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé.

(Návod: při důkazu využijte výsledek cvičení [6.1.B15] a Cramerovo pravidlo.)

[6.1.B18]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V a nechť $b_1, \dots, b_n$ jsou pevně zvolená nenulová reálná čísla. Dokažte, že potom existuje právě jedna báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ euklidovského prostoru V, splňující podmínky:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} b_j & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases} \qquad \text{pro každé } i, j = 1, \dots, n.$$

(Návod: žádané vektory hledejte ve tvaru: $\mathbf{e}_j = x_{j1}\mathbf{u}_1 + \dots + x_{jn}\mathbf{u}_n$ a požadujte splnění podmínek zadání. Použijte Cramerovo pravidlo a výsledek cvičení [6.1.B15].)

§2: ORTOGONÁLNOST

[6.2.A1]. U.p. báze euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$, která je ortogonální a není ortonormální.

[6.2.A2]. U.p. dvou různých ortonormálních bází euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$.

[6.2.A3]. U.p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbf{R}^3$, ale nejsou bází $\mathbf{R}^3$.

[6.2.A4]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ jsou nenulové ortogonální vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R}^n$. Uveďte, co všechno lze pak říci o čísle n.

[6.2.A5]. Nechť $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ jsou vektory získané z vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Uveďte, kolik z vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ je nulových.

[6.2.A6]. U.p. ortogonálních množin A, B v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že A je konečná množina a B je nekonečná množina.

[6.2.A7]. U.p. netriviálního podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

[6.2.A8]. U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ tak, aby platilo, že $\dim W = \dim W^\perp$.

[6.2.A9]. U.p. podprostoru W euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$ do podprostoru W byl nulový vektor.

[6.2.A10]. ~~U~~ Uveďte příklad podmínky, která

a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná

pro to, aby podmnožiny A, B euklidovského prostoru $\mathbf{R}^3$ byly ortogonální.

♣ ♣ ♣

[6.2.B1]. Rozhodněte, zda dané vektory euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální:

a) $(1,-2,2,1)$, $(1,3,2,1)$, $(-1,0,1,-1)$

b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $(2,3,-3,-4)$, $(-1,3,-3,4)$, $(3,1,3,0)$

d) $(1,3,1,2)$, $(0,0,0,0)$, $(1,-3,2,3)$.

[6.2.B2]. Určete parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby dané vektory euklidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ byly ortogonální:

a) $(1,1,2,0,0)$, $(1,-1,0,1,a)$, $(1,b,2,3,-2)$

b) $(2,-1,0,a,b)$, $(a,b,0,-2,1)$, $(a,2b,5,b,-a)$

c) $(1,-2,a,3,0)$, $(-1,1,0,a,7)$, $(1,-2,b,3,0)$, $(0,b,-1,1,8)$

d) $(1,2,0,2,1)$, $(0,0,0,0,0)$, $(-5,2,5,-2,5)$, $(a,b,0,b,a)$.

[6.2.B3]. **V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ nalezněte všechny normované vektory, které jsou ortogonální k vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, je-li:**

$$\mathbf{u} = (1,1,1,1), \quad \mathbf{v} = (1,-1,-1,1), \quad \mathbf{w} = (2,1,1,3).$$

[6.2.B4]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ je skalární součin definován:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\,dt \;.$$

Rozhodněte, zda pak zadané vektory (tj. polynomy) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ tvoří bázi, resp. ortogonální bázi, resp. ortonormální bázi tohoto euklidovského prostoru, je-li:

a) $\mathbf{f}_1 = 2x\;,\quad \mathbf{f}_2 = 3x^2-1\;,\quad \mathbf{f}_3 = 3$

b) $\mathbf{f}_1 = x^2-2x+1\;,\quad \mathbf{f}_2 = 5x^2+2x-1\;,\quad \mathbf{f}_3 = 2x+1$

c) $\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\;,\quad \mathbf{f}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\;,\quad \mathbf{f}_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1)$

d) $\mathbf{f}_1 = 5x^2+2x-1\;,\quad \mathbf{f}_2 = x^2-2x+1\;,\quad \mathbf{f}_3 = x^2+4x-2.$

[6.2.B5]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$. Dokažte, že pak platí:

a) $\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \iff \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$

b) $\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \iff \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\perp(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \iff \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|.$

[6.2.B6]. Nechť $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ je ortogonální báze euklidovského prostoru V a nechť $t_1,\dots,t_n$ jsou libovolná nenulová reálná čísla.
Dokažte, že pak $t_1\cdot\mathbf{u}_1,\dots,\,t_n\cdot\mathbf{u}_n$ je také ortogonální báze prostoru V.

[6.2.B7]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, je-li:

a) $V=\mathbf{R}^4$; $W=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,2,2,-1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,-5,3)$, $\mathbf{u}_3=(3,2,8,-7)$

b) $V=\mathbf{R}^4$; $W=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,0,1,0)$, $\mathbf{u}_2=(0,1,0,-7)$, $\mathbf{u}_3=(3,-2,3,14)$

c) $V=\mathbf{R}^4$; $W=L(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,1,-1)$, $\mathbf{u}_3=(1,-1,-1,1)$,
$\mathbf{u}_4=(-1,1,1,1)$

d) $V=\mathbf{R}^5$; $W=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,-2,-1,0,1)$, $\mathbf{u}_2=(2,3,0,-2,3)$,
$\mathbf{u}_3=(1,1,-2,-1,-1)$, $\mathbf{u}_4=(1,-6,-4,1,-2)$

e) $V=\mathbf{R}^5$; $W=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,2,0,1,2)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,3,0,1)$, $\mathbf{u}_3=(1,3,-3,2,3)$,
$\mathbf{u}_4=(1,-1,9,-2,-1)$

f) $V=\mathbf{R}^5$; $W=L(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1=(1,-1,0,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,-1,1,0,-1)$, $\mathbf{u}_3=(1,+2,-2,0,0)$,
$\mathbf{u}_4=(1,-4,1,3,4)$

g) $V=\mathbf{R}^4$; W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+\;\,x_3+3x_4 &= 0\\ 5x_1+6x_2-2x_3+9x_4 &= 0\\ 3x_1+\;\,x_2-3x_3+6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

h) $V=\mathbf{R}^5$; W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1-\;\,x_2+\;\,x_3\qquad\quad -2x_5 &= 0\\ 2x_1+7x_2+4x_3+5x_4+8x_5 &= 0\\ 3x_1+5x_2+7x_3+5x_4+6x_5 &= 0\\ 4x_1+4x_2+8x_3+5x_4+4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B8]. V reálném vektorovém prostoru V je definován skalární součin. V takto získaném euklidovském prostoru nalezněte nějakou ortogonální bázi. Přitom:

a) $V=\mathbf{R}^2$; pro $\forall\,\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ definujeme
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+3u_2v_2$

b) $V=\mathbf{R}^3$; pro $\forall\,\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ definujeme
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1+2u_2v_2+3u_3v_3-u_2v_3-u_3v_2$

c) $V=\mathbf{R}_2[x]$, pro $\forall\,\mathbf{f},\mathbf{g}\in\mathbf{R}_2[x]$ definujeme $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt$

d) $V=\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$; pro $\forall A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$ definujeme
$A\cdot B = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4.$

[6.2.B9]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$. Ukažte, že vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru $\mathbf{R}^4$. Přitom :

a) $\mathbf{u}_1=(1,-2,2,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,3,2,1)$

b) $\mathbf{u}_1=(2,3,-3,-4)$, $\mathbf{u}_2=(-1,3,-3,4)$

c) $\mathbf{u}_1=(1,7,7,1)$, $\mathbf{u}_2=(-1,7,-7,1)$

d) $\mathbf{u}_1=(1,-3,2,3)$, $\mathbf{u}_2=(1,3,1,2)$

[6.2.B10]. Sestrojte ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$, jsou-li dány její vektory:

a) $\mathbf{e}_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right)$

b) $\mathbf{e}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},-\frac{5}{6}\right)$

c) $\mathbf{e}_1=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$, $\mathbf{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$.

[6.2.B11]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je definován skalární součin takto: pro libovolné vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ je:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \ ,$$

V tomto euklidovském prostoru pak nalezněte ortogonální bázi podprostoru

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$

která

a) obsahuje vektor (1,1,0)
b) obsahuje nějaký vektor z podprostoru U, kde U je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B12]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V; nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, přičemž:

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\,\mathbf{u}_n \ , \qquad \mathbf{y} = y_1\,\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\,\mathbf{u}_n \ .$$

Dokažte, že pak následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$
(ii) báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je ortonormální.

[6.2.B13]. Nechť $W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$ je daný podprostor v euklidovském prostoru V. Dokažte, že pak platí:

$$\mathbf{x} \in W^\perp \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_1 \ \wedge \ldots \wedge \ \mathbf{x} \perp \mathbf{u}_k \ .$$

(jinak řečeno: vektor leží v ortogonálním doplňku podprostoru W právě když je ortogonální k libovolným generátorům tohoto podprostoru W.)

[6.2.B14]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ nechť je dán podprostor W jako množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \ \ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Dokažte, že potom $W^\perp = [(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})]$.

[6.2.B15]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ je dán podprostor W. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(2r + t, -3r + s - t, 4r + 3t, 8r + 5t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (3, -5, 4, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 2, -3)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 0, 7)$

c) $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde
$\mathbf{u}_1 = (3, 2, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 1)$,
$\mathbf{u}_4 = (2, 3, -1, 1)$

d) W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 - 9x_4 &= 0 \\ x_3 + \ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B16]. V euklidovském prostoru $\mathbf{R}^5$ je dán podprostor W. Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$

b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, kde
$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 2, 1, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -1, -1, 2)$,
$\mathbf{u}_3 = (1, -7, 12, 7, -19)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 5, -8, -5, 13)$

c) $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, -1, 0)$,
$\mathbf{u}_2 = (1, -1, -1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (-1, 0, -1, 1, 1)$

d) W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

[6.2.B17]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je definován skalární součin takto: pro libovolné vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 6u_3v_3 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 .$$

V tomto euklidovském prostoru pak nalezněte ortogonální bázi podprostoru $W^\perp$, je-li:

a) $W = \{(t, 2t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$
b) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, kde $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$.

[6.2.B18]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $\mathbf{u} = (3,-7,8)$; $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,1,-2)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,-1)$

b) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (-2,2,2,5)$; $W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (2,0,1,-1)$

c) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (2,7,-3,-6)$;
$W = \{(r+s\,, r+s\,, -r-3s\,, 2r+3s) \mid r,s \in \mathbf{R}\}$

d) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$; $W = [(0,1,0,1)]$

e) $V = \mathbf{R}^4$; $\mathbf{u} = (2,0,1,-4)$;
W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f) $V = \mathbf{R}^5$; $\mathbf{u} = (1,-4,1,-1,2)$; $W = L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, kde
$\mathbf{w}_1 = (1,-1,0,1,1)$, $\mathbf{w}_2 = (3,2,1,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (1,1,1,1,-1)$

[6.2.B19]. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{u}$ do podprostoru W, je-li:

a) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem definovaným:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt\,,$$

$\mathbf{u} = x^2 - 2x - 2$,
$W = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$, kde $\mathbf{f}_1 = 5x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{f}_2 = 4x - 1$

b) $V = \mathbf{R}_2[x]$, se skalárním součinem definovaným:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t)\, dt\,,$$

$\mathbf{u} = 2x^2 + 2x + 5$,
$W = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$, kde $\mathbf{f}_1 = 3x^2 - 1$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + 2$.

[6.2.B20]. V euklidovském prostoru V nechť jsou dány podprostory $W_1 = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k]$, $W_2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s]$. Dokažte, že pak platí:

$$W_1 \perp W_2 \iff \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ pro } \forall\, i,j\,.$$

[6.2.B21]. Nechť V je euklidovský prostor; nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory, resp. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory takové, že platí: $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{v}_j$, pro $\forall\, i,j$.
Dokažte, že pak:

$$\dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s] = r + s\,.$$

[6.2.B22]. Nechť ze zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ($k \geq 2$) dostaneme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu postupně vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$.
Dokažte, že pak pro $2 \leq i \leq k$ platí:

a) $\|\mathbf{e}_i\| \leq \|\mathbf{u}_i\|$

b) $\mathbf{e}_i = \mathbf{o} \iff \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]$

c) $\mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i \iff \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]^\perp$

d) $\mathbf{e}_i$ je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u}_i$ na podprostor $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]^\perp$.

[6.2.B23]. Nechť ze zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ($k \geq 2$) dostaneme pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu postupně vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$.
Dokažte, že pak Gramovy determinanty vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ a vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ (viz cvičení [6.1.B15]) jsou si rovny, tj.

$$G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k).$$

(Návod: využijte toho, že pro $i = 2, \dots, k$ lze psát (proč?)

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i + t_{i1}\,\mathbf{u}_1 + \dots + t_{i,i-1}\,\mathbf{u}_{i-1}\,.$$

S využitím tohoto faktu počítejte $G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ tak, že postupně upravujete řádky (počínaje posledním) a potom analogicky upravujete sloupce.)

[6.2.B24]. Nechť V je euklidovský prostor, nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$. Dokažte, že platí:

$$G(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \geq 0$$

tzn. Gramův determinant libovolných vektorů je vždy nezáporné číslo.

(Návod: využijte výsledku předchozího cvičení.)

KAPITOLA 7:

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

§1: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

[7.1.A1]. U.p. injektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.1.A2]. U.p. surjektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.1.A3]. U.p. bijektivního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, které není lineárním zobrazením.

[7.1.A4]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ takového, že platí : $\varphi((1,0,0)) = (1,0)$ a $\varphi((2,0,0)) = (0,2)$.

[7.1.A5]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$, jehož defekt je 2.

[7.1.A6]. U.p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ takového, že je $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,3,4), (4,3,2,1)]$.

[7.1.A7]. Nechť $\varphi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení, jehož defekt je 4 a hodnost je 5. Uveďte, co všechno lze pak říci o číslech k , n .

[7.1.A8]. U.p. izomorfizmu $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}_3[x]$.

[7.1.A9]. U.p. tří různých vektorových prostorů, které jsou navzájem izomorfní.

[7.1.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ bylo injektivní.

♣ ♣ ♣

[7.1.B1]. Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení. Dokažte, že φ je lineární zobrazení právě když platí :

$$\varphi(t\cdot\mathbf{u} + s\cdot\mathbf{v}) = t\cdot\varphi(\mathbf{u}) + s\cdot\varphi(\mathbf{v}) \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V,\ \forall\, t,s \in T.$$

[7.1.B2]. Rozhodněte, zda φ je lineární zobrazení, resp. injektivní lineární zobrazení, resp. surjektivní lineární zobrazení, je-li:
a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 + 3x_2 , 4x_3 + 5)$
b) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, kde $\varphi((x_1,x_2)) = (2x_1 + x_2 , x_2 , x_2 - x_1)$
c) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
d) $\varphi : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$, kde $\varphi((z_1,z_2,z_3)) = (0 , 2z_1 + iz_3 , z_2 + z_3)$
e) $\varphi : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}_3[x]$, kde $\varphi(ax^2 + bx + c) = 3ax^3 + 2bx^2 + cx$
f) $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi(A) = (0 , \det A)$.

[7.1.B3]. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi : V \to V$ je lineárním zobrazením, jestliže pro $\forall\, \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$ je:
a) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)\mathbf{u}_2 + x_2\mathbf{u}_3$ b) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 + (x_1 - x_2)\mathbf{u}_2 + x_1\mathbf{u}_3$
c) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3)\cdot(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$
d) $\varphi(\mathbf{x}) = |x_1|\cdot\mathbf{u}_1 + |x_2|\cdot\mathbf{u}_2 + |x_3|\cdot\mathbf{u}_3$.

[7.1.B4]. Pro zadané lineární zobrazení φ nalezněte jeho jádro $\operatorname{Ker} \varphi$ a obraz $\operatorname{Im} \varphi$. Přitom:
a) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+x_2 , x_2+x_3 , x_3+x_1 , x_1)$
b) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + x_2 , x_2 + x_3)$
c) $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
d) $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, kde $\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) =$
$(3x_1-x_2+2x_3-x_4 , 5x_1+2x_2+3x_3 , 2x_1+3x_2+x_3+x_4)$
e) $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, kde φ je zadáno určením obrazů báze:
$\varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$,
$\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$
f) $\varphi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$, kde φ je zadáno určením obrazů báze:
$\varphi((1,0,0,0,0)) = (1,2,1)$, $\varphi((1,1,0,0,0)) = (-1,1,0)$,
$\varphi((1,1,1,0,0)) = (1,5,2)$, $\varphi((1,1,1,1,0)) = (0,3,1)$,
$\varphi((1,1,1,1,1)) = (2,1,1)$
g) $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{2n}$, kde $\varphi((x_1,x_2)) = (x_1 , x_2 , x_1 , x_2 , \ldots , x_1 , x_2)$
h) $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$,
kde $\varphi((x_1,x_2,\ldots,x_n)) = (x_1 , x_1+x_2 , \ldots , x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

[7.1.B5]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n-1}[x]$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \cdots + 2\, a_2\, x + a_1 \,.$$

Potom:

a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda zobrazení φ je injektivní, resp. surjektivní
c) určete defekt a hodnost lineárního zobrazení φ
d) nalezněte bázi jádra Ker φ.

[7.1.B6]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_{n+1}[x]$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0\, x \,.$$

Potom:

a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda zobrazení φ je injektivní, resp. surjektivní
c) určete defekt a hodnost lineárního zobrazení φ
d) nalezněte bázi jádra Ker φ.

[7.1.B7]. Lineární zobrazení $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^2$ je zadáno určením obrazů pevné báze takto:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (2,1) \quad , \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1,1)$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,1) \quad , \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,-1) .$$

Potom:

a) nalezněte obecný předpis pro zobrazení φ
b) popište množinu Ker φ a množinu Im φ
c) nalezněte bázi jádra Ker φ a bázi obrazu Im φ
d) nalezněte všechny matice X, pro něž je $\varphi(X) = (1,1)$.

[7.1.B8]. Zobrazení $\varphi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}^{n+1}$ je definováno takto: pro $\mathbf{f} \in \mathbf{R}_n[x]$ položíme

$$\varphi(\mathbf{f}) = (\, f(1)\,,\, f'(1)\,,\, f''(1)\,,\, \ldots\,,\, f^{(n)}(1)\,)$$

(kde $f^{(i)}(1)$ značí i-tou derivaci polynomu $\mathbf{f}$ v bodě 1). Potom:

a) dokažte, že φ je lineární zobrazení
b) rozhodněte, zda φ je izomorfizmus.

[7.1.B9]. Rozhodněte, zda zadané vektorové prostory V a V' jsou izomorfní. Přitom:

a) $V = \mathbf{R}^2$, $V' = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$) b) $V = \mathbf{R}$ (nad $\mathbf{R}$) , $V' = \mathbf{K}$ (nad $\mathbf{R}$)
c) $V = \mathbf{R}^3$, $V' = \mathbf{Q}^3$ d) $V = \mathbf{R}^n$, $V' = \mathbf{R}_n[x]$
e) $V = \mathbf{R}_2[x]$, $V' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$
f) $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, $V' = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 = x_4\}$.

[7.1.B10]. Nechť V, V' jsou nenulové vektorové prostory nad T, nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z V, resp. nechť $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_k$ jsou libovolné vektory z V'. Potom dokažte, že

a) existuje lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že platí:

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}'_1 \,,\, \ldots \,,\, \varphi(\mathbf{u}_k) = \mathbf{v}'_k$$

b) toto lineární zobrazení φ je určeno jednoznačně $\iff$ dim $V = k$.

[7.1.B11]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru V. Dokažte, že platí:
φ je injektivní zobrazení $\iff$ $\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n)$ jsou lineárně nezávislé.

[7.1.B12]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je injektivní lineární zobrazení. Dokažte, že platí:

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé $\iff$ $\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé.

[7.1.B13]. Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad T a dále nechť $\varphi : V \to V'$ je izomorfizmus.
Dokažte, že pak $\varphi^{-1} : V' \to V$ je také izomorfizmus.

[7.1.B14]. Nechť $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V''$ jsou lineární zobrazení. Dokažte, že platí:

a) $\psi \circ \varphi$ je injektivní zobrazení $\iff$ φ je injektivní zobrazení a Im $\varphi \cap$ Ker $\psi = \{\mathbf{o}\}$
b) $\psi \circ \varphi$ je surjektivní zobrazení $\iff$ ψ je surjektivní zobrazení a Im φ + Ker $\psi = V'$.

[7.1.B15]. Nechť V, V' jsou dva vektorové prostory nad T takové, že je dim $V >$ dim V'. Nechť dále $\varphi : V \to V'$, $\psi : V' \to V$ jsou lineární zobrazení.
Dokažte, že pak zobrazení $\psi \circ \varphi$ není injektivní a není surjektivní.

[7.1.B16]. Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť W' je podprostor ve V'. Označme:

$$H = \{\mathbf{x} \in V \mid \varphi(\mathbf{x}) \in W'\} .$$

Dokažte, že H je podprostor vektorového prostoru V.

§2: LINEÁRNÍ TRANSFORMACE A JEJÍ MATICE

[7.2.A1]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$, která
a) není injektivní b) je injektivní a není surjektivní.

[7.2.A2]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že
a) $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$ b) $\operatorname{Im}\varphi = [(1,2,3),(4,5,6)]$.

[7.2.A3]. U.p. neidentické lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, že $\mathbf{R}^4 = \operatorname{Ker}\varphi \dotplus \operatorname{Im}\varphi$.

[7.2.A4]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru V tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, přičemž
a) $V = \mathbf{R}^4$ b) $V = \mathbf{R}^5$.

[7.2.A5]. U.p. dvou lineárních transformací φ, ψ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, že $\varphi + \psi$ je identická transformace prostoru $\mathbf{R}^3$.

[7.2.A6]. U.p. vektorového prostoru V tak, aby vektorový prostor $\mathcal{L}(V)$ všech lineárních transformací prostoru V měl dimenzi
a) $\dim \mathcal{L}(V) = 8$ b) $\dim \mathcal{L}(V) = 9$.

[7.2.A7]. U.p. dvou různých matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které jsou maticemi téže lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$.

[7.2.A8]. U.p. dvou matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, které jsou podobné a mají různé charakteristické polynomy.

[7.2.A9]. U.p. dvou matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, které nejsou podobné a mají stejnou hodnost.

[7.2.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby lineární transformace φ vektorového prostoru V byla bijektivním zobrazením.

♣ ♣ ♣

[7.2.B1]. Nechť V je vektorový prostor (nad T); nechť $t_0 \in T$ je pevný prvek.
Dokažte, že zobrazení $\varphi : V \to V$ definované:

$$\varphi(\mathbf{u}) = t_0 \cdot \mathbf{u}, \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in V$$

je lineární transformací prostoru V.

[7.2.B2]. Nechť V je jednodimenzionální vektorový prostor (nad T) a nechť φ je lineární transformace prostoru V.
Dokažte, že pak existuje číslo $t_0 \in T$ tak, že platí:

$$\varphi(\mathbf{u}) = t_0 \cdot \mathbf{u}, \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in V.$$

[7.2.B3]. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je báze vektorového prostoru V (nad T). Nechť φ je lineární transformace prostoru V, zadaná určením obrazů této báze:

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2, \quad \varphi(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \quad \varphi(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2.$$

Potom:
a) nalezněte bázi $\varphi(V)$
b) nalezněte dva dvoudimenzionální podprostory W_1, resp. W_2 ve V tak, že platí:

$$\varphi(W_1) = W_1, \quad \text{resp.} \quad \varphi(W_2) \not\subseteq W_2.$$

[7.2.B4]. Lineární transformace $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ je definována vztahem:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, je-li:
a) $\mathbf{u}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,1,0)$
b) $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,-1)$
c) $\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,2)$.

[7.2.B5]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V je zadána určením obrazů pevné báze. Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $\varphi((2,3,5)) = (1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,1,-1)$, $\varphi((1,0,0)) = (2,1,2)$;
$\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$

b) $V = \mathbf{R}^3$, $\varphi((2,4,1)) = (0,5,1)$, $\varphi((-1,3,-2)) = (-5,1,1)$, $\varphi((3,-1,4)) = (7,3,-1)$;
$\mathbf{u}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,2)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$, $\varphi(x^2 + x + 1) = x^2 + x$, $\varphi(x + 1) = 4x^2 + 3x + 6$, $\varphi(x^2 + 1) = 2x^2 + x + 3$;
$\mathbf{u}_1 = 2x^2 + 2x + 3$, $\mathbf{u}_2 = 2x^2 + 4x + 5$, $\mathbf{u}_3 = x^2 + 3x + 3$.

[7.2.B6]. Je dána pevná matice $A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definujeme dvě zobrazení φ, resp. $\psi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takto:

$$\varphi(X) = A \cdot X \ , \quad \text{resp. } \psi(X) = X \cdot A \ , \qquad \text{pro } \forall\, X \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R}) .$$

Potom:

a) dokažte, že φ, resp. ψ je lineární transformace vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$

b) nalezněte matici lineární transformace φ v bázi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) nalezněte matici lineární transformace ψ v bázi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B7]. Definujeme zobrazení φ, resp. $\psi : \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x]$ takto:

$$\varphi(f(x)) = f'(x) \ , \quad \text{resp. } \psi(f(x)) = x \cdot f'(x) \ , \qquad \text{pro } \forall\, f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$$

kde $f'(x)$ značí derivaci polynomu $f(x)$.
Potom:

a) dokažte, že φ, resp. ψ je lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}_n[x]$

b) nalezněte matici lineární transformace φ, resp. matici lineární transformace ψ v bázi $1, x, x^2, \dots, x^n$.

[7.2.B8]. Nechť lineární transformace φ vektorového prostoru V má v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matici A.
Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$;

$\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)$;

$\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,-1,1)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $V = \mathbf{R}^3$;

$\mathbf{u}_1 = (8,-6,7)$, $\mathbf{u}_2 = (-16,7,-13)$, $\mathbf{u}_3 = (9,-3,7)$;

$\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (3,-1,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,1,2)$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$;

$\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_2 = x$, $\mathbf{u}_3 = x^2$;

$\mathbf{v}_1 = -x^2 + x$, $\mathbf{v}_2 = x^2 - x + 1$, $\mathbf{v}_3 = x - 1$;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B9]. Je dána lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ (určením obrazů pevné báze) a dále je dán vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$.
Nalezněte všechny vektory $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ s vlastností: $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, je-li:

a) $\varphi((1,1,1)) = (2,2,6)$, $\varphi((2,-1,0)) = (1,-3,-1)$,
$\varphi((1,2,3)) = (3,7,13)$;
$\mathbf{u} = (1,3,5)$

b) $\varphi((3,-3,2)) = (0,-1,1)$, $\varphi((2,1,-1)) = (3,0,3)$,
$\varphi((-4,0,3)) = (-4,3,-7)$;
$\mathbf{u} = (1,2,1)$

c) $\varphi((1,1,1)) = (1,1,0)$, $\varphi((1,1,0)) = (1,0,-1)$,
$\varphi((1,0,0)) = (2,3,-1)$;
$\mathbf{u} = (2,1,1)$.

[7.2.B10]. Nalezněte jádro $\mathrm{Ker}\,\varphi$ a obraz $\mathrm{Im}\,\varphi$ dané lineární transformace φ vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$; $\varphi((1,-1,2)) = (-3,0,9)$, $\varphi((2,1,3)) = (4,0,-12)$,
$\varphi((-1,0,2)) = (-4,0,12)$

b) $V = \mathbf{R}^3$;
$\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (3x_1 + x_2 + 2x_3 \ , \ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ , \ 2x_1 + x_3)$

c) $V = \mathbf{R}_2[x]$;
$\varphi(ax^2+bx+c) = (4a - 5b + 2c)x^2 + (5a - 7b + 3c)x + (6a - 9b + 4c)$.

[7.2.B11]. Nechť lineární transformace φ vektorového prostoru V (nad $\mathbf{Q}$) má v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ matici

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ a & 2a & 3a \\ 16 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Potom:

a) v závislosti na parametru $a \in \mathbf{Q}$ nalezněte $\dim \operatorname{Ker} \varphi$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi$

b) pro hodnotu $a = 3$ nalezněte bázi $\operatorname{Ker} \varphi$ a bázi $\operatorname{Im} \varphi$.

[7.2.B12]. Nalezněte automorfizmus φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, pro který platí:

$$\varphi = \varphi^{-1} \quad \wedge \quad \varphi((0,0,1)) = (0,0,1) \quad \wedge \quad \varphi((2,3,1)) = (1,0,2).$$

[7.2.B13]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, definované:

$$\varphi((x_1,x_2)) = (2x_1 + x_2\,,\, x_1 - x_2)\,, \qquad \psi((x_1,x_2)) = (x_1\,,\, x_1 + 3x_2).$$

Potom:

a) definujte lineární transformaci $\varphi + \psi$, resp. $\varphi \circ \psi$, resp. $\psi \circ \varphi$, resp. $3 \cdot \varphi$

b) nalezněte matici lineární transformace φ, resp. ψ, resp. $\varphi + \psi$, resp. $\varphi \circ \psi$, resp. $\psi \circ \varphi$, resp. $3 \cdot \varphi$ v bázi $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3)$.

[7.2.B14]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ takové, že φ má v bázi $\mathbf{u}_1 = (1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,3)$ matici A, resp. ψ má v bázi $\mathbf{v}_1 = (3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (4,2)$ matici B.
Nalezněte matici C lineární transformace $\varphi + \psi$ v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

[7.2.B15]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace prostoru $\mathbf{R}^2$ takové, že φ má v bázi $\mathbf{u}_1 = (2,7)$, $\mathbf{u}_2 = (1,3)$ matici A, resp. ψ má v bázi $\mathbf{v}_1 = (6,7)$, $\mathbf{v}_2 = (5,6)$ matici B.
Nalezněte matici C lineární transformace $\varphi \circ \psi$ v bázi $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, je-li:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

[7.2.B16]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V s vlastností: $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
Dokažte, že potom platí: $V = \operatorname{Ker} \varphi \dotplus \operatorname{Im} \varphi$.
(Návod: využijte toho, že: $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.)

[7.2.B17]. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$ je báze vektorového prostoru V.
Dokažte,že posloupnost lineárních transformací $\varphi_{ij} : V \to V$, definovaných pro $\forall\, i,j = 1,\ldots,n$ takto:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{pro } k = j \\ \mathbf{o} & \text{pro } k \neq j \end{cases} \qquad \text{kde } k = 1,\ldots,n$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V).

[7.2.B18]. Nechť W je podprostor vektorového prostoru V (nad T), přičemž $\dim V = n$, $\dim W = k$. Nechť

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{L}(V) \mid \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \text{ pro } \forall\, \mathbf{x} \in W\}.$$

Potom:

a) dokažte, že $\mathcal{H}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V)

b) určete dimenzi podprostoru $\mathcal{H}$.

[7.2.B19]. Nechť α je pevná lineární transformace vektorového prostoru V (nad T).
Dokažte, že zobrazení $F : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ definované:

$$F(\varphi) = \alpha \circ \varphi\,, \qquad \text{pro } \forall\, \varphi \in \mathcal{L}(V)$$

je lineární transformací vektorového prostoru $\mathcal{L}(V)$ (tj. vektorového prostoru všech lineárních transformací prostoru V).

[7.2.B20]. Rozhodněte, zda dané matice $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ jsou podobné, je-li:

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7.2.B21]. Jsou dány podobné matice $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$.
Nalezněte nějakou regulární matici S tak, aby platilo: $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, je-li:

a) $$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$$

[7.2.B22]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ jsou podobné matice. Dokažte, že:

a) A^n, B^n jsou podobné matice (pro libovolné přirozené n)

b) jsou-li A, B navíc regulární, pak A^{-1}, B^{-1} jsou podobné matice.

[7.2.B23]. Nechť $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$, kde $n \geq 2$. Pak:

a) dokažte, že je-li alespoň jedna z matic A, B regulární, pak matice $A \cdot B$ a matice $B \cdot A$ jsou podobné

b) rozhodněte, zda předchozí tvrzení platí i v případě, že obě matice A, B jsou singulární.

[7.2.B24]. Je dána matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$. Určete charakteristický polynom matice A a nalezněte jeho kořeny (ležící v T), je-li:

a) $T = \mathbf{R}\,, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $T = \mathbf{K}\,, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $T = \mathbf{R}\,, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ d) $T = \mathbf{R}\,, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

[7.2.B25]. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ je horní trojúhelníková matice (tzn. platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$).
Dokažte, že pak diagonální prvky matice A jsou kořeny jejího charakteristického polynomu.

[7.2.B26]. Nechť je dána matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$.
Dokažte, že matice A a k ní transponovaná matice A' mají stejné charakteristické polynomy.

§3: VLASTNÍ VEKTORY A VLASTNÍ HODNOTY LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

[7.3.A1]. U.p. podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby W byl invariantním podprostorem vzhledem ke každé lineární transformaci prostoru $\mathbf{R}^4$.

[7.3.A2]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}_4[x]$ tak, aby každý podprostor v $\mathbf{R}_4[x]$ byl invariantní vzhledem k φ.

[7.3.A3]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ tak, aby jedinými invariantními podprostory vzhledem k φ byly triviální podprostory.

[7.3.A4]. U.p. nenulové lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby podprostor $W = [(1,2,3), (4,5,6)]$ byl invariantní vzhledem k φ.

[7.3.A5]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ a invariantních podprostorů W_1, W_2 tak, aby jejich součet $W_1 + W_2$ nebyl invariantním podprostorem vzhledem k φ.

[7.3.A6]. U.p. vektorového prostoru V a jeho lineární transformace φ takové, že φ nemá žádný vlastní vektor.

[7.3.A7]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$, která má právě 3 různé vlastní hodnoty.

[7.3.A8]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, která má právě 3 různé vlastní hodnoty.

[7.3.A9]. U.p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ tak, aby vektory $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ byly vlastními vektory φ, příslušnými navzájem různým vlastním hodnotám.

[7.3.A10]. U.p. podmínky, která je nutná, ale nikoliv dostatečná pro to, aby vektor $\mathbf{u} \in V$ byl vlastním vektorem lineární transformace φ prostoru V.

♣ ♣ ♣

[7.3.B1]. Lineární transformace φ prostoru $\mathbf{R}^4$ je v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ dána maticí

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozhodněte, zda podprostor W je invariantní vzhledem k φ, je-li:

a) $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$

b) $W = [2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4]$.

[7.3.B2]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) a nechť W je invariantní podprostor vzhledem k φ. Označme.:

$$U = \{\mathbf{x} \in V \mid \varphi(\mathbf{x}) \in W\}\ .$$

Dokažte, že pak $\varphi(W)$ a U jsou podprostory ve V, které jsou invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B3]. Nechť φ je automorfizmus (tj. bijektivní lineární transformace) vektorového prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ. Dokažte, že pak:

a) $\varphi(W) = W$

b) W je invariantní podprostor vzhledem k lineární transformaci φ^{-1}.

(Návod: při a) nejprve dokažte, že $\dim \varphi(W) = \dim W$.)

[7.3.B4]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V nad $\mathbf{K}$ je dána maticí A (v pevné bázi).
Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory (vyjádřené souřadnicemi v této bázi) lineární transformace φ, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[7.3.B5]. Nechť φ značí lineární transformaci derivování ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_n[x]$, tzn. platí :

$$\varphi(f(x)) = f'(x)\,, \qquad \text{pro každé } f(x) \in \mathbf{R}_n[x]\,.$$

Potom nalezněte:
a) charakteristický polynom lineární transformace φ
b) vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace φ.

[7.3.B6]. Nechť V je vektorový prostor (nad T) a nechť φ je lineární transformace prostoru V. Dokažte, že pak platí:
každý nenulový vektor z V je vlastním vektorem lineární transformace $\varphi \iff \exists\, t_0 \in T :\ \varphi = t_0 \cdot id_V$.

[7.3.B7]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť λ_0 je vlastní hodnota φ.
Dokažte, že pak množina W všech vlastních vektorů φ, příslušných vlastní hodnotě λ_0, spolu s nulovým vektorem tvoří podprostor ve V, který je navíc invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B8]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou vlastní vektory této lineární transformace.
Dokažte, že pak podprostor $W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$ je invariantním podprostorem vzhledem k φ.

[7.3.B9]. Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ je v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dána maticí $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Nalezněte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$, které jsou invariantní vzhledem k φ.

[7.3.B10]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V; nechť $\mathbf{u}_1$, resp. $\mathbf{u}_2$ jsou vlastní vektory transformace φ, příslušné k různým vlastním hodnotám λ_1, resp. λ_2.
Dokažte, že potom vektor $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ není vlastním vektorem φ.
(Návod: důkaz veďte sporem; využijte toho, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou lineárně nezávislé.)

[7.3.B11]. Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V; nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ jsou vlastní vektory lineární transformace φ, příslušné k různým vlastním hodnotám.
Dokažte, že pak:
vektor $(t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_r\mathbf{u}_r)$ je vlastním vektorem $\varphi \iff$ právě jeden z koeficientů $t_1, \ldots, t_r$ je nenulový.

[7.3.B12]. Lineární transformace φ vektorového prostoru V nad $\mathbf{R}$ nechť je dána maticí A (v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ prostoru V).
Potom nalezněte všechny podprostory ve V, které jsou invariantní vzhledem k transformaci φ, je-li:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[7.3.B13]. Nechť lineární transformace φ n-dimenzionálního vektorového prostoru V má vlastní hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (přitom každá vlastní hodnota se počítá tolikrát, kolik je její násobnost). Nechť $A = (a_{ij})$ je matice lineární transformace φ.
Dokažte, že potom platí:
a) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$
b) $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$
c) lineární transformace $\varphi \circ \varphi$ má vlastní hodnoty $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

[7.3.B14]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) a nechť $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem φ i ψ.
Dokažte, že pak:
a) vektor $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem lineární transformace $t \cdot \varphi$ (pro libovolné $t \in T$)
b) vektor $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem lineární transformace $\varphi + \psi$.

[7.3.B15]. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru V (nad T) takového, že $\dim V = n \geq 2$. Nechť dále λ_1 je vlastní hodnota lineární transformace φ, resp. λ_2 je vlastní hodnota lineární transformace ψ.
Ukažte, že potom číslo $(\lambda_1 + \lambda_2)$ nemusí být vlastní hodnotou lineární transformace $\varphi + \psi$.

§4: ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ, ORTOGONÁLNÍ MATICE

Úmluva. Všude v této kapitole, ve všech příkladech o euklidovském prostoru $\mathbf{R}^n$ se předpokládá (není-li výslovně řečeno jinak), že skalární součin je v prostoru $\mathbf{R}^n$ definován "obvyklým způsobem", tzn. pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \ .$$

[7.4.A1]. U.p ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

[7.4.A2]. U.p. ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

[7.4.A3]. U.p. ortogonální transformace φ euklidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ tak, aby tato transformace φ nebyla surjektivním zobrazením.

[7.4.A4]. Uveďte, co všechno lze říci o dimenzích euklidovských prostorů V, V', víte-li, že nulové lineární zobrazení $\omega : V \to V'$ je ortogonálním zobrazením.

[7.4.A5]. U.p. euklidovského prostoru, který je izomorfní s euklidovským prostorem $\mathbf{R}^5$.

[7.4.A6]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_2[x]$ definujte dvěma různými způsoby skalární součin tak, aby vzniklé euklidovské prostory nebyly izomorfní.

[7.4.A7]. Vypište všechny ortogonální matice řádu 2 , jejichž prvky jsou celá čísla.

[7.4.A8]. U.p. ortogonálních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, takových, že $A \cdot B \neq B \cdot A$.

[7.4.A9]. U.p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou ortogonální, ale jejich součin $A \cdot B$ je ortogonální maticí.

[7.4.A10]. U.p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná d) není nutná ani dostatečná
pro to, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{R})$ byla ortogonální.

♣ ♣ ♣

[7.4.B1]. Nechť $\mathbf{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem, resp. $\mathbf{R}^2$ je euklidovský prostor, v němž je skalární součin definován takto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2\,x_1\,y_1 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_2\,y_2 \ .$$

Rozhodněte, zda zobrazení f je ortogonálním zobrazením, jestliže:

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2)) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_2 \,,\, \sqrt{2} \cdot x_1)$
b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 \,,\, x_3 \,,\, -x_2)$
c) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} \cdot (2x_1 - x_2 + 2x_3 \,,\, x_1 - 2x_2 - 2x_3 \,,\, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$
d) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (0\,, 0)$
e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, kde $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 \,,\, x_3)$
f) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, kde $f((x_1, x_2)) = (0\,,\, x_1 \,,\, x_1 + x_2)$.

[7.4.B2]. Nechť V, V' jsou euklidovské prostory, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení s vlastností:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \ .$$

Dokažte, že potom φ je lineární zobrazení.

(Návod: dokazujte, že:

$$(\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}))^2 = 0 \quad \wedge \quad (\varphi(t \cdot \mathbf{u}) - t \cdot \varphi(\mathbf{u}))^2 = 0$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a libovolné $t \in \mathbf{R}$.)

[7.4.B3]. Ukažte, že zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (kde $n \geq 2$) s vlastností:

$$\|\, \mathbf{u} \,\| = \|\, \varphi(\mathbf{u}) \,\| \qquad \text{pro } \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$$

nemusí obecně být lineárním zobrazením.

[7.4.B4]. Nechť V, V' jsou euklidovské prostory, nechť $\varphi : V \to V'$ je zobrazení, splňující podmínky:

(i) $\|\, \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}) \,\| = \|\, \mathbf{u} - \mathbf{v} \,\| \qquad$ pro $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(ii) $\|\, \varphi(\mathbf{o}) \,\| = 0$

Dokažte, že potom φ je lineární zobrazení.

(Návod: nejprve dokazujte, že $\|\, \varphi(\mathbf{u}) \,\| = \|\, \mathbf{u} \,\|$, potom dokazujte, že $\varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a využijte výsledku cvičení [7.4.B2].)

[7.4.B5]. Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ je báze euklidovského prostoru V a nechť φ je lineární transformace prostoru V taková, že pro vektory této dané báze platí

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) \qquad \text{pro } \forall\, i, j = 1, \dots, n .$$

Dokažte, že pak φ je ortogonální transformací prostoru V.

[7.4.B6]. Nechť V je jednodimenzionální euklidovský prostor a nechť φ je ortogonální transformace prostoru V.
Dokažte, že pak:

$$\text{buď je } \varphi = \mathrm{id}_V \quad \text{nebo} \quad \text{platí } \varphi(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}, \quad \text{pro } \forall\, \mathbf{x} \in V .$$

[7.4.B7]. Nechť φ, ψ jsou ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť $t \in \mathbf{R}$.
Dokažte, že pak:
a) $\varphi \circ \psi$ je ortogonální transformace prostoru V
b) $t \cdot \varphi$ je ortogonální transformace prostoru $V \iff t = \pm 1$.

[7.4.B8]. Nechť φ je ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ. Dokažte, že pak platí: $\varphi(W) = W$.

[7.4.B9]. Nechť φ je ortogonální transformace euklidovského prostoru V a nechť W je podprostor ve V, který je invariantní vzhledem k φ. Dokažte, že pak podprostor $W^{\perp}$ je též invariantní vzhledem k φ.

[7.4.B10]. Nechť $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že matice A je ortogonální právě když pro každé $i, j = 1, \dots, n$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j \\ 0 & \text{je-li } i \neq j \end{cases}$$

[7.4.B11]. Nechť $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$. Dokažte, že když matice A má dvě z následujících tří vlastností:

(i) A je symetrická matice
(ii) A je ortogonální matice
(iii) $A^2 = E_n$

potom má i vlastnost třetí.

[7.4.B12]. Nechť matice $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ je kososymetrická matice (tzn. $A' = -A$) a nechť matice $(E_n - A)$ a $(E_n + A)$ jsou regulární. Dokažte, že potom:

a) matice $(E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}$ je ortogonální
b) matice $(E_n + A) \cdot (E_n - A)^{-1}$ je ortogonální.

(Návod: nejprve ukažte, že matice $(E_n + A)$ a $(E_n - A)^{-1}$ jsou zaměnitelné, resp. matice $(E_n - A)$ a $(E_n + A)^{-1}$ jsou zaměnitelné a při vlastním důkazu ortogonálnosti tuto skutečnost využijte.)

[7.4.B13]. Rozhodněte, zda daná matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ je ortogonální:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ b) $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{4-\sqrt{2}}{6} & 0 & \frac{4+\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$

[7.4.B14]. Určete čísla $r, s, t \in \mathbf{R}$ tak, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ byla ortogonální a potom spočtěte determinant $\det A$. Přitom:

a) $A = \begin{bmatrix} r & 0 & 2s \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & t & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -r & -\frac{1}{\sqrt{2}} & s \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ r & s & t \end{bmatrix}$

[7.4.B15]. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je dána báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ a báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Rozhodněte, zda matice přechodu A od báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ k bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je ortogonální. Je nutné přitom matici A počítat?

a) $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
$\mathbf{v}_1 = (\frac{4+\sqrt{2}}{6}, \frac{1-2\sqrt{2}}{6}, \frac{1-2\sqrt{2}}{6})$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{4-\sqrt{2}}{6}, \frac{1+2\sqrt{2}}{6}, \frac{1+2\sqrt{2}}{6})$,
$\mathbf{v}_3 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathbf{u}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
$\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

III. VÝSLEDKY A NÁVODY K ŘEŠENÍ

KAPITOLA 1:

OPAKOVÁNÍ A DOPLNĚNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

§1: ZÁKLADNÍ LOGICKÉ POJMY

[1.1.A1]. Neexistuje. **[1.1.A2]**. Neexistuje. **[1.1.A4]**. Neexistuje. **[1.1.A6]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.1.B1]. a) není výrok, b) je výrok, nepravdivý, c) není výrok, d) není výrok.

[1.1.B2]. a) $A \Longrightarrow \neg C$, b) $(\neg A \wedge B) \Longrightarrow C$,
c) $\neg B \Longrightarrow (\neg A \vee \neg C)$, d) $B \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg C)$.

[1.1.B3]. A nepravdivý výrok, B pravdivý výrok, C nepravdivý výrok; dále je: a) pravdivý výrok, b) nepravdivý výrok, c) pravdivý výrok, d) pravdivý výrok.

[1.1.B4]. Návod: sestrojte tabulky pravdivostních hodnot pro oba výroky.

[1.1.B5]. a) implikace, b) konjunkce.

[1.1.B6]. Návod: důkazy veďte tak, že vždy sestrojíte tabulku pravdivostních hodnot.

[1.1.B7]. Obor pravdivosti dané výrokové formy je:
a) $(-2, \frac{4}{3})$, b) $\emptyset$, c) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, d) $\mathbf{R}$.

[1.1.B8]. a) "Nenapsal to ani Petr ani Pavel",
b) "Dnes nebude pršet nebo zítra bude svítit slunce",

c) "Budu se učit a zkoušku z algebry neudělám",
d) "Budu mít volno a nepůjdu ani do kina ani do divadla".

[1.1.B9]. a) "Existuje kulička ležící na tomto stole, která je modrá",
b) "Žádné celé číslo není sudé nebo alespoň jedno celé číslo je liché",
c) "Existují kladná reálná čísla r, s tak, že $r \geq r{\cdot}s$",
d) "Pro všechna celá čísla $t_1, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, platí, že $t_1 + \cdots + t_n \neq 0$",
e) "Existují přirozená čísla $a_1, \dots, a_n$, kde $n \geq 5$ a alespoň jedno z těchto čísel je větší než 5, tak, že $a_1 + \cdots + a_n \leq 10$",
f) "Pro všechna ryze imaginární čísla z_1, z_2, z_3 platí, že součin $z_1{\cdot}z_2{\cdot}z_3$ není číslo reálné".

[1.1.B11]. Návod: při přímém důkazu řešte a) i b) zvlášť pro n sudé a zvlášť pro n liché. Přitom u b) si uvědomte, že na levé straně je n sčítanců.

[1.1.B14]. Návod: uvědomte si, že v 1.kroku matematické indukce je nutné dokázat daný vztah pro $n = 1$ a $n = 2$ (proč?).

[1.1.B15]. Návod: použijte vztah, plynoucí z definice:
$$u_{n+s} = u_{n+(s-1)} + u_{n+(s-2)}$$
(kde $s \geq 3$); v 1.kroku matematické indukce se pak ověřuje dokazovaná rovnost pro $s = 1, 2$.

§2: ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY

[1.2.A5]. Neexistuje. **[1.2.A7]**. Neexistuje. **[1.2.A9]**. a), d), f), i), j) jsou pravdivé, resp. b), c), e), g), h) jsou nepravdivé.

♣ ♣ ♣

[1.2.B3]. Návod: a) důkaz "$\subseteq$" veďte nepřímo, tzn. dokazujte implikaci
$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n).$$

[1.2.B4]. Návod: část b) dokazujte sporem, tzn. předpokládejte, že $x \in \bigcap_{p \in J} A_p$. Uvědomte si přitom, že prvočísel je nekonečně mnoho.
Při důkazu c) sestrojte číslo, které leží v $\bigcap_{p \in J} A_p$, kde $J = \{p_1, \dots, p_k\}$ je konečná množina prvočísel.

[1.2.B8]. Návod: využijte toho, že pro $0 \leq i \leq n$ existuje v množině A právě $\binom{n}{i}$ i-prvkových podmnožin. Použijte binomickou větu.

[1.2.B9]. a) $X = \{a,d\}$, $X = \{a,c,d\}$, b) neexistuje.

[1.2.B11]. $A{\times}B = \{(1,3),(1,7),(2,3),(2,7),(3,3),(3,7)\}$, $B{\times}2^B =$
$= \{(3,\emptyset),(3,\{3\}),(3,\{7\}),(3,\{3,7\}),(7,\emptyset),(7,\{3\}),(7,\{7\}),(7,\{3,7\})\}$
a podobně pro zbývající kartézské součiny.

§3: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI CELÝCH ČÍSEL

[1.3.A2]. Neexistuje. [1.3.A4]. Neexistuje. [1.3.A7]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.3.B1]. a) $q=0$, $r=0$, b) $q=-1$, $r=2$, c) $q=-4$, $r=3$, d) $q=-5$, $r=8$, e) $q=n-1$, $r=2$, f) $q=n^2-n$, $r=n-1$.

[1.3.B2]. Návod: a) vyšetřujte zvlášť pro a sudé a zvlášť pro a liché. Při důkazu b) použijte výsledku získaného v a).

[1.3.B3]. Zbytek může nabývat pouze hodnot: $0,1,4,9$.

[1.3.B4]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[1.3.B6]. Návod: podle potřeby použijte Větu 3.3. kapitoly I. (zejména část (iii)), nebo Větu 3.1., kapitoly I.

[1.3.B7]. 2 (neboť výpočtem dostaneme, že: $3^{80} \equiv 1 \pmod{100}$, resp. $7^{80} \equiv 1 \pmod{100}$).

[1.3.B9]. Návod: důkaz veďte sporem, tzn. předpokládejte, že:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad \wedge \quad p \text{ je složené číslo}$$

tj. $p = a{\cdot}b$, kde $1 < a,b < p$. Vyjde, že $a \mid 1$, což je spor.

[1.3.B10]. Návod: při b) použijte definici kongruence a Větu 3.5.2., kapitoly I.

[1.3.B11]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ne.

[1.3.B12]. a) ne, b) ano.

[1.3.B13]. Návod: a) použijte vzorec pro $a^n - b^n$,
b) uvědomte si, že $n^3 - n = n{\cdot}(n+1){\cdot}(n-1)$ je součinem tří po sobě jdoucích celých čísel.

[1.3.B14]. Každé $n \geq 3$. Návod: pro $n \geq 3$ upravujte:

$$10^n + 8 = 8\cdot(10^{n-3}\cdot 125 + 1) = 8\cdot\left((10^{n-3}-1)\cdot 125 + 126\right)$$

a využijte toho, že $9 \mid 126$, resp. že $9 \mid (10^{n-3}-1)$ jak vyplývá z předchozího cvičení [1.3.B13] a).

[1.3.B15]. Návod: a) v důkazu využijte toho, že lze psát:

$$12^{2n+1} = 144{\cdot}12^{2n-1} = (11+133){\cdot}12^{2n-1}.$$

b) v důkazu využijte toho, že pro $n \geq 4$ lze psát:

$$2^n + 1 = 2^n + 8 - 7 = 8\cdot(2^{n-3}+1) - 7.$$

V 1.kroku matematické indukce potom ověřujeme zadaný vztah pro $n = 1,2,3$.

§4: RELACE

[1.4.A1]. a) 2^{24}, b) 1, c) 2^9, d) 2^{81}. [1.4.A7]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.4.B2]. a) relaci ϱ zapíšeme např. takto:
$\varrho = \{(x,y) \mid (x = 3 \wedge y \in \mathbf{N} \text{ libovolné}) \vee (x \geq 50, \text{ sudé } \wedge y \text{ liché})\}$.
Při b), c), d) postupujeme podobně.

[1.4.B3]. Relace $\sigma \circ \varrho$ a $\varrho \circ \sigma$ jsou tvaru:

$$\sigma \circ \varrho = \{(x,y) \mid y = -3x^2-1 \vee y = 9x^4+6x^2-2, \text{ pro } \forall x \in \mathbf{Z}\},$$
$$\varrho \circ \sigma = \{(a,b) \mid b = 3a^2+1 \vee b = 3a^4-18a^2+28, \text{ pro } \forall a \in \mathbf{N}\}.$$

[1.4.B4]. Návod: a), ~~b)~~ dokazujte jako množinovou rovnost.

[1.4.B5]. Návod: a), b) dokazujte jako množinovou rovnost.

[1.4.B6]. a) celkem 16 relací, b) celkem 13 relací,
c) 3 relace: $\{(a,b),(b,a)\}$, $\{(a,b),(b,a),(a,a)\}$, $\{(a,b),(b,a),(b,b)\}$.
d) všechny relace z c) a navíc relace $\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$.

[1.4.B7]. Daných relací je celkem:

a) $2^{n(n-1)}$, b) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, c) $2^n\cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$,
d) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$, e) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, f) $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

[1.4.B8]. Relace ϱ_4 neexistuje.

[1.4.B9]. Relace ϱ je:
a) symetrická, tranzitivní, b) symetrická,
c) reflexivní, antisymetrická, d) reflexivní, symetrická.

[1.4.B10]. Relace ϱ je:
a) antisymetrická, b) reflexivní, symetrická, tranzitivní,
c) antisymetrická, tranzitivní, d) reflexivní, tranzitivní, úplná.

[1.4.B11]. Relace ϱ je:

a) symetrická,
b) symetrická, resp. je-li A jednoprvková, pak je též antisymetrická a tranzitivní,
c) antisymetrická, tranzitivní, resp. je-li A jednoprvková, pak je též reflexivní a úplná,
d) reflexivní, symetrická, tranzitivní, resp. je-li A jednoprvková, pak je též antisymetrická.

§5: ZOBRAZENÍ

[1.5.A2]. b) neexistuje. **[1.5.A5]**. a) $k = 2, 3, 4$, b) $k \geq 3$.

♣ ♣ ♣

[1.5.B1]. Zadaný předpis f:

a) neurčuje zobrazení b) určuje zobrazení
c) neurčuje zobrazení d) neurčuje zobrazení

[1.5.B2]. Po nakreslení obrázků dostanete:

a) celkem 8 zobrazení, z toho 6 surjektivních, žádné injektivní, žádné bijektivní,
b) celkem 9 zobrazení, z toho 6 injektivních, žádné surjektivní, žádné bijektivní.

[1.5.B3]. a) $A^B = \{f\}$, přičemž zobrazení f je definováno:

$$f(x) = a, \quad f(y) = a, \quad f(z) = a;$$

$B^A = \{f, g, h\}$, kde zobrazení f, resp. g, resp. h jsou definována:

$$f(a) = x, \qquad \text{resp. } g(a) = y, \qquad \text{resp. } h(a) = z$$

b) $A^B = \{f, g, h, k\}$, přičemž tato zobrazení jsou definována:

$$f(x) = x, \quad f(y) = x \qquad g(x) = y, \quad g(y) = y$$
$$h(x) = x, \quad h(y) = y \qquad k(x) = y, \quad k(y) = x$$

$B^A = A^B$.

[1.5.B5]. Zadané zobrazení f:

a) je injektivní, není surjektivní, b) je injektivní, není surjektivní,
c) není injektivní, je surjektivní, d) je injektivní, je surjektivní,
e) není injektivní, je surjektivní, f) je injektivní, není surjektivní.

[1.5.B6]. Zadané zobrazení f:

a) není injektivní, je surjektivní, b) je injektivní, je surjektivní,
c) není injektivní, není surjektivní, d) není injektivní, není surjektivní,
e) je injektivní, není surjektivní, f) není injektivní, je surjektivní.

[1.5.B7]. Zadané zobrazení f:

a) není injektivní, není surjektivní, b) je injektivní, není surjektivní,
c) není injektivní, není surjektivní, d) je injektivní, je surjektivní,
e) je injektivní, je surjektivní, f) není injektivní, je surjektivní.

[1.5.B8]. a) pro $s \neq n$ žádné bijektivní zobrazení, resp. pro $s = n$ celkem $n!$ bijektivních zobrazení,

b) pro $s < n$ žádné injektivní zobrazení, resp. pro $s \geq n$ celkem $\dfrac{s!}{(s-n)!}$ injektivních zobrazení.

[1.5.B10]. Návod: a) při důkazu "$\Longrightarrow$" zkonstruujeme hledané zobrazení $g : B \to A$ např. takto: jestliže prvek $b \in B$ má při zobrazení f vzor (uvědomte si, že musí být jediný), pak tento vzor označíme symbolem b^*. Dále, nechť a_0 značí libovolný pevný prvek z A. Zobrazení $g : B \to A$ pak definujeme:

$$g(b) = \begin{cases} b^* & \text{má-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \\ a_0 & \text{nemá-li prvek } b \text{ při zobrazení } f \text{ vzor} \end{cases}$$

Při důkazu "$\Longrightarrow$" v b) postupujeme obdobně, tzn. pro každé $b \in B$ označíme symbolem b^* jeden (pevný) vzor prvku b při zobrazení f. Pak zobrazení $h : B \to A$ definujeme: $h(b) = b^*$, pro každé $b \in B$.

[1.5.B13]. $(f \circ g)(x) = 6x + 1$, $\quad (g \circ f)(x) = 6x - \frac{19}{3}$,
$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{6}(x - 1)$, $\quad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$,
$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{18}(3x + 19)$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{6}(3x - 5)$.

[1.5.B15]. Návod: při b) ukažte, že z podmínky zadání plyne:

$$f(f(f(-x))) = f(f(-f(x)))$$

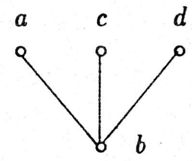
a použijte dvakrát injektivnost zobrazení f.
Při c) dokazujte nejprve "$\Longleftarrow$" (s využitím b)), a pak "$\Longrightarrow$" (s využitím již dokázaných vlastností, že: $f(0) = 0$ a f je injektivní).

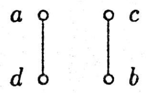
§6: USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

[1.6.A3]. Neexistuje. **[1.6.A5]**. Neexistuje. **[1.6.A8]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[1.6.B1]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:

a) 

b) 

[1.6.B2]. Relace ϱ je zadána takto:

a) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,a),(b,d),(c,a),(c,d),(a,d)\}$,

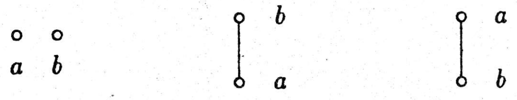
b) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,

c) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,d),(c,d)\}$,

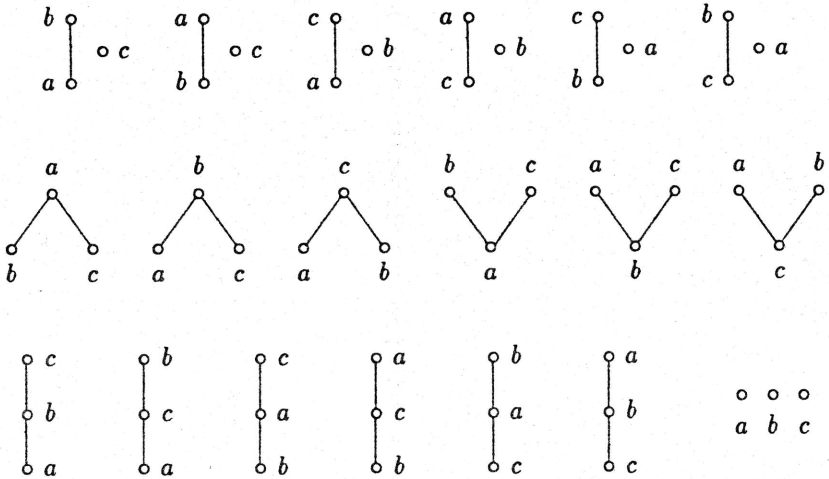
d) $\varrho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(c,a),(c,d),(c,b),(a,d),(a,b),(d,b)\}$.

[1.6.B3]. Na dané množině M lze definovat:

a) 3 relace uspořádání, hasseovské diagramy jsou tvaru:

a) 

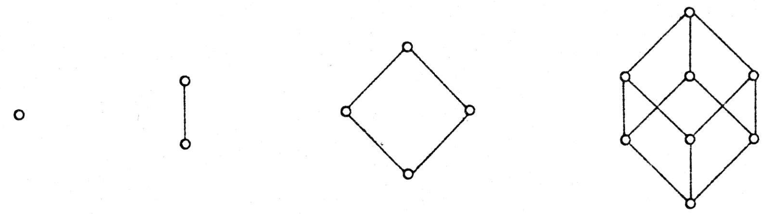
b) 19 relací uspořádání, hasseovské diagramy jsou tvaru:



Poznámka: uvědomte si, že se ve všech případech jedná o různé relace uspořádání na množině M, a tedy o různé uspořádané množiny, i když

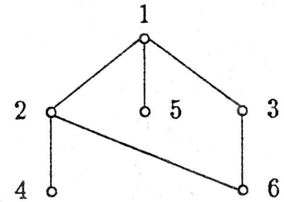
některé z uvedených hasseovských diagramů vypadají na první pohled "stejně".

[1.6.B4]. Hasseovský diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$ je tvaru (doplňte si v jednotlivých diagramech sami popis prvků množiny 2^A):



a) b) c) d)

[1.6.B5]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:



[1.6.B6]. Pro množinu s relací $(\mathbf{N}, \varrho)$ platí:

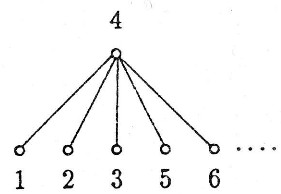
a) je uspořádaná množina, ale není lineárně uspořádaná množina,

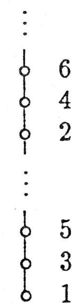
b) není uspořádaná množina,

c) není uspořádaná množina,

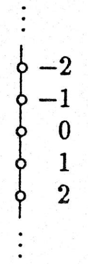
d) je lineárně uspořádaná množina.

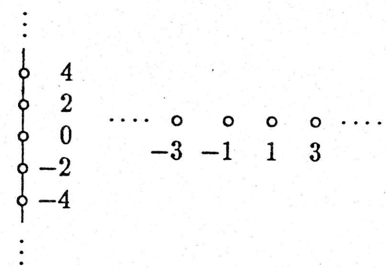
Hasseovské diagramy u uspořádaných množin je možno schematicky znázornit takto:

a) 

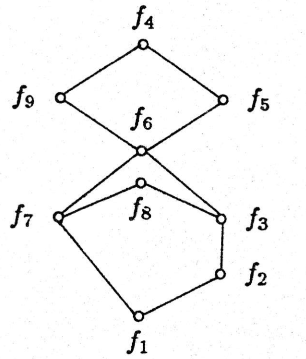
d) 

[1.6.B7]. Pro množinu s relací $(\mathbf{Z}, \varrho)$ platí:
a) není uspořádaná množina,
b) je lineárně uspořádaná množina,
c) není uspořádaná množina,
d) je uspořádaná množina, není lineárně uspořádaná množina.
Hasseovské diagramy u uspořádaných množin je možno schematicky znázornit takto:

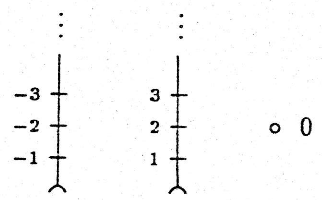
b) 

d) 

[1.6.B8]. Hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:



[1.6.B9]. Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathbf{R}, \varrho)$ je možno schematicky načrtnout takto:

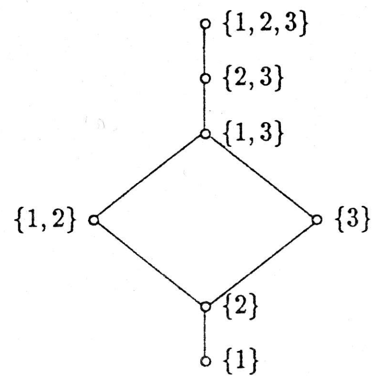


[1.6.B11]. a) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.6.B2] platí:
[1.6.B2] a): nejmenší prvek nemá, minimálními prvky jsou b, c, největším a zároveň jediným maximálním prvkem je d,
[1.6.B2] b): nejmenší ani největší prvek nemá, minimálními a zároveň maximálními prvky jsou a, b, c, d,
[1.6.B2] c): největší ani nejmenší prvek nemá, minimálními prvky jsou a, b, c, maximálními prvky jsou a, d,
[1.6.B2] d): nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je c, největším a zároveň jediným maximálním prvkem je b;
b) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.6.B6] platí:
[1.6.B6] a): nemá nejmenší prvek, minimálními prvky jsou všechna přirozená čísla různá od 4, největším a jediným maximálním prvkem je číslo 4,
[1.6.B6] d): nemá největší ani maximální prvek; nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je číslo 1;
c) pro uspořádané množiny ze cvičení [1.6.B7] platí:
[1.6.B7] b): nemá minimální, maximální, nejmenší ani největší prvek,
[1.6.B7] d): nemá nejmenší ani největší prvek, minimálními prvky jsou všechna lichá celá čísla a maximálními prvky jsou rovněž všechna lichá celá čísla.
d) uspořádaná množina ze cvičení [1.6.B8] nemá největší prvek, maximálními prvky jsou f_4 a f_8, nejmenším a zároveň jediným minimálním prvkem je f_1.

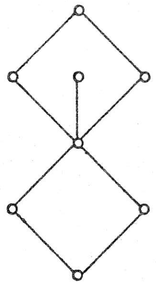
[1.6.B12]. Návod: důkazy veďte sporem.

[1.6.B13]. b) neplatí.

[1.6.B14]. b) hasseovský diagram uspořádané množiny (M, ϱ) je tvaru:



[1.6.B15]. Hasseovské diagramy uspořádaných množin z c) a d) jsou tvaru: (při c) si sami doplňte popis jednotlivých prvků)

c) 

d) 

§7: EKVIVALENCE A ROZKLADY

[1.7.A1]. Jediná relace, a to relace rovnosti. **[1.7.A4].** Neexistuje. **[1.7.A7].** b) neexistuje. **[1.7.A8].** Pro $m = 1, 2, 7, 14$.

♣ ♣ ♣

[1.7.B1]. Relace ϱ na množině M:
a) není ekvivalencí,
b) je ekvivalencí, přičemž rozklad $M/\varrho = \{\{a,b,d\},\{c\}\}$.

[1.7.B2]. Na množině M lze utvořit celkem:
a) 2 rozklady, b) 5 rozkladů, c) 15 rozkladů.

[1.7.B3]. Tabulka relace $\sim_{\mathcal{R}}$ je tvaru:

a)

	u	v	x	y	z
u	1	0	0	0	0
v	0	1	0	1	0
x	0	0	1	0	0
y	0	1	0	1	0
z	0	0	0	0	1

b)

	u	v	x	y	z
u	1	0	0	1	0
v	0	1	1	0	1
x	0	1	1	0	1
y	1	0	0	1	0
z	0	1	1	0	1

[1.7.B4]. b) Rozklad M/ϱ (tj. rozklad na množině M, příslušný ekvivalenci ϱ) je tvaru:

$\{\{1,10\},\{2,11,20\},\{3,12\},\{4,13\},\{5,14\},\ldots,\{8,17\},\{9,18\},\{19\}\}$.

[1.7.B5]. Daná relace ϱ:
a) není ekvivalencí, b) je ekvivalencí
c) není ekvivalencí, d) je ekvivalencí.

[1.7.B6]. Rozklad $\mathbf{Z}/\varrho$ (tj. rozklad na množině $\mathbf{Z}$, příslušný ekvivalenci ϱ) je tvaru:

a) $\mathbf{Z}/\varrho = \mathbf{Z}_4$, tj. množina zbytkových tříd podle modulu 4,

b) $\mathbf{Z}/\varrho = \{C_0, C_1 \cup C_6, C_2 \cup C_5, C_3 \cup C_4\}$, kde $C_i \in \mathbf{Z}_7$,

c) $\mathbf{Z}/\varrho = \{\{-1+k, -1-k\} \mid k \geq 0 \text{ celé}\}$,

d) $\mathbf{Z}/\varrho = \{S, L\}$, kde S, resp. L značí množinu všech sudých, resp. všech lichých celých čísel.

[1.7.B7]. Rozklad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\varrho$ lze nakreslit takto:

a) všechny přímky rovnoběžné s osou y,

b) navzájem rovnoběžné přímky tvaru $y = 2x + k$, pro $\forall k \in \mathbf{R}$,

c) počátek a všechny kružnice se středem v počátku,

d) bod $S[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a všechny kružnice se středem v bodě S.

[1.7.B8]. Zadaný systém podmnožin $\mathcal{M}$:

a) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž relace $\sim_{\mathcal{M}}$ je definována:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \iff [x] = [y],$$

kde $[x]$, resp. $[y]$ značí celou část čísla x, resp. y,

b) není rozkladem na $\mathbf{R}$,

c) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž relace $\sim_{\mathcal{M}}$ je definována:

$$x \sim_{\mathcal{M}} y \iff (x = y = 0) \lor (x, y > 0) \lor (x, y < 0),$$

d) je rozkladem na $\mathbf{R}$, přičemž platí: $\sim_{\mathcal{M}} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

[1.7.B13]. Rozklad (na množině A) příslušný zobrazení f je tvaru:

a) $\mathcal{M} = \{\{a,c,d\},\{b,e\}\}$,

b) $\mathcal{M} = \{\langle k, k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}$,

c) $\mathcal{M} = \{\langle -k+1, -k+2) \cup \langle k-1, k) \mid k \in \mathbf{N}\}$,

d) $\mathcal{M} = \{\{\emptyset\}, \{X \subseteq \mathbf{N} \mid X \neq \emptyset \text{ konečná}\}, \{X \subseteq \mathbf{N} \mid X \text{ nekonečná}\}\}$.

[1.7.B14]. b) např. $\mathcal{R} = \{\{x\} \mid x \in M\}$,

c) rozkladem příslušným zobrazení f je výchozí rozklad $\mathcal{R}$.

KAPITOLA 2:

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

§1: STRUKTURY S JEDNOU OPERACÍ

[2.1.A1]. Celkem $3^9 = 19.683$ různými způsoby. **[2.1.A6]**. Neexistuje. **[2.1.A9]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.1.B1]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ne, f) ne.

[2.1.B2]. a) není komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek,
b) je komutativní, není asociativní, prvek b je neutrálním prvkem.

[2.1.B3]. a) není komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek,
b) je komutativní, není asociativní, neutrálním prvkem je 0,
c) je komutativní, není asociativní, nemá neutrální prvek,
d) je komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek,
e) je komutativní, je asociativní, neutrálním prvkem je 24,
f) je komutativní, není asociativní, nemá neutrální prvek.

[2.1.B4]. a) celkem 5 součinů tvaru:

$a{\cdot}(b{\cdot}(c{\cdot}d))$, $a{\cdot}((b{\cdot}c){\cdot}d)$, $(a{\cdot}b){\cdot}(c{\cdot}d)$, $(a{\cdot}(b{\cdot}c)){\cdot}d$, $((a{\cdot}b){\cdot}c){\cdot}d$.

[2.1.B5]. b) je-li množina G jednoprvková, pak $(G,\circ)$ je komutativní pologrupa, která má neutrální prvek.

[2.1.B6]. a) neutrální prvek je 0; inverzním prvkem k 0 (resp. -2) je 0 (resp. -2), k ostatním prvkům inverzní prvky neexistují,
b) neutrální prvek je 1; inverzní prvek k $x \neq 0$ je číslo $\frac{1}{x}$, resp. k 0 inverzní prvek neexistuje,
c) neutrální prvek je 3; inverzním prvkem k 3 je 3, resp. k libovolnému číslu $x \neq 3$ jsou inverzními prvky všechna celá čísla s výjimkou 3.

[2.1.B7]. a) $e = 0$; resp. $0^{-1} = 0$, $2^{-1} = 2$,

b) $e = 0$; resp. pro $a \neq 1$ je $a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$,

c) $e = C_1$; resp. $C_1^{-1} = C_1$, $C_5^{-1} = C_5$,

d) $e = C_1$; resp. $C_1^{-1} = C_1$, $C_2^{-1} = C_4$, $C_3^{-1} = C_5$, $C_4^{-1} = C_2$, $C_5^{-1} = C_3$, $C_6^{-1} = C_6$.

[2.1.B9]. Zákony o dělení, resp. zákony o krácení:
a) platí, resp. platí, b) neplatí, resp. neplatí,
c) neplatí, resp. platí, d) neplatí, resp. neplatí.

[2.1.B10]. Návod: v důkazech využijte toho, že platnost zákonů o krácení je ekvivalentní podmínce:

$$a \neq b \implies x{\cdot}a \neq x{\cdot}b \ \wedge \ a{\cdot}x \neq b{\cdot}x\,.$$

[2.1.B11]. Návod: při b) je zřejmě nutno vymyslet příklad tak, aby $(G,\cdot)$ nebyla pologrupa (proč?). Uvažte např. $(\mathbf{Z},*)$, kde operace $*$ je definována:

$$a*b = \begin{cases} a+b-1 & \text{je-li } a>0 \ \wedge \ b>0 \\ a+b & \text{je-li } a\leq 0 \ \vee \ b \leq 0 \end{cases}$$

[2.1.B12]. a) tabulka operace je symetrická podle hlavní diagonály,
b) v tabulce existuje řádek, v němž se opakuje vodorovné záhlaví a sloupec, v němž se opakuje svislé záhlaví,
c) v každém řádku a sloupci tabulky se vystřídají všechny prvky,
d) totéž jako v c).

[2.1.B13]. Celkem 6 tabulek (nutno vypsat !).
Návod: uvědomte si, že v tomto případě je zápisem 1.řádku tabulky již jednoznačně určen zbytek tabulky (proč?).

[2.1.B14]. a) $3^5 = 243$ způsobů, b) 9 způsobů, c) 9 způsobů,
d) 1 způsob (Návod: v tomto případě, po doplnění tabulky plynoucím z komutativity, vyšetřujte nejprve součiny $z\cdot(x\cdot x)$ a $(z\cdot x)\cdot x$.),
e) 1 způsob, f) žádný způsob.

[2.1.B15]. Návod: dokazujte implikace: " (i) $\Longrightarrow$ (ii)" , " (ii) $\Longrightarrow$ (iii)" a " (iii) $\Longrightarrow$ (i)" .

[2.1.B18]. Návod: při důkazu postupujte analogickým způsobem jako v řešeném Příkladu 13 z kapitoly I.

[2.1.B19]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano, e) ano, f) ano.

[2.1.B20]. a) tabulka operace + má tvar:

$+$	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_0,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_0,C_1)	(C_0,C_1)	(C_0,C_0)	(C_1,C_1)	(C_1,C_0)
(C_1,C_0)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)
(C_1,C_1)	(C_1,C_1)	(C_1,C_0)	(C_0,C_1)	(C_0,C_0)

[2.1.B21]. Návod: uvědomte si, že f_i $(1 \le i \le 6)$ je bijekce a sestrojte tabulku operace. Z asociativity skládání zobrazení a z této tabulky pak plyne tvrzení.

[2.1.B22]. a) tabulka operace $\circ$ na množině $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ má tvar:

$\circ$	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
(0,0,1)	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,1,1)	(1,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)
(0,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,0,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)
(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)	(1,1,1)	(1,1,0)	(0,0,1)	(0,0,0)
(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,1,1)	(1,1,0)
(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,0,0)	(0,0,1)
(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(0,0,1)	(0,0,0)	(0,1,1)	(0,1,0)	(1,0,1)	(1,0,0)

Návod: při c) uvažte množinu $G = \mathbf{Z}_m^s = \mathbf{Z}_m \times \ldots \times \mathbf{Z}_m$ (s-krát) a definujte na ní operaci podobným způsobem jako v zadání.

[2.1.B23]. Daná pologrupa $(G, \circ)$
a) je komutativní grupou, b) není grupou,
c) není grupou, d) je nekomutativní grupou.

[2.1.B26]. $(G, *)$ je grupa.

[2.1.B27]. Návod: při a) vyjděte z toho, že pro libovolné $x, y \in G$ platí:

$$(x{\cdot}y) \cdot (x{\cdot}y) = e = e \cdot e = (x{\cdot}x) \cdot (y{\cdot}y).$$

§2: PODSTRUKTURY STRUKTUR S JEDNOU OPERACÍ

[2.2.A1]. b) neexistuje. [2.2.A2]. Neexistuje. [2.2.A7]. b) neexistují. [2.2.A8]. a) neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.2.B1]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ne.

[2.2.B2]. Platí, že $(H, \cdot)$:
a) je podgrupoid, b) není podgrupoid,
c) je podgrupoid, d) je podgrupa.

[2.2.B3]. V grupoidu $(G, \cdot)$ existuje celkem:
6 podgrupoidů, a to:

$$(G,\cdot),\ (\{a,b,c\},\cdot),\ (\{a,d\},\cdot),\ (\{b,c\},\cdot),\ (\{a\},\cdot),\ (\{b\},\cdot),$$

4 podpologrupy, a to: $(\{a,d\},\cdot)$, $(\{b,c\},\cdot)$, $(\{a\},\cdot)$, $(\{b\},\cdot)$,

3 podgrupy, a to: $(\{b,c\},\cdot)$, $(\{a\},\cdot)$, $(\{b\},\cdot)$,

[2.2.B5]. Návod: při a) uvažte v grupoidu $(\mathbf{N},+)$ dva libovolné podgrupoidy $(H_1,+)$, $(H_2,+)$ a pevné prvky $x \in H_1$, $y \in H_2$. Vyšetřujte pak prvek $x \cdot y$.
Při b) např. pro libovolné prvočíslo p označte

$$H_p = \{p^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{N}\}$$

a vyšetřujte pak podgrupoidy $(H_p, \cdot)$ pro všechna prvočísla p.

[2.2.B6]. Návod: uvědomte si, že a) lze přeformulovat do tvaru:

$$(H,\circ) \text{ je podgrupoid v } (G,\circ) \iff \exists\, i \in \mathbf{N} \text{ tak, že: } H = H_i.$$

Dále, jestliže jsme již dokázali část a), pak c) lze zřejmě přeformulovat do tvaru:

je-li $\emptyset \neq I \subseteq \mathbf{N}$; pak

$$\bigcap_{i\in I} H_i \text{ je podgrupoid v } (G,\circ) \iff I \text{ je konečná množina.}$$

[2.2.B8]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano.

[2.2.B9]. Platí, že $(H, \circ)$
a) je komutativní podgrupa, b) je komutativní podgrupa,
c) je nekomutativní podgrupa, d) není podgrupa.

[2.2.B12]. Pro podgrupu $(\langle M\rangle, +)$ platí:
a) $\langle M\rangle = \{0\}$, b) $\langle M\rangle = \mathbf{Z}$,
c) $\langle M\rangle = 3{\cdot}\mathbf{Z}$, d) $\langle M\rangle = \mathbf{Z}$.

[2.2.B17]. a) množina G má $3^3 = 27$ prvků,
c) $(H_1,\circ)$, $(H_3,\circ)$ nejsou podgrupy; $(H_2,\circ)$ je podgrupa,
d) neexistuje. Návod: zkoumejte prvky tvaru $g \circ g$, pro každé $g \in G$.
e) $(H,\circ)$, kde $H = \{e, z, (C_1, C_1, C_1)\}$.

[2.2.B18]. Návod: při důkazu "$\Longrightarrow$" rozlište případy $H = \{C_0\}$ a $H \neq \{C_0\}$. Ve druhém případě lze zřejmě množinu H zapsat ve tvaru:

$$H = \{C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_s}\}, \quad \text{kde } 0 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s.$$

Pak položte: $i_2 = k$ a dokazujte, že: $k \mid m \ \wedge\ H = H_k$.

Při důkazu "$\Longleftarrow$" postupujte běžným způsobem, tzn. využijte např. Větu 2.3.(ii), kapitoly II.

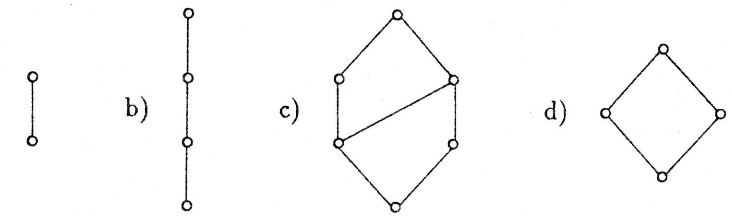
[2.2.B19]. a) 2 podgrupy: $(\mathbf{Z}_3,+)$, $(\{C_0\},+)$,

b) 4 podgrupy: $(\mathbf{Z}_8,+)$, $(\{C_0,C_2,C_4,C_6\},+)$, $(\{C_0,C_4\},+)$, $(\{C_0\},+)$,

c) 6 podgrup: $(\mathbf{Z}_{12},+)$, $(\{C_0,C_2,C_4,C_6,C_8,C_{10}\},+)$, $(\{C_0,C_3,C_6,C_9\},+)$, $(\{C_0,C_4,C_8\},+)$, $(\{C_0,C_6\},+)$, $(\{C_0\},+)$,

d) 4 podgrupy: $(\mathbf{Z}_{21},+)$, $(\{C_0,C_3,C_6,C_9,C_{12},C_{15},C_{18}\},+)$, $(\{C_0,C_7,C_{14}\},+)$, $(\{C_0\},+)$.

Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{H},\subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků !):

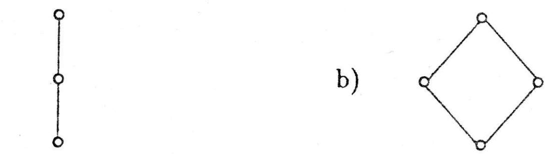


[2.2.B20]. a) $\langle M\rangle = \{C_0\}$, b) $\langle M\rangle = \{C_0\}$,
c) $\langle M\rangle = \{C_0,C_3,C_6,C_9\}$, d) $\langle M\rangle = \{C_0,C_3,C_6,C_9\}$.

[2.2.B21]. a) 3 podgrupy: $(\mathbf{Z}_5-\{C_0\},\cdot)$, $(\{C_1,C_4\},\cdot)$, $(\{C_1\},\cdot)$,

b) 4 podgrupy: $(\mathbf{Z}_7-\{C_0\},\cdot)$, $(\{C_1,C_2,C_4\},\cdot)$, $(\{C_1,C_6\},\cdot)$, $(\{C_1\},\cdot)$.

Hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P},\subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků !):



§3: STRUKTURY SE DVĚMA OPERACEMI A JEJICH PODSTRUKTURY

[2.3.A3]. Neexistuje. [2.3.A4]. Neexistuje. [2.3.A7]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.3.B1]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano.

[2.3.B2]. Platí, že $(M,\oplus,\circ)$

a) je okruh, b) není okruh, c) je obor integrity,
d) není okruh, e) je těleso, f) není okruh.

[2.3.B4]. Návod: rozepsáním se ukáže, že v obou případech dostaneme komutativní okruh s jedničkou $(1,0)$, přičemž nulou je $(0,0)$.
Při hledání dělitelů nuly si uvědomte, že je-li

$$(a,b)\neq(0,0) \quad\wedge\quad (a,b)\cdot(x,y)=(0,0),$$

pak pro $a,b\in\mathbf{Q}$ je vždy $2b^2-a^2\neq 0$ (proč?), kdežto pro $a,b\in\mathbf{R}$ může být $2b^2-a^2=0$. Toho pak využijte při výpočtu (x,y).

[2.3.B5]. a) tabulka zadané operace $+$ na množině $\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$ je uvedena ve výsledku cvičení [2.1.B20] a), resp. tabulka operace $\cdot$ je tvaru:

$\cdot$	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_0,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_0)
(C_0,C_1)	(C_0,C_0)	(C_1,C_1)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)
(C_1,C_0)	(C_0,C_0)	(C_0,C_1)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)
(C_1,C_1)	(C_0,C_0)	(C_1,C_0)	(C_1,C_1)	(C_0,C_1)

[2.3.B15]. b) děliteli nuly v okruhu $(M,\oplus,\circ)$ jsou všechny nenulové prvky tohoto okruhu,

c) platí, že $(S,\oplus,\circ)$
α) je podokruhem, β) není podokruhem,
γ) je podokruhem, δ) není podokruhem.

[2.3.B16]. a) x neexistuje, $y=0$, $z=5$, b) $x=2$, $y=5$, $z=3$.

[2.3.B17]. Dostáváme:

a) podokruhy: $(\mathbf{Z}_9,+,\cdot)$, resp. $(\{C_0,C_3,C_6\},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0\},+,\cdot)$; žádné podtěleso;

b) podokruhy: $(\mathbf{Z}_{10},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0\},+,\cdot)$;
podtělesa: $(\{C_0,C_2,C_4,C_6,C_8\},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0,C_5\},+,\cdot)$;

c) podokruh: $(\{C_0\},+,\cdot)$; podtěleso: $(\mathbf{Z}_{11},+,\cdot)$;

d) podokruhy: $(\mathbf{Z}_{12},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0,C_2,C_4,C_6,C_8,C_{10}\},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0,C_3,C_6,C_9\},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0.C_6\},+,\cdot)$, resp. $(\{C_0\},+,\cdot)$;
podtěleso: $(\{C_0,C_4,C_8\},+,\cdot)$.

[2.3.B18]. Inverzní prvek existuje k těmto prvkům:

a) $C_1, C_2, C_4, C_5, C_7, C_8$, b) C_1, C_3, C_7, C_9,

c) ke všem nenulovým prvkům, d) C_1, C_5, C_7, C_{11}.

[2.3.B20]. Návod: dokazujte nejprve implikaci "(i) $\Longrightarrow$ (ii)", potom implikaci, "(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" a nakonec implikaci "(iii) $\Longrightarrow$ (i)".
Přitom důkaz "(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" veďte sporem, resp.

při důkazu "(iii) $\Longrightarrow$ (i)" využijte toho, že pro $(i,m)=1$ existují čísla $u,v \in \mathbf{Z}$ tak, že $i\cdot u + m\cdot v = 1$. Je-li $j \equiv u (\operatorname{mod} m) \ \wedge \ 0 \le j < m$, dostanete pak, že: $C_j = C_i^{-1}$.

[2.3.B22]. Návod: při a) důkaz veďte nepřímo.
Při b) v důkazu využijte jednak výsledek části a) a jednak výsledek předchozího cvičení [2.3.B21].

[2.3.B23]. Čtvercem jsou tyto prvky:

a) C_0, C_1, b) C_0, C_1, C_4,

c) C_0, C_1, C_2, C_4, d) $C_0, C_1, C_3, C_4, C_5, C_9$.

[2.3.B26]. a) 0, b) 0, c) 2, d) 0.

[2.3.B27]. Návod: pro $x \in \mathbf{R}$ libovolné počítejte $x+x$ a uvědomte si, že podle předpokladu je: $(x+x) = (x+x)\cdot(x+x)$.

[2.3.B28]. Návod: uvědomte si, že platí:

$$m\cdot a = n\cdot a \iff (m-n)\cdot a = 0\cdot a$$

a dále použijte Větu 3.8.2, kapitoly II.

§4: ČÍSELNÁ TĚLESA

[2.4.A2]. Neexistuje. **[2.4.A3].** Neexistuje. **[2.4.A8].** Neexistuje.
[2.4.A9]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[2.4.B1]. Návod: vyjděte z předpokladu, že $(T,+,\cdot)$ je číselné těleso takové, že $\mathbf{R} \subset T \subseteq \mathbf{K}$ a dokazujte, že pak $T = \mathbf{K}$. Přitom nejprve ukažte, že $i \in T$.

[2.4.B4]. a) ano, b) ne, c) ne (uvědomte si, že zde je $T \subset \mathbf{Q}$), d) ne, e) ne, f) ne, g) ano, h) ano.

[2.4.B5]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ne, f) ano.

KAPITOLA 3:

VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: VEKTOROVÝ PROSTOR NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM

[3.1.A2]. Neexistuje. **[3.1.A8].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[3.1.B1]. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano.

[3.1.B9]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ne, f) ne.

§2: PODPROSTORY VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.2.A3]. b) neexistuje. **[3.2.A4].** a) neexistuje, b) neexistuje c) neexistuje.
[3.2.A5]. c) neexistuje, d) neexistuje. **[3.2.A9].** b) neexistuje.

♣ ♣ ♣

[3.2.B1]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[3.2.B2]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ano.

[3.2.B3]. a) ne, b) ne, c) ano, d) ano.

[3.2.B4]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[3.2.B5]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[3.2.B6]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[3.2.B7]. a) ne, b) ano, c) ano, d) ano.

[3.2.B8]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ne.

[3.2.B12]. Návod: při a) dokazuje "$\Longrightarrow$" sporem, tzn. předpokládejte, že

$$W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2 \text{ a dále, že } W_1 \not\subseteq W_2 \ \wedge \ W_2 \not\subseteq W_1$$

tzn. existuje vektor $\mathbf{u} \in W_1 - W_2$ a existuje vektor $\mathbf{v} \in W_2 - W_1$.
Vyšetřujte pak vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
Při důkazu b) pak využijte platnosti a).

[3.2.B14]. Návod: při b) vymyslete protipříklad např. v $\mathbf{R}^2$.

[3.2.B15]. Návod: při b) vymyslete protipříklad např. v $\mathbf{R}^2$.

[3.2.B16]. a) ano, b) ne, c) ano, d) pro $n = 2$ ano, resp. pro $n \geq 3$ ne, e) ne, f) ano.

[3.2.B18]. Návod: uvědomte si, že

$$W_1 = \{a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} \mid k \geq 0 \text{ celé}, \ a_i \in \mathbf{R}\}$$

$$W_2 = \{a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2t+1}x^{2t+1} \mid t \geq 0 \text{ celé}, \ a_i \in \mathbf{R}\}.$$

[3.2.B21]. Daný výrok je podmínkou, která
a) není nutná, je dostatečná, b) je nutná, není dostatečná,
c) není nutná, není dostatečná, d) je nutná, je dostatečná.

[3.2.B23]. Návod: důkaz veďte nepřímo.

§3: LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST VEKTORŮ

[3.3.A4]. Neexistuje. **[3.3.A5]**. b) neexistuje. **[3.3.A7]**. a) neexistuje.

♣ ♣ ♣

[3.3.B1]. a) ano, b) ne.

[3.3.B2]. a) ne, b) ano.

[3.3.B3]. a) ano, b) ne.

[3.3.B4]. Návod: stačí dokázat (proč?), že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ a $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

[3.3.B5]. a) pro $r = 3$, b) pro každé $r \in \mathbf{R}$, c) pro žádné $r \in \mathbf{R}$, d) pro $r = -1, -2$.

[3.3.B6]. a) $[f_1, f_2] = \{r + s \cdot \cos x \mid r, s \in \mathbf{R}\}$.

[3.3.B7]. Návod: při a) stačí dokazovat (proč?), že:

$$\mathbf{u}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}-\mathbf{u}), \text{ resp. } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}-\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Při b) stačí dokazovat (proč?), že:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w}), \text{ resp. } \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{w} \in L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

[3.3.B10]. Návod: uvědomte si, že dokazujete implikaci:

$$W_1 = L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r) \wedge W_2 = L(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) \implies$$
$$\implies W_1 + W_2 = L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s).$$

[3.3.B11]. Dané vektory jsou lineárně
a) nezávislé, b) závislé, c) nezávislé, d) závislé,
e) závislé, f) závislé, g) závislé, h) nezávislé.

[3.3.B12]. Návod: použijte definici lineární závislosti vektorů a proveďte diskuzi vzniklé soustavy 2 lineárních rovnic o 3 neznámých.

[3.3.B13]. Návod: při a) si uvědomte, že je-li $f \neq g$, pak $\exists\, x_1 \in \langle 0, 1\rangle$ tak, že $f(x_1) \neq g(x_1)$. Dále použijte definici lineární závislosti vektorů, kterou aplikujete na body x_0, x_1.

[3.3.B15]. a) $\mathbf{u}_2$, b) žádný vektor, c) $\mathbf{u}_1$, resp. $\mathbf{u}_3$.

[3.3.B16]. a) lineárně závislé pro $a = 1, 2$, jinak lineárně nezávislé,
b) lineárně nezávislé pro každé $a \in \mathbf{R}$,
c) lineárně závislé pro $a = 7$, jinak lineárně nezávislé.

[3.3.B17]. a) $a = 0$ nebo $b = 6$, b) $a = b = c = d = 0$,
c) $(a = b = 1) \vee (a = c = 1) \vee (b = c = 1)$, d) $a = 0$ nebo $a = -3$.

[3.3.B18]. Dané vektory jsou lineárně
a) nezávislé, b) závislé, c) nezávislé, d) závislé.

[3.3.B19]. Vektory jsou lineárně nezávislé.

§4: BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU

[3.4.A2]. a) neexistují. **[3.4.A3]**. a) $n = 1, 2, 3, 4$, b) $n \geq 3$. **[3.4.A4]**. a) $s \geq 6$, b) $s = 1, 2, 3, 4, 5$. **[3.4.A7]**. b) neexistuje. **[3.4.A8]**. b) neexistuje. **[3.4.A9]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[3.4.B1]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano.

[3.4.B2]. a) ne, b) ano, c) ano, d) ne.

[3.4.B3]. a) každé $a \in \mathbf{R}$, b) $a, b \in \mathbf{R}$ libovolná $\wedge\ c \neq 1$,
c) $a \neq 2 \ \wedge \ a \neq \frac{1}{6}$, d) žádné a.

[3.4.B5]. a) např. $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, b) např. $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1$.

[3.4.B6]. a) $\dim V = 1$; báze např.: 1,
b) $\dim V = 2$; báze např.: $1, i$,
c) $\dim V = 2$; báze např.: $1, \sqrt{2}$,
d) $\dim V = n$; báze např.: $f_1, \ldots, f_n$, kde pro $i = 1, \ldots, n$ je zobrazení $f_i : A \to \mathbf{R}$ definováno:

$$f_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } k = i \\ 0 & \text{je-li } k \neq i \end{cases} \qquad \text{pro } k = 1, \ldots, n$$

e) $\dim V = 4$; báze např.: $(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)$.

[3.4.B8]. Návod: uvědomte si, že při a) i b) stačí dokázat pouze lineární nezávislost zadaných vektorů (proč?).

[3.4.B10]. a) $\dim W = 3$; báze např.:

$$(1,-1,0,0,0)\,,\ (0,0,1,0,0)\,,\ (0,0,0,1,-1)\,,$$

b) $\dim W = n-1$; báze např.:

$$(1,0,\ldots,0,1)\,,\ (0,1,0,\ldots,0,0)\,,\ \ldots\,,\ (0,0,\ldots,0,1,0)\,,$$

c) $\dim W = 1$; báze např.: $(1,1,\ldots,1)$,
d) $\dim W = n-1$; báze např.:

$$(1,-1,0,\ldots,0)\,,\ (1,0,-1,0,\ldots,0)\,,\ \ldots\,,\ (1,0,\ldots,0,-1)\,,$$

e) pro n sudé je $\dim W = \frac{n}{2}$, resp. pro n liché je $\dim W = \frac{n+1}{2}$;
báze např.: $(1,0,\ldots,0)$, $(0,0,1,0,\ldots,0)$, ..., atd.,

f) $\dim W = 3$; báze např.: 1, x^2, x^4.

[3.4.B11]. b) $\dim W = 3$, c) báze je např. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $(0,0,2,-1)$.

[3.4.B12]. a) $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3$, resp. $\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$,
b) libovolné dva různé vektory z vektorů $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$,
c) $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_4$, resp. $\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_4$, resp. $\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$, d) $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4$.

[3.4.B13]. a) bázi tvoří 3 vektory, např. $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$,
b) bázi tvoří 3 vektory, např. $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_5$.

[3.4.B14]. a) $\dim W = 2$ pro $a = 1, 2$, jinak $\dim W = 3$,
b) $\dim W = 2$ pro každé $a \in \mathbf{R}$,
c) $\dim W = 1$ pro $a = b = c = 1$,
$\dim W = 2$ pro $a = b = 1$, $c \neq 1$, resp. pro $a = c = 1$, $b \neq 1$, resp. pro $b = c = 1$, $a \neq 1$,
$\dim W = 3$ v ostatních případech.

[3.4.B17]. a) $\dim W_1 \cap W_2 = 1$; báze např.: $(3,5,1)$,
b) $\dim W_1 \cap W_2 = 2$; báze např.: $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$,
c) $\dim W_1 \cap W_2 = 0$; báze neexistuje,
d) $\dim W_1 \cap W_2 = 2$; báze např.: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

[3.4.B19]. Návod: při důkazech použijte větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů.

[3.4.B20]. Návod: stačí dokázat (proč?), že $\dim V = r + s$ a vektory $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_r,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé. Při tom využijte toho, že součet podprostorů je přímým součtem.

[3.4.B21]. Návod: hledaný podprostor W_2 přímo sestrojte. Využijte přitom skutečnost, že každou lineárně nezávislou posloupnost vektorů z V lze doplnit na bázi celého prostoru V.

[3.4.B23]. a) $(2,-1,0,3)$, b) $(0,-1,3,2)$.

[3.4.B24]. Daný vektor f má v uvažované bázi souřadnice:
a) $(2,-2,\frac{3}{2},-\frac{19}{6},-\frac{26}{3},\frac{142}{3})$, b) $(-1,1,-1,1,-1,0)$,
c) $(0,-3,12,19,10,2)$.

[3.4.B25]. Nekonečně mnoho bází. Jednou z těchto bází je např. báze:

$$\mathbf{e}_1 = (1,1,1)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0,1,2)\,,\ \mathbf{e}_3 = (0,-2,-3)\,.$$

KAPITOLA 4:

MATICE A DETERMINANTY

§1: POŘADÍ A PERMUTACE

[4.1.B1]. a) 19, b) 36.

[4.1.B2]. a) $\frac{1}{2}n(n-1)$, b) $\frac{1}{2}n(n+1)$, c) $n(2n-1)$, d) $2n(n-1)$.

[4.1.B3]. a) $\frac{1}{2}n(3n+1)$, b) $\frac{3}{2}n(n+1)$, c) $\frac{1}{2}n(3n+1)$.

[4.1.B4]. $\frac{1}{2}n(n-1) - I$.

[4.1.B5]. $(r_1 - 1) + (r_2 - 2) + \cdots + (r_k - k) = \sum_{i=1}^{k} r_i - \frac{1}{2}k(k+1)$.

[4.1.B6]. Návod: pro $1 \leq i < j \leq n$ vyšetřujte zvlášť případ $r_i < r_j$ a zvlášť případ $r_i > r_j$.

[4.1.B7]. a) $x = 8$, $y = 3$, b) $x = 2$, $y = 7$.

[4.1.B8]. Zadaná pořadí mají stejnou paritu $\Longleftrightarrow$ n je liché číslo, resp. mají různou paritu $\Longleftrightarrow$ n je sudé číslo.

[4.1.B9]. c) nelze, neboť obě zadaná pořadí jsou sudá.

[4.1.B10]. a) celkem 6 zápisů tvaru:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix},$$

b) celkem 24 zápisů, které je nutno podrobně rozepsat analogickým způsobem, jako při a).

[4.1.B11]. Pro danou permutaci P platí:

a) P je sudá permutace pro $n \equiv 0, 1 \pmod 4$,
resp. P je lichá permutace pro $n \equiv 2, 3 \pmod 4$,

b) P je sudá permutace pro sudé n, resp. lichá permutace pro liché n,

c) P je vždy sudá permutace,

d) P je sudá permutace pro $n \equiv 0, 3 \pmod 4$,
resp. P je lichá permutace pro $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

[4.1.B12]. Výsledné permutace jsou tvaru:

a) $$R \circ P = P \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

b) $$R \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$P \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4.1.B13]. Výsledná permutace je tvaru:

a) $$P \circ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

b) $$P \circ R \circ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

c) $$P^{-2} \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

[4.1.B14]. Hledaná permutace X je jediná a je tvaru:

a) $$X = R^{-1} \circ T \circ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

b) $$X = S^{-1} \circ T \circ R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4.1.B15]. Hledaná permutace X není určena jednoznačně. Po výpočtu dostaneme:

a) 4 permutace tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

b) 8 permutací tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

c) 5 permutací tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

d) 6 permutací tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

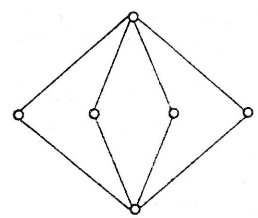
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[4.1.B16]. a) tabulka operace $\circ$ je tvaru:

$\circ$	e	r	s	t	u	v
e	e	r	s	t	u	v
r	r	e	u	v	s	t
s	s	t	e	r	v	u
t	t	s	v	u	e	r
u	u	v	r	e	t	s
v	v	u	t	s	r	e

b) celkem 6 podgrup $(H_i, \circ)$, kde $H_1 = \{e\}$, $H_2 = \{e, r\}$, $H_3 = \{e, s\}$, $H_4 = \{e, v\}$, $H_5 = \{e, t, u\}$, $H_6 = S_3$.

c) hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P}, \subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků):



[**4.1.B17**]. $(\mathcal{S},\circ)$ je grupa, resp. $(\mathcal{T},\circ)$ není grupa.

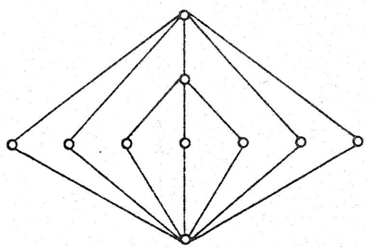
[**4.1.B18**]. a) tabulka operace $\circ$ je tvaru:

$\circ$	e	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
e	e	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
m	m	n	e	r	t	s	u	w	v	o	p	q
n	n	e	m	u	v	w	o	q	p	r	t	s
o	o	q	p	e	n	m	v	u	w	s	r	t
p	p	o	q	s	r	t	e	m	n	v	w	u
q	q	p	o	v	w	u	s	t	r	e	n	m
r	r	s	t	m	e	n	p	o	q	w	u	v
s	s	t	r	p	q	o	w	v	u	m	e	n
t	t	r	s	w	u	v	m	n	e	p	q	o
u	u	w	v	n	m	e	t	r	s	q	o	p
v	v	u	w	q	o	p	n	e	m	t	s	r
w	w	v	u	t	s	r	q	p	o	n	m	e

b) celkem 10 podgrup $(H_i,\circ)$, kde:

$H_1 = \{e\}$, $H_2 = \{e,o\}$, $H_3 = \{e,t\}$, $H_4 = \{e,w\}$,
$H_5 = \{e,m,n\}$, $H_6 = \{e,p,r\}$, $H_7 = \{e,q,u\}$, $H_8 = \{e,s,v\}$,
$H_9 = \{e,o,t,w\}$, $H_{10} = G$.

c) hasseovský diagram uspořádané množiny $(\mathcal{P},\subseteq)$ je tvaru (doplňte si označení jednotlivých prvků):



§2: DETERMINANTY

[**4.2.A1**]. Neexistuje. [**4.2.A5**]. $-9\cdot\sqrt{6}$. [**4.2.A6**]. Celkem 20 submatic. [**4.2.A7**]. Celkem $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$ submatic. [**4.2.A8**]. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[**4.2.B1**]. a) vyskytuje se; má znaménko $-$, b) nevyskytuje se, c) nevyskytuje se, d) vyskytuje se; má znaménko $+$.

[**4.2.B2**]. a) $+$ pro $(i,j) = (2,5)$, resp. $-$ pro $(i,j) = (5,2)$,

b) vždy $+$,

c) $+$ pro $(i,j,k) = (1,6,4),(4,1,6),(6,4,1)$,

resp. $-$ pro $(i,j,k) = (1,4,6),(4,6,1),(6,1,4)$,

d) $+$ pro $(i,j,k) = (4,2,3)$, resp. $-$ pro $(i,j,k) = (4,3,2)$.

[**4.2.B3**]. a) $+a_{12}\cdot a_{34}\cdot a_{21}\cdot a_{43}$, $-a_{12}\cdot a_{34}\cdot a_{23}\cdot a_{41}$,
b) $-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{44}$, $-a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{34}\cdot a_{41}$, $-a_{14}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\cdot a_{42}$.

[**4.2.B4**]. a) vždy $+$,
b) $+$ pro $n \equiv 0,1 \pmod 4$, resp. $-$ pro $n \equiv 2,3 \pmod 4$.

[**4.2.B5**]. a) $-a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{34}\cdot a_{41}$, b) 0.

[**4.2.B6**]. Návod: levou stranu rovnosti upravujte pomocí Věty 2.2., kapitoly IV. přeformulované pro sloupce dané matice a uvědomte si, že ty determinanty, které obsahují dva stejné sloupce, jsou rovny nule.

[**4.2.B7**]. a) 90, b) -46, c) -100, d) -4.

[**4.2.B8**]. a) $-2+2i$, b) $-16+20i$, c) -3, d) $3\sqrt{3}\cdot i$.

[**4.2.B9**]. a) -4, resp. 8, resp. -8,
b) -10, resp. -2, resp. -2.

[**4.2.B10**]. $A_{23} = 59$, resp. $A_{33} = 29$, resp. $A_{41} = 117$.

[**4.2.B11**]. a) -195, b) 18, c) -28, d) 30.

[**4.2.B12**]. a) -105, b) -18.

[**4.2.B13**]. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Poznámka: srovnejte způsob výpočtu se způsobem použitým při výpočtu stejného determinantu ve cvičení [4.2.B22].

[**4.2.B16**]. Návod: užitím Věty 2.2., kapitoly IV. rozložte $|B|$ postupně na součet celkem 2^n determinantů a uvědomte si, že ty determinanty, které obsahují alespoň dva řádky, sestávající pouze z čísel p, jsou rovny nule.

[**4.2.B17**]. Hodnota determinantu závisí na řádu n dané matice, a je rovna:

a) $(x_1 - x_2)\cdot(y_1 - y_2)$ pro $n = 2$, resp. 0 pro $n \geq 3$,

b) $\sin(x_1 - x_2)\cdot\sin(y_2 - y_1)$ pro $n = 2$, resp. 0 pro $n \geq 3$.

[4.2.B18]. a) $-(a_2 + \cdots + a_n)$. Návod: od 1. řádku odečíst ostatní řádky.

b) $n!$. Návod: 1. řádek přičíst k ostatním řádkům.

c) $(2n+1)\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Návod: poslední řádek odečíst od ostatních řádků a potom všechny sloupce přičíst k 1. sloupci.

d) 0. Návod: všechny řádky přičíst k 1. řádku.

[4.2.B19]. a) $a_1\cdot(a_2-1)\cdot\ldots\cdot(a_n-1)$. Návod: poslední řádek odečíst od ostatních řádků a rozvést podle 1. sloupce.

b) $(-1)^{n+1}\cdot n\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$. Návod: všechny sloupce přičíst k 1. sloupci a rozvést podle 1. sloupce.

c) $(-1)^{n+1}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$. Návod: poslední řádek odečíst od ostatních řádků kromě prvního, dále rozvést podle 1. sloupce, dále všechny sloupce přičíst k poslednímu sloupci a nakonec rozvést podle posledního sloupce.

d) $(x + a_1 + \cdots + a_{n-1})\cdot(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1})$. Návod: všechny sloupce přičíst k 1. sloupci, dále vytknout z 1. sloupce, dále 1. řádek odečíst od ostatních řádků a nakonec rozvést podle 1. sloupce.

e) $(x+a_1+\cdots+a_n)\cdot x^{n-1}$. Návod: poslední řádek odečíst od ostatních řádků a pak všechny sloupce přičíst k poslednímu sloupci.

f) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(\frac{n+1}{2})\cdot n^{n-1}$. Návod: od každého řádku odečíst předchozí řádek, dále přičíst všechny sloupce k 1. sloupci a rozvést podle 1. sloupce. Dále postupovat jako ve 4.2.B 18 c).

[4.2.B20]. Návod: ve všech příkladech vždy nejprve odvoďte rekurentní vzorec pro $|A_n|$ a potom matematickou indukcí dokazujte vztah uvedený v zadání. Přitom rekurentní vzorec je tvaru:

a) $|A_n| = 3\cdot|A_{n-1}| - 2\cdot|A_{n-2}|$, pro $n \geq 3$,

b) $|A_n| = 7\cdot|A_{n-1}| - 10\cdot|A_{n-2}|$, pro $n \geq 3$,

c) $|A_n| = (x+y)\cdot|A_{n-1}| - x\cdot y\cdot|A_{n-2}|$, pro $n \geq 3$,

d) $|A_n| = (x+1)\cdot|A_{n-1}| - x\cdot|A_{n-2}|$, pro $n \geq 3$.

[4.2.B21]. Návod: ve všech příkladech vždy nejprve odvoďte rekurentní vzorec pro $|A_n|$ a potom matematickou indukcí dokazujte vztah uvedený v zadání. Přitom rekurentní vzorec je tvaru:

a) $|A_n| = (-1)^{n-1}\cdot x\cdot y^{n-1} - x\cdot|A_{n-1}|$, pro $n \geq 2$,

b) $|A_{2n}| = (x^2-y^2)\cdot|A_{2(n-1)}|$, pro $n \geq 2$,

c) $|A_n| = |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$, pro $n \geq 3$.

[4.2.B22]. Návod: nejprve odvoďte rekurentní vzorec pro $|A_n|$ a potom matematickou indukcí dokazujte vztah uvedený v zadání. Přitom rekurentní vzorec je tvaru:

$$|A_{n+1}| = a_n x^n + |A_n|, \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Poznámka: srovnejte způsob výpočtu se způsobem použitým při výpočtu stejného determinantu ve cvičení [4.2.B13].

[4.2.B23]. Návod: při a) i b) vždy nejprve odvoďte rekurentní vzorec pro $|A_n|$ a potom matematickou indukcí dokazujte vztah uvedený v zadání. Přitom rekurentní vzorec je pro a) i pro b) stejný, a to:

$$|A_n| = 2\cdot\cos x\cdot|A_{n-1}| - |A_{n-2}|, \quad \text{pro } n \geq 3.$$

[4.2.B25]. $|B| = |A|$ pro $n \equiv 0,1 \pmod 4$, resp. $|B| = -|A|$ pro $n \equiv 2,3 \pmod 4$.

[4.2.B26]. Návod: použijte definici determinantu a známá pravidla pro počítání s komplexně sdruženými čísly (tzn. $\overline{u}+\overline{v} = \overline{u+v}$, resp. $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{u\cdot v}$).

[4.2.B27]. Návod: při a) využijte toho, že ze zadání a z předchozího cvičení [4.2.B26] plyne, že $|A'| = \overline{|A|}$.
Při b) hledejte protipříklad např. pro $n = 2$.

[4.2.B28]. Návod: uvědomte si, že ze zadání plyne, že $A' = -A$.

[4.2.B31]. a) -144. Návod: po vytknutí ze 2. řádku matice dostáváme determinant $V(-1,1,2,-2)$.

b) 2880. Návod: po transponování matice dostáváme determinant $V(2,1,-2,3,-1)$.

c) $\prod(x_j - x_i)$, kde $1 \leq i < j \leq n$. Návod: matici transponujte a od každého sloupce, počínaje 2. sloupcem, postupně odečtěte vždy předchozí sloupec.

d) $\prod(x_j - x_i)^2$, kde $1 \leq i < j \leq n$.

§3: ALGEBRA MATIC

[4.3.A5]. Neexistuje. **[4.3.A6].** Neexistuje. **[4.3.A8].** Neexistuje. **[4.3.A9].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[4.3.B1]. a) $\begin{bmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -2+4i & -1+3i & 2+2i \\ 6+8i & 5+5i & 6-2i \\ 3-i & 2-i & -2i \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -2-i & -2+2i & -5-i \\ -1-i & -1 & -3-i \\ -2+i & -1+i & -1+i \end{bmatrix}$.

[4.3.B2].

a) $\begin{bmatrix} 78 & 22 \\ 16 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 11 & 14 & -10 \\ 3 & 21 & 1 \end{bmatrix}$, c) $[6+2i, 6-2i]$, d) $\begin{bmatrix} 4-8i \\ 0 \\ 4-8i \end{bmatrix}$.

[4.3.B3]. a) $\begin{bmatrix} -40 & 40 \\ -72 & 40 \end{bmatrix}$, b) neexistuje, c) 0_{33}.

[4.3.B4]. Návod: důkazy veďte matematickou indukcí s využitím toho, že pro každou čtvercovou matici A platí: $A^n = A \cdot A^{n-1}$.

[4.3.B5]. Pro libovolné $r, s, t, u, v \in T$ je matice X tvaru:

a) $\begin{bmatrix} r & 3s \\ -5s & r+9s \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} r & s & 0 \\ t & u & 0 \\ -3r-t+3v & -3s-u+v & v \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} r & s & t & u \\ 0 & r & s & t \\ 0 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$.

[4.3.B6]. Pro $r, s, t, u, v, w \in \mathbf{R}$ libovolné je:

a) $X = \begin{bmatrix} r & r & -r \\ s & s & -s \\ t & t & -t \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2r & 2s & 2t \\ r & s & t \\ -5r & -5s & -5t \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 2r & 2r & -2r \\ r & r & -r \\ -5r & -5r & 5r \end{bmatrix}$

b) $X = Y = Z = 0_{33}$

c) $X = \begin{bmatrix} r-s & r & s \\ t-u & t & u \\ v-w & v & w \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} r-s & r & s \\ t-u & t & u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[4.3.B7]. Při c) matice X neexistuje, resp. v ostatních případech je hledaná matice X tvaru:

a) $\begin{bmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4-2s & s \end{bmatrix}$, kde $t, s \in T$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

[4.3.B8]. a) $\begin{bmatrix} 6 & -2i \\ -3+2i & 1+i \end{bmatrix}$, b) 0_{33}, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$

d) $A^* = (c_{ij})$, kde $c_{ii} = (n-1+a) \cdot a^{n-2}$, resp. $c_{ij} = -a^{n-2}$, pro $i \neq j$.

[4.3.B9]. a) $-\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}+\sqrt{2}i \\ 2-2i & -4+12i \end{bmatrix}$, b) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$,

c) neexistuje, d) pro $a = 0$ nebo $a = -n$ neexistuje, jinak je:

$A^{-1} = (c_{ij})$, kde $c_{ii} = \dfrac{a+n-1}{a(a+n)}$, resp. $c_{ij} = \dfrac{-1}{a(a+n)}$ pro $i \neq j$.

[4.3.B11]. Návod: uvědomte si, že ve všech případech musí být matice A regulární (proč?), a tedy existuje inverzní matice A^{-1}. Tohoto faktu využijte při úpravách dané maticové rovnice.

[4.3.B15]. Návod: dokazujte,že platí: $(A' \cdot A)' = A' \cdot A$, resp., že platí: $(A \cdot A')' = A \cdot A'$.

[4.3.B16]. Návod: při a) za předpokladu, že matice A je regulární a $A' = A$ dokazujte, že $(A^{-1})' = A^{-1}$.
Při b) postupujte obdobným způsobem.

[4.3.B17]. Návod: při a) za předpokladu, že matice A je regulární a $A' = -A$ dokazujte, že $(A^{-1})' = -(A^{-1})$.
Při b) postupujte obdobným způsobem.

[4.3.B18]. Návod: při a) označte $A = (a_{ij})$, resp. $A \cdot A' = (c_{ij})$ a počítejte prvek c_{ii}.
Při b) hledejte protipříklad např. pro $m = n = 2$.

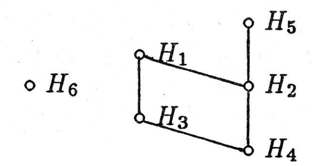
[4.3.B24]. a) ano, b) ne.

[4.3.B25]. a) ano, $\dim W = n$, b) ano, $\dim W = n \cdot (n-1)$,
c) ne, d) ano, $\dim W = n^2 - 1$.

[4.3.B26]. b) $\dim W(S) = \frac{1}{2} n(n+1)$, $\dim W(K) = \frac{1}{2} n(n-1)$.
Návod: při c) stačí dokázat (proč?), že $W(S) \cap W(K) = \{O_{nn}\}$ (kde O_{nn} je nulová matice řádu n) a že $\dim(W(S) + W(K)) = n^2$.

[4.3.B27]. a) H_1, H_2, H_4, H_5 jsou podgrupy, resp. H_3, H_6 nejsou podgrupy.

b) hasseovský diagram uspořádané množiny $(\{H_1, \dots, H_6\}, \subseteq)$ je:



[4.3.B29]. Návod: při a) využijte cvičení [4.3.B28] (část (ii)), dále Cauchyovu větu a skutečnost, že $|A| = |A'|$.

[4.3.B30]. b) není komutativní.

§4: HODNOST MATICE A DALŠÍ VLASTNOSTI MATIC

[4.4.A2]. Platí, že $4 \leq h(A) \leq 6$. **[4.4.A3]**. Platí, že $0 \leq h(A) \leq 3$. **[4.4.A4]**. $5 \leq h(A) \leq 8$. **[4.4.A6]**. Neexistuje. **[4.4.A9]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[4.4.B1]. a) $h(A) = 2$, b) $h(A) = 3$, c) $h(A) = 2$, d) $h(A) = 2$.

[4.4.B2]. a) $h(A) = 2$, b) $h(A) = 3$, c) $h(A) = 1$, d) $h(A) = 1$.

[4.4.B3]. Platí, že $h(A) = 3$ a dále je:

a) $h(B) = 2$, $h(A{\cdot}B) = 0$, b) $h(B) = 3$, $h(A{\cdot}B) = 1$,
c) $h(B) = 3$, $h(A{\cdot}B) = 2$, d) $h(B) = 3$, $h(A{\cdot}B) = 3$.

[4.4.B4]. a) $h(A) = 2$ pro $a = 3, b = 2$ nebo $a = -5, b = 2$, resp. $h(A) = 3$ pro $a \neq 3, -5$ nebo $b \neq 2$,
b) $h(A) = 3$ pro každé $a, b \in \mathbf{R}$,
c) $h(A) = 2$ pro $a = 0, b = 3$, resp. $h(A) = 3$ pro $a = 0, b \neq 3$ nebo $a \neq 0, b = 3$, resp. $h(A) = 4$ pro $a \neq 0, b \neq 3$,
d) $h(A) = 3$ pro $a = 0$ nebo $b = 6$, resp. $h(A) = 4$ pro $a \neq 0, b \neq 6$.

[4.4.B5]. a) $h(A) = 2$ pro $u = -2$ nebo $v = -1 - i$, resp. $h(A) = 3$ pro $u \neq -2, v \neq -1 - i$,
b) $h(A) = 1$ pro $u = -1 + 2i$, $v = -1 - 2i$, resp. $h(A) = 2$ pro $(u = -1 + 2i,\ v \neq -1 - 2i)$ nebo $(u \neq -1 + 2i,\ v = -1 - 2i)$, resp. $h(A) = 3$ pro $u \neq -1 + 2i$, $v \neq -1 - 2i$.

[4.4.B7]. Návod: při a) hledejte protipříklad v $\mathrm{Mat}_{23}(\mathbf{R})$ pro $r = 2$. Při b) lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice M je vytvořena prvními r řádky a prvními r sloupci matice A. Pak k-tý sloupec $(1 \leq k \leq n)$ matice A napište jako lineární kombinaci prvních r sloupců matice A a dále postupujte sporem, tzn. předpokládejte, že $|M| = 0$, neboli řádky matice M jsou lineárně závislé. Po výpočtu vyjde, že prvních r řádků matice A je lineárně závislých, což je spor.

[4.4.B8]. Návod: použijte Větu 4.5.2., kapitoly IV.

[4.4.B9]. Návod: jestliže W_1, resp. W_2, resp. W_3 značí podprostor v T^n, generovaný řádky matice A, resp. B, resp. $A + B$, pak platí, že $W_3 \subseteq W_1 + W_2$ (proč ?). Pomocí tohoto faktu a věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů vyjádřete $h(A + B) = \dim W_3$.

[4.4.B10]. Návod: při a) označte $h(M) = k$ a ukažte, že $s - k \leq m - r$. Při b) hledejte protipříklad např. v $\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$.

[4.4.B11].

a) $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1+i & 1-2i \\ 1+2i & -1-i \end{bmatrix}$, b) $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, d) inverzní matice neexistuje.

[4.4.B12]. Inverzní matice A^{-1} je tvaru:

a) $\begin{bmatrix} -18 & -16 & -11 & 12 \\ -6 & -6 & -4 & 5 \\ -11 & -10 & -7 & 8 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -484 & -726 & 252 & 229 \\ 148 & 222 & -77 & -70 \\ -25 & -38 & 13 & 12 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[4.4.B13]. Inverzní matice A^{-1} je tvaru:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \dots 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \dots 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots 1 & 2-n \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

[4.4.B14]. Návod: při důkazu "$\Longrightarrow$" užijte vztahu: $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ a toho, že když A^{-1} má celočíselné prvky, pak je $|A^{-1}|$ celé číslo. Při důkazu "$\Longleftarrow$" užijte Důsledek věty 3.8., kapitoly IV. a skutečnost, že ze zadání plyne, že adjungovaná matice A^* má celočíselné prvky (proč?).

[4.4.B15]. a) pro $a = 0$; $\dim W = 3$,
b) pro $a = 2$ nebo $a = -7$; $\dim W = 2$.

[4.4.B16]. a) je injektivní zobrazení, není surjektivní zobrazení,
b) oba vztahy platí.

[4.4.B17]. Báze W_1, W_2, $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ (pokud existují) nejsou určeny jednoznačně, resp. pro dimenze platí:

a) $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$,

b) $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$,

c) $W_1 = W_2 = W_1 + W_2 = W_1 \cap W_2$, $\dim W_1 = 2$,

d) $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$,

e) $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$,
tzn. platí: $W_2 \subseteq W_1$,

f) $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$,

g) $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$,
tzn. platí: $W_1 \subseteq W_2$,

h) $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 + W_2) = 5$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

[4.4.B18]. Návod: vyjděte z rovnosti $t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + t_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{o}$, dosaďte za $\mathbf{v}_i$ a použijte lineární nezávislost vektorů obou bází a Cramerovo pravidlo.

[4.4.B20]. a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[4.4.B21]. Hledaná báze (2) je tvaru:
a) $\mathbf{v}_1 = 1 - 5i$, $\mathbf{v}_2 = 5$,
b) $\mathbf{v}_1 = -x^2 - x + 1$, $\mathbf{v}_2 = 3x^2 + 2x$, $\mathbf{v}_3 = -3x$,
c) $V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

[4.4.B22]. Hledaná báze (1) je tvaru:
a) $\mathbf{u}_1 = 6 - \frac{13}{2}i$, $\mathbf{u}_2 = -1 + \frac{3}{2}i$,
b) $\mathbf{u}_1 = (-3-3i, -7+i, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (1+i, 2, 2-2i)$, $\mathbf{u}_3 = (1+4i, 5+2i, 3+3i)$.

[4.4.B23]. Transformační rovnice mají tvar:

$$(x_1, \ldots, x_n)' = A \cdot (y_1, \ldots, y_n)',$$

kde $(x_1, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, \ldots, y_n)$ jsou souřadnice obecného vektoru $\mathbf{x} \in V$ v bázi (1), resp. (2). Přitom:

a) $A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 2+3i & 1+i \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 3+i \\ 0 & 1+i & 2+i \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

KAPITOLA 5:

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

§1: GAUSSOVA METODA ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.1.B1]. Každá soustava má jediné řešení, a to:
a) $(2, -2, 3)$, b) $(1, 2, -4, -3)$, c) $(-1, -1, 0, 1)$,
d) $(1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1)$, e) $(2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$, f) $(2, 0, -2, -2, 1)$.

[5.1.B2]. Každá soustava je neřešitelná.

[5.1.B3]. Každá soustava má nekonečně mnoho řešení, a to:
a) $\{(2-t, 1, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$, b) $\{(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}s-\frac{1}{16}t, s, -\frac{11}{8}t, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$,
c) $\{(1+t, \frac{3}{2}, t, -\frac{1}{2}) \mid t \in \mathbf{R}\}$,
d) $\{(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t, \frac{1}{3}+r+s-\frac{5}{3}t, r, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$,
e) $\{(s, -3-2s+3t, -2+2t, 6-7t, 2t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$,
f) $\{(\frac{1}{2}, 1-s+2t, s, \frac{3}{2}, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$.

[5.1.B4]. Množina všech řešení dané soustavy je tvaru:

a) $\{(3, 0, -5, 11)\}$, b) $\{(3-2t, 0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$,

c) $\emptyset$ (tzn. řešení neexistuje), d) $\{(-1, r, s, t, 2) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$,

e) $\{(t \cdot (1+\sqrt{3}), -\sqrt{3}t, \sqrt{3}, t, \sqrt{5}) \mid t \in \mathbf{R}\}$,

f) $\{(0, r, 1+\sqrt{2}s-\sqrt{3}t, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$.

[5.1.B5]. Množina všech řešení dané soustavy je tvaru:

a) $\{(2,3)\}$, b) $\{(\frac{1+2i}{5}+(8+i)\cdot t, 5t) \mid t \in \mathbf{K}\}$,

c) $\{(\frac{4-3i}{10}-t, \frac{2+i}{10}-(1+i)\cdot t, (2-i)\cdot t) \mid t \in \mathbf{K}\}$, d) $\emptyset$ (řešení neexistuje).

[5.1.B6]. a) pro $a \neq 0$ nemá soustava řešení, resp. pro $a = 0$ má nekonečně mnoho řešení tvaru: $(-\frac{3}{2}-13t, -\frac{7}{2}-19t, 0, 2t)$, kde $t \in \mathbf{R}$,

b) pro $a = 8$ má zadaná soustava nekonečně mnoho řešení tvaru: $(s, 4+2s-2t, 3-2t, t)$, kde $s, t \in \mathbf{R}$, resp. pro $a \neq 8$ má nekonečně mnoho řešení tvaru: $(0, 4-2t, 3-2t, t)$, kde $t \in \mathbf{R}$,

c) pro $a = -2$ nemá soustava řešení, resp. pro $a = 1$ má nekonečně mnoho řešení tvaru: $(1-t-s, t, s)$ kde $t, s \in \mathbf{R}$, resp. pro $a \neq -2, 1$ má jediné řešení tvaru: $\left(\frac{-a-1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)$,

d) pro $a = -2$ nemá soustava řešení, resp. pro $a = 1$ má nekonečně mnoho řešení tvaru: $(1-t-s, t, s)$, kde $t, s \in \mathbf{R}$, resp. pro $a \neq -2, 1$ má jediné řešení tvaru $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$,

e) pro $a = 0, -3$ nemá soustava řešení, resp. pro $a \neq 0, -3$ má jediné řešení tvaru: $\left(\frac{2-a^2}{a(a+3)}, \frac{2a-1}{a(a+3)}, \frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}\right)$,

f) pro $a = 0$ má zadaná soustava nekonečně mnoho řešení tvaru: $(-t-s, t, s)$ kde $t, s \in \mathbf{R}$, resp. pro $a = -3$ má nekonečně mnoho řešení tvaru: (t, t, t) kde $t \in \mathbf{R}$, resp. pro $a \neq 0, -3$ má jediné řešení tvaru: $(2-a^2, 2a-1, a^3+2a^2-a-1)$.

§2: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.2.A2]. Neexistuje. **[5.2.A4].** Neexistuje. **[5.2.A7].** Soustava buď nemá řešení nebo má nekonečně mnoho řešení. **[5.2.A8].** Soustava je neřešitelná. **[5.2.A9].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[5.2.B1]. Daná soustava lineárních rovnic je:
a) neřešitelná, b) řešitelná, má 1 řešení, c) řešitelná, má nekonečně mnoho řešení, d) neřešitelná, e) řešitelná, má 1 řešení, f) řešitelná, má nekonečně mnoho řešení.

[5.2.B2]. a) pro $a = -3$ nemá řešení, resp. pro $a = 1$ má nekonečně mnoho řešení, resp. pro $a \neq -3, 1$ má jediné řešení,

b) pro $a = 0$ nemá řešení, resp. pro $a \neq 0$ má nekonečně mnoho řešení,

c) pro $a+c = b+d$ má nekonečně mnoho řešení, resp. jinak nemá řešení,

d) pro $(d = -2 \wedge a+b+c = 0)$ nebo $(d = 1 \wedge a = b = c)$ má nekonečně mnoho řešení, resp. pro $(d \neq -2, 1 \wedge a, b, c \in \mathbf{R}$ libovolné) má jediné řešení, resp. v ostatních případech nemá řešení,

e) pro $(a = 1 \wedge b, c \in \mathbf{R}$ libovolné) nebo $(a \neq 1 \wedge b = 1 \wedge c \neq \frac{1}{2})$ nemá řešení, resp. pro $(a \neq 1 \wedge b = 1 \wedge c = \frac{1}{2})$ má nekonečně mnoho řešení, resp. pro $(a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge c \in \mathbf{R}$ libovolné) má jediné řešení,

f) pro $(a = b \wedge c \in \mathbf{R}$ libovolné) nebo $(c = 0 \wedge a, b \in \mathbf{R}$ libovolné) nebo $(c = a+b)$ nemá řešení, resp. pro $a \neq b \wedge c \neq 0 \wedge c \neq a+b$ má jediné řešení.

[5.2.B3]. a) $a = 3$, b) žádné a, c) $a \in \mathbf{R}$ libovolné, d) $a \neq 0, -3$.

[5.2.B8]. Návod: všimněte si toho, že v matici A je 1.řádek součtem 2. a 3.řádku. Pak $h(A) = 2$ a platí: $h(\overline{A}) = 2 \iff b_1 = b_2 + b_3$ (proč?).

[5.2.B9]. $a_i \neq 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

[5.2.B10]. a) $(3, 4, 5)$, b) $(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i, -\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i, 2-\frac{3}{2}i)$,

c) nelze řešit Cramerovým pravidlem, d) $(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 1)$,

e) $(-3, 0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, f) $(2, -3, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

[5.2.B11]. $(\frac{2}{c}, \frac{2}{c}, \ldots, \frac{2}{c})$, kde $c = (n-1)\cdot a + b$.

[5.2.B12]. b) $\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$.

[5.2.B13]. a) $\{(2s-t, s, t, 1) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$,

b) $\{(-16+r+s+5t, 23-2r-2s-6t, r, s, t) \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$.

§3: HOMOGENNÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

[5.3.A2]. Neexistuje. **[5.3.A4].** Neexistuje. **[5.3.A5].** $2 \leq \dim W \leq 6$. **[5.3.A8].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[5.3.B1]. Množina všech řešení dané homogenní soustavy je tvaru:

a) $\{(-11t\,,\,-t\,,\,7t)\mid t\in\mathbf{R}\}$, b) $\{0\,,0\,,0\,,t\,,t)\mid t\in\mathbf{R}\}$,

c) $\{(0,0,0,0)\}$, d) $\{(-s+7t\,,\,-s+5t\,,\,s-5t\,,\,2s\,,\,8t)\mid t,s\in\mathbf{R}\}$,

e) $\{(0,0,0)\}$, f) $\{((-1+i)\cdot z\,,\,2z\,,\,(-1+3i)\cdot z)\mid z\in\mathbf{K}\}$.

[5.3.B2]. Množina všech řešení dané homogenní soustavy je tvaru:

a) $\{(-10t\,,\,(a+4)t\,,\,(3a-8)t\mid t\in\mathbf{R}\}$,

b) pro $a=\frac{3}{7}\implies\{(7t\,,\,21t\,,\,39t)\mid t\in\mathbf{R}\}$,

resp. pro $a\neq\frac{3}{7}\implies\{(0,0,0)\}$,

c) pro $a=b=c=d=0\implies\mathbf{R}^4$, resp. jinak $\{(0,0,0,0)\}$,

d) pro $a=2\implies\{(3t\,,\,t\,,\,2t)\mid t\in\mathbf{R}\}$,

resp. pro $a=\frac{1}{6}\implies\{(12t\,,\,-7t\,,\,30t)\mid t\in\mathbf{R}\}$,

resp. pro $a\neq 2,\frac{1}{6}\implies\{(0,0,0)\}$.

[5.3.B3]. Daná homogenní soustava má nenulové řešení pro tyto hodnoty parametru a:

a) $a=-7$, b) žádné a,

c) $a=2$ nebo $a=-3$, d) každé $a\in\mathbf{R}$.

[5.3.B4]. Návod: nejprve určujte dimenzi podprostoru řešení dané soustavy lineárních rovnic.

[5.3.B6]. Pro podprostor řešení W dané homogenní soustavy platí:

a) $\dim W=1$, báze např. $(6,-11,9,-4)$,
b) $\dim W=2$, báze např. $(0,0,3,1)$, $(9,-1,13,0)$,
c) $\dim W=0$, báze neexistuje,
d) $\dim W=2$, báze např. $(7,-6,-3,0,5)$, $(1,2,1,-4,0)$,
e) $\dim W=2$, báze např. $(5,-3,1,0)$, $(-7,4,0,1)$,
f) $\dim W=3$, báze např. $(3,3,0,0,1),(-24,10,0,3,0),(0,1,3,0,0)$.

[5.3.B7]. Pro podprostor řešení W dané homogenní soustavy platí:

a) $\dim W=1$, báze např. $(8+3i\,,\,-3\,,\,2-6i)$,
b) $\dim W=2$, báze např. $(0\,,\,1+3i\,,\,5)$, $(5\,,\,-8+i\,,\,0)$,
c) $\dim W=0$, báze neexistuje,
d) $\dim W=1$, báze např. $(-2\,,\,-2\,,\,1+i)$.

[5.3.B8]. Hledaná homogenní soustava lineárních rovnic je např. tvaru:

a) $x_1-x_2-x_3=0$

b) $$\begin{aligned} x_1-x_2-2x_3\phantom{{}-x_4} &= 0\\ x_1\phantom{{}-x_2}-x_3-x_4 &= 0\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1-x_2 &= 0\\ x_1-x_3+2x_5 &= 0\\ x_1-x_4+2x_5 &= 0\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1-3x_4 &= 0\\ 2x_1-3x_2 &= 0\end{aligned}$$

e) $3x_1-2x_2+x_3-4x_4+3x_5=0$ f) $-5x_1+3x_2+x_3-14x_4=0$

g) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_1+x_4 &= 0\\ 4x_1-x_5 &= 0\end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 22x_1-13x_2+x_3-11x_5 &= 0\\ -13x_1+8x_2+x_4+5x_5 &= 0\end{aligned}$$

[5.3.B9]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne.

[5.3.B10]. a) neexistuje

b) například
$$\begin{aligned} 8x_1+5x_2-x_3 &= 0\\ 6x_1+4x_2+x_4 &= 0\end{aligned}$$

c) například
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &= 0\\ 2x_1+x_3 &= 0\end{aligned}$$

[5.3.B11]. a) ano, $\mathbf{x}=\mathbf{u}+t\cdot(5,-7,5,6)$,
b) $\mathbf{u}$ není řešením dané soustavy,
c) ano, $\mathbf{x}=\mathbf{u}+r\cdot(5,-6,0,0,1)+s\cdot(1,-2,0,1,0)+t\cdot(1,-2,1,0,0)$,
d) ano, $\mathbf{x}=\mathbf{u}$.

KAPITOLA 6:

EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: SKALÁRNÍ SOUČIN, VELIKOST A ODCHYLKA VEKTORŮ

[6.1.A3]. Neexistuje. **[6.1.A4].** Neexistuje. **[6.1.A5].** Neexistují. **[6.1.A6].** Neexistují. **[6.1.A7].** Vektory jsou lineárně závislé (zdůvodněte!). **[6.1.A8].** $0\leq\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leq 2$ (zdůvodněte!).

♣ ♣ ♣

[6.1.B1]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne.
[6.1.B2]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.

[6.1.B3]. a) ne, b) ano, c) ano, d) ne.

[6.1.B4]. a) ne, b) ne, c) ne, d) ano.

[6.1.B5]. a) ano, b) ne, c) ano pro $t > 0$, resp. ne pro $t \leq 0$.

[6.1.B7]. a) 8, b) 15, c) $\sqrt{13}$, d) $4 \cdot \sqrt{2}$.

[6.1.B8]. a) $a = -1$ nebo $a = -\frac{5}{3}$, b) žádné a,
c) $a = -1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $a = -1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$, d) žádné a.

[6.1.B10]. Návod: můžete postupovat několika způsoby, např.:

1. použijete postupu uvedeného v důkazu Schwarzovy nerovnosti.
2. ukážete, že homogenní soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\cdot t_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot t_2 &= 0 \\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot t_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\cdot t_2 &= 0 \end{aligned}$$

má nenulové řešení a pro tyto hodnoty t_1, t_2 pak spočtete skalární součin

$$(t_1\cdot\mathbf{u} + t_2\cdot\mathbf{v})\cdot(t_1\cdot\mathbf{u} + t_2\cdot\mathbf{v}).$$

[6.1.B11]. Návod: uvědomte si, že pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ tvrzení platí a zabývejte se případem $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \ \wedge \ \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$.
Při důkazu "$\Longrightarrow$" po rozepsání rovnosti $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$ vyjde, že $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$.
Při důkazu "$\Longleftarrow$" z předpokladů dostanete, že $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \geq 0$.
V obou případech pak již lehce dokážete požadované vztahy.

[6.1.B12]. Návod: při a) vyjděte z definice lineární závislosti aplikované na vektory $\mathbf{x}, \mathbf{z}$.
Při b) hledejte protipříklad např. v $\mathbf{R}^2$.

[6.1.B16]. Gramův determinant $G(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$
a) se nezmění, b) se vynásobí číslem t^2,
c) se nezmění, d) se nezmění.

§2: ORTOGONÁLNOST

[6.2.A4]. $n \geq 4$. **[6.2.A5].** $k - \dim L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$. **[6.2.A8].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[6.2.B1]. Zadané vektory
a) jsou ortogonální, b) jsou ortonormální,
c) nejsou ortogonální, d) jsou ortogonální.

[6.2.B2]. Zadané vektory jsou ortogonální pro hodnoty:
a) $a = \frac{9}{2}$, $b = -5$, b) $a = b = 0$ nebo $a = b = 1$,
c) žádné a, b, d) $a = -2b$.

[6.2.B3]. $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

[6.2.B4]. Zadané vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$
a) tvoří ortogonální bázi, b) tvoří bázi,
c) tvoří ortonormální bázi, d) netvoří bázi.

[6.2.B7]. Hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:

a) $(1,2,2,-1)$, $(2,3,-3,2)$, $(2,-1,-1,-2)$,

b) $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,-7)$,

c) $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,-3)$, $(4,-2,-2,0)$,

d) $(1,-2,-1,0,1)$, $(1,1,-2,-1,-1)$, $(69,93,36,-63,153)$,

e) $(1,2,0,1,2)$, $(1,0,6,-1,0)$,

f) $(1,-1,0,1,1)$, $(3,-3,4,-1,-5)$, $(27,18,-19,1,-10)$,

g) $(0,0,3,1)$, $(90,-10,13,39)$,

h) $(1,2,1,-4,0)$, $(81,-58,-29,-16,55)$.

[6.2.B8]. Návod: hledaných ortogonálních bází je nekonečně mnoho. Lze např. vyjít od libovolné báze a použít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.

[6.2.B9]. Návod: Hledaných ortogonálních bází je nekonečně mnoho. Lze např. zadané vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ libovolným způsobem doplnit na bázi prostoru $\mathbf{R}^4$ a pak použít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Výsledná ortogonální báze je pak tvořena vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ a dále např. vektory:

a) $(1,0,-1,1)$, $(-1,0,0,1)$ b) $(24,-2,2,9)$, $(0,1,1,0)$

c) $(-7,0,1,0)$, $(0,-1,0,7)$ d) $(-53,21,262,-136)$, $(-15,1,0,6)$.

[6.2.B10]. Návod: hledaná ortonormální báze není určena jednoznačně. Lze např. zadané vektory libovolným způsobem doplnit na bázi prostoru $\mathbf{R}^4$, použít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces a získané vektory nakonec normovat. Hledaná ortonormální báze je pak např.:

a) $\mathbf{e}_1$, $(0,0,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1,0,0)$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(-1,1,0,4)$

b) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot(0,-4,3,1)$, $\frac{1}{3\sqrt{26}}\cdot(-13,5,6,2)$

c) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\frac{1}{5\sqrt{6}}\cdot(-1,-1,2,12)$.

[6.2.B11]. Hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:
a) $(1,1,0)$, $(0,1,2)$, b) $(3,2,-2)$, $(5,8,6)$.

[6.2.B14]. Návod: s využitím výsledku cvičení [6.2.B13] ukažte, že

$$\mathbf{x} \in W \iff \mathbf{x} \in [(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}),\dots,(a_{k1},a_{k2},\dots,a_{kn})]^{\perp}$$

a přejděte k ortogonálním doplňkům.

[6.2.B15]. Báze podprostoru $W^{\perp}$
a) např. $(2,0,1,-1)$, b) např. $(2,2,1,0)$, $(17,10,0,-1)$,
c) neexistuje, d) např. $(3,3,2,7)$, $(3,0,-2,-9)$, $(0,0,1,1)$.

[6.2.B16]. Hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:
a) $(1,0,-1,1,0)$, $(1,3,2,1,-3)$,
b) $(2,1,-1,-1,2)$, $(1,-7,12,7,-19)$, $(1,5,-8,-5,13)$,
c) $(3,-7,1,-5,9)$,
d) $(1,0,1,0,1)$, $(0,1,0,1,0)$.

[6.2.B17]. Hledaných bází je nekonečně mnoho. Jedna z nich je např.:
a) $(0,1,0)$, $(3,4,-1)$, b) $(14,21,-6)$.

[6.2.B18]. Ortogonální projekce je určena jednoznačně, a je rovna:
a) $(\frac{34}{15},-\frac{10}{3},\frac{142}{15})$, b) $(-1,1,-2,3)$, c) $(0,0,0,0)$,
d) $(0,3,0,3)$, e) $(\frac{9}{4},-\frac{5}{4},-\frac{1}{4},-\frac{3}{4})$, f) $(\frac{1}{2},-\frac{5}{2},-1,\frac{1}{2},\frac{5}{2})$,

[6.2.B19]. Ortogonální projekce je určena jednoznačně, a je rovna:
a) $5x^2-10x+2$, b) $2x^2+5$.

[6.2.B21]. Návod: je možno postupovat několika způsoby, např.:

1. dokazovat, že vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s$ jsou lineárně nezávislé (úpravou a použitím výsledku cvičení [6.1.B15]).
2. uvědomit si (viz cvičení [3.3.B10]), že

$$[\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s] = [\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r] + [\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_s]$$

a použít větu o dimenzi součtu a průniku podprostorů.

[6.2.B22]. Návod: z Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu plyne, že:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{w} + \mathbf{u}_i\ , \qquad \text{kde} \quad \mathbf{w} = p_1\cdot\mathbf{e}_1 + \dots + p_{i-1}\cdot\mathbf{e}_{i-1}\,.$$

Pak: $\mathbf{w} \in [\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{i-1}] = [\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{i-1}]$, resp. $\mathbf{e}_i \in [\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{i-1}]^{\perp} = [\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{i-1}]^{\perp}$. Užitím těchto faktů lze již lehce dokázat všechna uvedená tvrzení.

KAPITOLA 7:

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

§1: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ

[7.1.A1]. b) neexistuje. **[7.1.A2].** a) neexistuje. **[7.1.A4].** Neexistuje. **[7.1.A7].** $k=9$, $n\geq 5$. **[7.1.A8].** Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[7.1.B2]. a) není lineární zobrazení, b) injektivní lineární zobrazení, c) surjektivní lineární zobrazení, d) lineární zobrazení, e) injektivní lineární zobrazení, f) není lineární zobrazení.

[7.1.B3]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ne.

[7.1.B4]. a) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = [(1,0,1,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)]$,
b) $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,-1,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^2$,
c) $\operatorname{Ker}\varphi = [(-1,1,0,0,),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}$,
d) $\operatorname{Ker}\varphi = [(-7,1,11,0),(-3,0,5,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(3,5,2),(-1,2,3)]$,
e) $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,3,4)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(-1,1,1,1),(1,0,0,1)]$,
f) $\operatorname{Ker}\varphi = [(-2,0,1,0,0),(-1,0,1,1,0),(1,2,1,1,1)]$,
$\operatorname{Im}\varphi = [(1,2,1),(-1,1,0)]$,
g) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = [(1,0,1,0,\dots,1,0),(0,1,0,1,\dots,0,1)]$,
h) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R}^n$.

[7.1.B5]. b) není injektivní, je surjektivní,
c) $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$, $\dim \operatorname{Im} \varphi = n$, d) báze $\operatorname{Ker} \varphi$ je např.: 1.

[7.1.B6]. b) je injektivní, není surjektivní,
c) $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$, $\dim \operatorname{Im} \varphi = n+1$, d) neexistuje.

[7.1.B7]. a) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (-a+b+\frac{5}{2}c+\frac{1}{2}d\,,\ -2a+b+2c+d)$,

b) $\operatorname{Ker} \varphi = \left\{\begin{bmatrix} t & -3t+3s \\ t-s & 3t-s \end{bmatrix} \mid t,s \in \mathbf{R}\right\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbf{R}^2$,

c) báze $\operatorname{Ker} \varphi$ např.: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, báze $\operatorname{Im} \varphi$ např. $(1,0),(0,1)$,

d) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + r\cdot\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, kde $r,s \in \mathbf{R}$.

[7.1.B8]. b) ano.

[7.1.B9]. a) ano, b) ne, c) ne, d) ne, e) ano, f) ano.

[7.1.B10]. Návod: při a) doplňte vektory $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ na bázi celého prostoru V a použijte základní větu o lineárních zobrazeních.
Při b) dokazujte implikaci "$\Longrightarrow$" nepřímo a zkonstruujte dvě různá lineární zobrazení s požadovanými vlastnostmi.

[7.1.B15]. Návod: nejprve dokazujte, že zobrazení $\psi \circ \varphi$ není surjektivní (při tom si uvědomte, že $\dim \psi(V') \le \dim V' < \dim V$). Dále dokazujte, že zobrazení $\psi \circ \varphi$ není injektivní (užitím Věty 1.7., kapitoly VII. a již dokázaného faktu, že $\psi \circ \varphi$ není surjektivní, tzn., že $\dim \operatorname{Im}(\psi \circ \varphi) < \dim V$).

§2: LINEÁRNÍ TRANSFORMACE A JEJÍ MATICE

[7.2.A1]. b) neexistuje. **[7.2.A4].** b) neexistuje. **[7.2.A6].** a) neexistuje. **[7.2.A8].** Neexistují.

♣ ♣ ♣

[7.2.B2]. Návod: je-li $\mathbf{e}$ pevnou bází prostoru V, pak existuje $t_0 \in T$ tak, že $\varphi(\mathbf{e}) = t_0\cdot\mathbf{e}$. Ukažte, že t_0 splňuje požadovanou vlastnost.

[7.2.B3]. a) např. $\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$, b) např. $W_1 = L(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$, $W_2 = L(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3)$.

[7.2.B4].

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 16 & \frac{17}{2} & \frac{47}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -9 & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$.

[7.2.B5].

a) $\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

[7.2.B6].

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[7.2.B7]. b) matice lineární transformace φ, resp. ψ je tvaru:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

[7.2.B8].

a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -6 & -9 & -5 \\ 6 & 10 & 6 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

[7.2.B9]. a) $\mathbf{x} = (-1,2,0) + t\cdot(1,-1,1)$ pro $t \in \mathbf{R}$,
b) žádné $\mathbf{x}$, c) $\mathbf{x} = (3,4,4)$.

[7.2.B10]. Jádro a obraz dané lineární transformace je:
a) $\operatorname{Ker} \varphi = [(1,0,2),(0,1,3)]$, $\operatorname{Im} \varphi = [(1,0,-3)]$,
b) $\operatorname{Ker} \varphi = [(1,1,-2)]$, $\operatorname{Im} \varphi = [(1,2,0),(3,4,2)]$,
c) $\operatorname{Ker} \varphi = [x^2+2x+3]$, $\operatorname{Im} \varphi = [x^2+x+1\,,\ x+2]$.

[7.2.B11]. Platí:
a) pro $a = 0$ je $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$,
pro $a \neq 0$ je $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$ a $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$,
b) báze $\operatorname{Ker} \varphi$ je např.: $\mathbf{u}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{u}_3$,
báze $\operatorname{Im} \varphi$ je např.: $3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_3\,,\ \mathbf{u}_2$.

[7.2.B12]. Hledaný automorfizmus je:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2\,,\ 3x_1 - 2x_2\,,\ -x_1 + x_2 + x_3)\,.$$

[7.2.B13]. a) hledané lineární transformace jsou:

$$(\varphi + \psi)((x_1, x_2)) = (3x_1 + x_2\,,\ 2x_1 + 2x_2)\,,$$
$$(\varphi \circ \psi)((x_1, x_2)) = 3\cdot(x_1 + x_2\,,\ -x_2)\,,$$
$$(\psi \circ \varphi)((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2\,,\ 5x_1 - 2x_2)\,,$$
$$(3 \cdot \varphi)((x_1, x_2)) = 3\cdot(2x_1 + x_2\,,\ x_1 - x_2)\,,$$

b) maticemi lineární transformace φ, resp. ψ, resp. $\varphi+\psi$, resp. $\varphi\circ\psi$, resp. $\psi\circ\varphi$, resp. $3\cdot\varphi$ jsou po řadě matice:

$$\begin{bmatrix} -14 & -23 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -39 & -63 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & -13 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -42 & -69 \\ 27 & 45 \end{bmatrix}.$$

[7.2.B14]. $C = \begin{bmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{bmatrix}.$

[7.2.B15]. $C = \begin{bmatrix} 109 & 34 \\ 93 & 29 \end{bmatrix}.$

[7.2.B18]. b) $\dim \mathcal{H} = n \cdot (n-k)$.

[7.2.B20]. a) ano, b) ne (zde je $|A| \neq |B|$).

[7.2.B21]. Hledaná matice S není určena jednoznačně. Např. je:

a) $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, b) $S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$.

[7.2.B23]. Návod: při a) si uvědomte, že je-li např. A regulární maticí, pak lze psát: $A\cdot B = A\cdot B\cdot A\cdot A^{-1}$, odkud již lehce plyne tvrzení. Část b) neplatí (stačí např. vymyslet matice $A, B \in \mathrm{Mat}_{nn}(T)$ tak, že $A\cdot B = 0_{nn}$, ale $B\cdot A \neq 0_{nn}$).

[7.2.B24]. a) $\lambda^2 - 6\lambda + 13$; reálné kořeny neexistují,

b) $\lambda^2 - 6\lambda + 13$; $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$,

c) $-\lambda^3 + 8\lambda^2 + 9\lambda$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 9$,

d) $-\lambda^3 - 14\lambda$; $\lambda_1 = 0$.

[7.2.B25]. Návod: rozepište determinant $|A - \lambda\cdot E_n|$.

[7.2.B26]. Návod: využijte toho, že $|A - \lambda\cdot E_n| = |(A - \lambda\cdot E_n)'|$.

§3: VLASTNÍ VEKTORY A VLASTNÍ HODNOTY LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

[7.3.A5]. Neexistuje. **[7.3.A8]**. Neexistuje. **[7.3.A9]**. Neexistuje.

♣ ♣ ♣

[7.3.B1]. a) ne, b) ano.

[7.3.B2]. Návod: nejprve dokazujte, že $\varphi(W)$ a U jsou podprostory ve V a potom dokazujte, že $\varphi(W)$ a U jsou invariantní vzhledem k φ (přitom využijte předpoklad, že $\varphi(W) \subseteq W$).

[7.3.B3]. Návod: při b) si uvědomte, že ze zadání a z a) plyne, že $\varphi^{-1}(W) = W$.

[7.3.B4]. Vlastní hodnoty jsou:

a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$,

c) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, d) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$,

e) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Vlastní vektory jsou tvaru:

a) $t\cdot(1,0,-1)$, resp. $t\cdot(1,1,-1)$, resp. $t\cdot(0,-1,1)$, kde $t \neq 0$,

b) $t\cdot(2,-1,1)$, kde $t \neq 0$,

c) $t\cdot(3,5,6)$, kde $t \neq 0$, resp. $t_1\cdot(2,1,0)+t_2\cdot(1,0,-1)$, kde t_1, t_2 nejsou současně rovny nule,

d) $t\cdot(1,2,1)$, resp. $t\cdot(3-3i, 5-3i, 4)$, resp. $t\cdot(3+3i, 5+3i, 4)$, kde $t \neq 0$,

e) $t_1\cdot(1,1,0,0) + t_2\cdot(1,0,1,0) + t_3\cdot(1,0,0,1)$, kde t_1, t_2, t_3 nejsou současně rovny nule, resp. $t\cdot(-1,1,1,1)$, kde $t \neq 0$,

f) $t_1\cdot(0,1,0,0) + t_2\cdot(0,0,1,0)$, kde t_1, t_2 nejsou současně rovny nule, resp. $t\cdot(0,0,0,1)$, kde $t \neq 0$.

[7.3.B5]. a) $(-\lambda)^{n+1}$, b) vlastní hodnoty: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n+1} = 0$; vlastními vektory jsou všechny nenulové konstantní polynomy.

[7.3.B6]. Návod: při důkazu "$\Longrightarrow$" vezměte bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru V a uvědomte si, že podle předpokladu platí:

$$\varphi(\mathbf{u}_i) = \lambda\cdot\mathbf{u}_i \ \wedge\ \varphi(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n) = \lambda\cdot(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n)\,.$$

Z lineární nezávislosti vektorů báze však plyne, že $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, odkud již lehce dostanete, že $\lambda = t_0$.

[7.3.B9]. $\{\mathbf{o}\}$, $[\mathbf{u}_1]$, $[\mathbf{u}_2]$, $\mathbf{R}^2$.

[7.3.B11]. Návod: důkaz "$\Longrightarrow$" veďte sporem a využijte toho, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ musí být lineárně nezávislé (proč?).

[7.3.B12]. a) $\{\mathbf{o}\}$, resp. $[3\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3]$, resp. V,
b) $\{\mathbf{o}\}$, resp. $[2\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3]$, resp. libovolný 1-dimenzionální podprostor v $[\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3]$, resp. libovolný 2-dimenzionální podprostor obsahující vektor $2\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$, resp. $[\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3]$, resp. V.

[7.3.B13]. Návod: uvědomte si, že

$$|A-\lambda E_n| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+|A|$$

a zároveň podle předpokladu $|A-\lambda E_n| = (\lambda_1-\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda)$, tzn.

$$|A-\lambda E_n| = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n).$$

Pak porovnáním koeficientů u λ^{n-1} a λ^0 dostanete vztahy a), b).
Při důkazu c) si uvědomte, že:

$$|A-\lambda E_n| = (\lambda_1-\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda)$$
$$|A+\lambda E_n| = |A-(-\lambda)E_n| = (\lambda_1+\lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n+\lambda)$$

a vynásobte levé a pravé strany obou rovností.

[7.3.B15]. Návod: uvažte např. lineární transformace φ, resp. ψ zadané maticemi A, resp. B tvaru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pak zřejmě $\lambda_1 = 1$ je vlastní hodnotou φ, resp. $\lambda_2 = -1$ je vlastní hodnotou ψ, ale $\lambda_1+\lambda_2 = 0$ není vlastní hodnotou $\varphi+\psi$, jak plyne z tvaru matice $A+B$.

§4: ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ, ORTOGONÁLNÍ MATICE

[7.4.A2]. Neexistuje. **[7.4.A3].** Neexistuje. **[7.4.A4].** $\dim V = 0$, resp. $\dim V' \geq 0$. **[7.4.A6].** Neexistuje. **[7.4.A7].** Celkem 8 matic.

♣ ♣ ♣

[7.4.B1]. a) ano, b) ne, c) ano, d) ne, e) ne, f) ano.

[7.4.B6]. Návod: uvědomte si, že jestliže $\mathbf{u}$ je bází prostoru V, pak $\varphi(\mathbf{u}) = r\cdot\mathbf{u}$, přičemž však (podle Věty 4.4.3., kapitoly VII.) musí být $r = \pm 1$.

[7.4.B9]. Návod: při důkazu využijte výsledku cvičení [7.4.B8].

[7.4.B13]. a) ne, b) ano, c) ne, d) ano.

[7.4.B14]. a) buď $r = \frac{1}{\sqrt{3}}, s = \frac{1}{\sqrt{6}}, t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\det A = 1$

nebo $r = -\frac{1}{\sqrt{3}}, s = -\frac{1}{\sqrt{6}}, t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\det A = -1$,

b) buď $r = \frac{1}{3}, s = \frac{2}{3}, t = \frac{2}{3}$ a $\det A = 1$

nebo $r = -\frac{1}{3}, s = -\frac{2}{3}, t = -\frac{2}{3}$ a $\det A = -1$.

[7.4.B15]. a) ano, b) ne.
Matici A není nutné počítat, ale stačí pouze ověřit, zda jsou obě báze ortonormální.

LITERATURA

[1] BEČVÁŘ, J.: Úvod do algebry, skriptum UK, fakulta matematicko-fyzikální, Praha 1984

[2] BIRKHOFF, G.-MAC LANE, S.: Prehľad modernej algebry, (slovenský překlad), Alfa, Bratislava 1979

[3] BUKOVSKÝ, L.: Množiny a všeličo okolo nich, Alfa, Bratislava 1985

[4] DURBIN, J.R.: Modern Algebra (anglicky), John Wiley & Sons, New York 1985

[5] FLACHSMEYER, J.-PROHASKA, L.: Algebra (německy), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978

[6] GLEICHGEWICHT, B.: Algebra (polsky), Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983

[7] HORÁK, P.: Algebra a teoretická aritmetika I., skriptum UJEP, fakulta přírodovědecká, Brno 1987

[8] KATRIŇÁK, T.: Algebra a teoretická aritmetika I., Alfa, Bratislava 1985

[9] LEGÉŇ, A.: Grupy, okruhy a zväzy, Alfa, Bratislava 1980

[10] NOVOTNÝ, M.: S algebrou od jazyku ke gramatice a zpět, Academia, Praha 1988

SBÍRKY PŘÍKLADŮ

[11] BICAN, L.: Lineární algebra v úlohách, skriptum UK, fakulta matematicko-fyzikální, Praha 1979

[12] BICAN, L.-NĚMEC, P.-TRCH, M.: Sbírka úloh z algebry pro učitelské studium, skriptum UK, fakulta matematicko-fyzikální, Praha 1984

[13] FADDEJEV, D.K.-SOMINSKIJ, I.S.: Zbierka úloh z vyššej algebry (slovenský překlad), Alfa, Bratislava 1968

[14] LOMNICKI, A.-MAGDOŃ, M.: Algebra liniowa z geometrią analityczną w zadaniach (polsky), Wydawnictwo naukowe WSP, Kraków 1986

[15] KAPRÁLIK, P.-TVAROŽEK, J.: Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie, Alfa, Bratislava 1987

[16] KOSTRIKIN, A.I.: Sbornik zadač po algebre (rusky), Nauka, Moskva 1987

[17] PROSKURJAKOV, I.V.: Sbornik zadač po linějnoj algebre (rusky), Nauka, Moskva 1984

[18] PYTLÍČEK, J.: Cvičení z algebry a geometrie, skriptum ČVUT, fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Praha 1985

[19] SVÄTOKRÍŽNY, P.: Lineárna algebra v úlohách, Alfa, Bratislava 1985

[20] SZYMICZEK, K.: Zbiór zadań z teorii grup (polsky), Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1989

O B S A H