MA3, část 1: Nekonečné řady - otázky ke zkoušce (odkazy na SC = sobory cvičení … viz text Dula, Hájek: cvičení – nekonečné řady)

Otázka 1: **co je to součet nekonečné řady (definice)?**
SC 01- a,b,g,h,i,02-a,f,g,03-a,b,c

soubor cvičení 1: udělejte a),b)g) (součet pomocí geometrické řady), h),i) (převod desetinného čísla na zlomek)

soubor cvičení 2: udělejte a) (najdete ve skriptech Novák-Došlá jako řešený příklad, tuto řadu, způsob řešení a součet si zapamatujte), f) g) (f a g podobně jako řešený př. 4/str.10, je důležité vidět, že log 2 je konstanta, a že sin(a) je konstanta, kterou lze násobit celou řadu ... převedeme na případ typu a) s tím, že součet s_n násobíme vhodnou konstantou)

soubor cvičení 03: udělejte a),b),c) rozkladem na parciální zlomky

Otázka 2: **kritéria konvergence pro řady s kladnými členy** SC 04-a,b,c,d,e,f,05-a,b,06-f,j

Řady s kladnými členy, kritéria konvergence ... nemusíte dělat Raabeovo a limitní Raabeovo kritérium, jinak ostatní kritéria ano; pak udělejte
soubor cvičení 04: a,b,c,d ... srovnávací kritérium + e,f ... podílové (i limitní) kritérium
soubor cvičení 05: a,b ... odmocninové (i limitní) kritérium
soubor cvičení 06: f,j ... integrální kritérium

Otázka 3: **kritérium konvergence pro alternující řady, absolutní a neabsolutní konvergence**
SC 07-a,b,d,f, 08-a,b,c,e, 10-a,b,c,d,e,f,g,h,i

musíte umět: Leibnizovo kritérium, definici neabsolutní konvergence,

musíte znát větu: z absolutní konvergence plyne i neabsolutní konvergence řady (tj. když dokážeme absolutní konvergenci řady, konvergence příslušné alternující řady už z toho plyne)

Leibnizovo kritérium:
soubor cvičení 07: a),b),d),g)

absolutní a neabsolutní konvergence:
soubor cvičení 08: a,b,c,d

nedělejte soubor cvičení 09 (Abelovu a Dirichletovu podmínku)

soubor cvičení 10: opakování, udělejte všechno kromě příkladu j) (pozor, příklad 10-f konverguje, výsledek není v textu dobře ... limita vyjde menší než jedna podle limitního podílového kritéria)

Otázka 4: **řady funkcí - obor konvergence**

musíte znát: jak se určí na základě podílového krit. nebo odmocninového krit. obor konvergence řady funkcí

nekonečné řady funkcí (soubory cvičení jsou znovu číslovány od čísla 1, k číslu jsou přidány další dvě nuly, aby bylo naznačeno že se jedná o soubor cvičení v hlubině textu, v jeho druhé půlce):
soubor cvičení 0001 - určete obor konvergence, podílové kritérium ... b,c,f
soubor cvičení 0002 - určete obor konvergence, odmocninové kritérium ... b),d) (pozor, i krajní bod (-4/3) patří do oboru konvergence, ve výsledku ve skriptech je chyba)

nedělejte soubor cvičení 0003 (ověření stejnoměrné podmínky konvergence)

Otázka 5: **řady funkcí - stejnoměrná konvergence, Weierstrassovo kritérium, integrace a derivace řady člen po členu**

SC 0004-a,b,c ... příklady Na Weierstrassovo kritérium (řešení př. c ... může být i celé R, důkaz pomocí lokálních extrémů);
SC 0005-a,b,c, a také řešené příklady 07,08-str.38-39;
SC 0006-a,d,e ... POZOR, příklad 6e je vysvětlen až v otázce 8, jedná se o binomickou řadu)

musíte znát: a) definici stejnoměrné konvergence (pomocí obrázku), Weierstrassovo
kritérium: co říká? co zaručuje? (integraci či derivaci dané řady člen po členu na daném oboru stejnoměrné konvergence)

Otázka 6: **mocninné řady**

musíte umět: a) vzorec pro poloměr konvergence mocninné řady R=1/ró, kde ró vypočteme jako limitu podle limitního odmocninového nebo podílového kritéria ...
žádné příklady zde nejsou, protože se jedná o speciální případ otázky 4

b) větu: mocninná řada ve vnitřních bodech svého oboru konvergence konverguje stejnoměrně (když tuto větu napíšete, nemusíte už stejnoměrnou konvergenci nijak jinak dokazovat) ... žádné příklady zde nejsou, pouze se jedná o speciální případ otázky 5

Otázka 7: **Rozvoj funkce do Taylorovy nebo Maclaurinovy nekonečné řady**

SC 0007-a,b,c; 0008-b,c,f, pročtěte si též úvod a řešené příklady ve sbírce před těmito soubory cvičení

musíte umět vzorec pro Taylorovu a Maclaurinovu řadu a odpověď na otázku, k čemu jsou potřeba (vzorce se hodí na rozvoj funkce v nekonečnou řadu, a pak pro přibližný výpočet funkčních hodnot jen pomocí sčítání, násobení a dělení (kalkulačka) nebo pro výpočet určitých integrálů některých obtížně integrovatelných funkcí);

Otázka 8: Binomická řada (1+x)^(alfa)=... tato řada je speciální případ Taylorovy řady pro rozvoj funkce (1+x)^(alfa) a je užitečná pro rozvoj některých funkcí v nekonečnou řadu, a tedy např. pro výpočet přibližných hodnot těchto funkcí;

objevuje se v SC 0006, příklad e, a v SC 0009, příklady a,b,c (nejprve teorie a řešené příklady na str. 52-53).

musíte umět: vzorec binomické řady pro obecné alfa, pak se Vám snadno budou rozvíjet následující funkce:
odmocnina z (1+x) ... alfa = 1/2
odmocnina z (1-x) ... alfa = 1/2, subst. t=-x
odmocnina z 1/(1+x) ... alfa = -1/2
odmocnina z 1/(1-x) ... alfa=-1/2, subst. t=-x
odmocnina z 1/(1-x^2) ... alfa=-1/2, subst. t=-x^2
integrací předchozího řádku dostaneme rozvoj funkce arcsin x ... remember!

Otázka 9: přibližný výpočet funkční hodnoty rozvojem do nekonečné řady + odhad chyby výpočtu

užití mocninných řad + integrace pomocí řad:
soubor 09: udělejte a),g),h)
soubor cvičení 10: udělejte c),i) (pozor, konstanta C ve výsledku př. c nemá být, jedná se o určitý integrál)

spočítejte a zapamatujte si ještě příklady 1.23-1.27 ze souboru strojarna02.pdf, který najdete v ISu pro přednášku - Musíte umět: jak odhadnout velikost zbytku řady pomocí Majorantní řady, kterou umíme sečíst (př. 1.23); b) integrálního kritéria (př. 1.24, 1.26), c) Leibniz.kritéria (př. 1.25, 1.27).

Otázka 10: schopnost rozvinout řadu ze vzorce do prvních pěti členů VERSUS schopnost rozvinutou řadu zapsat vzorcem pro n
(procvičeno částečně v sadě SC 10 ... v první SC s číslem 10, v první polovině sbírky).

MA3, část 2: Obyčejné diferenciální rovnice - otázky ke zkoušce (teoretické otázky se odkazují na anglický text Erwin Kreyszig (viz IS), příklady na SC = sobory cvičení … na text Dula, Hájek: cvičení – obyčejné diferenciální rovnice)

Otázka 11: **ODR 1.řádu základní pojmy: řešení ODR na intervalu, obecné řešení, partikulární řešení, singulární řešení (**= řešení, které nezískáme z postupu obecného řešení, protože se jedná o řešení v situaci, kdy v obecném postupu dělíme nulou**), počáteční úloha pro ODR 1.řádu** … Kreyszig str. 4, str.6

str. 6-10 ve sbírce ODR prostudovat, pak
soubor cvičení 01: příklady a,b,c, … ODR se separovatelnými proměnnými
soubor cvičení 02: příklady a,b,c,d … ODR se separovatelnými proměnnými, počáteční úloha
(příklad b … y=arccos(1/(odmocnina ze 2 krát sin(x)))
(příklad c … obecné řešení je e na k krát odmocnina ze zlomku, ale počáteční podmínku splňuje singulární řešení, které nezískáme z obecného vzorce, ale protože jsme dělili při úpravě funkcí ln(y), musíme ji zvlášť probrat ln(y)=0 pro y(x)=1 … tato funkce je řešením, což zjistíme dosazením do rovnice)
(příklad d … ve sbírce je trochu křečovité vyjádření výsledku … je dobře, ale možná někomu vyšlo y= druhá odmocnina z 2*[ln (1+e^x) +1/2 -ln2], a to je taky dobře, jen jiný tvar)

str. 12-14 ve sbírce prostudovat,
pak soubor cvičení 04: příklady a,b,c,d … substitucí y/x=z převedeme na separovatelnou rovnici
(příklad a … řešení má být: y=x*e^(kx) … konstanta k je v exponentu)
(příklad c … řešení je dobře, ale někdo by jej ještě chtěl vyjádřit v explicitním tvaru y=(2x+cx^4)/(1-cx^3)
(příklad d … výsledek ve skriptech se nezdá dobře, správně je y=(-x)/(c+ln|x|))

str.21 dole - str 25 prostudovat, pak
soubor cvičení 06: příklady a,b,c,d,f,g … lineární ODR 1.řádu
(příklad b … výsledek ve skrptech je dobře, ale určitě byste jej chtěli vyjádřit ve tvaru y=c/(1+x^2)^2 + (3x+x^3)/(1+x^2)^2)

Otázka 12: **model 01 – model exponenciálního růstu, model exponenciálního úbytku (včetně pojmu „poločas rozpadu“)**
Kreyszig str.5-example 3, str. 7-example 5 (poločas rozpadu = „half-life“ … př. 21 na str. 9, výsledek je v IS v souboru Kreyszig-dodatky)

Otázka 13: **Geometrický význam ODR 1.řádu … směrové pole** … Kreyszig str.9-10 (včetně obrázku b) s vrstevnicemi = izoklinami)

Otázka 14: **model 02 – radiokarbonové datování pro známý poločas rozpadu, model 03 – model míchání a rozpouštění soli** … Kreyszig str.13-14 … podrobně vysvětlete sestavení ODR a její řešení v jednom z těchto dvou modelů

Otázka 15: **Existence a jednoznačnost řešení pro počáteční úlohu ODR 1.řádu** … Kreyszig str.37-40 (včetně obrázku 27 na str. 40)

Otázka 16: **ODR 2.řádu základní pojmy – lineární ODR 2. řádu homogenní a nehomogenní, princip superpozice pro homogenní rovnici, obecné a partikulární řešení, počáteční úloha pro ODR 2.řádu** (počáteční podmínky jsou dvě … jaké?) … Kreyszig str.45-50 (včetně example 5 na str. 50)

Cvičení na ODR 2.řádu: str. 50-69 ve skriptech vše prostudujte včetně řešených příkladů, soubory cvičení SC 18 až SC 26 tyto příklady samostatně spočítejte:

SC 18 ... příklady a,b,c,g,h,i … homogenní LODR-2-KK

SC 19 ... příklady a,b,c,d … nehomogenní LODR-2-KK metodou variace konstant
(příklad a … ve výsledku je chyba, chybí ještě odečíst x*e^x od toho, co tam je; ale vzhledem k tomu, že lze odečítanou funkci (-1) x*e^x "schovat"=sloučit do výrazu (cé dva)*x*e^x, je výsledek ve skriptech vlastně dobře)
(příklad c … ve výsledku je chyba, chybí ještě odečíst funkci e^x od toho, co tam je; ale vzhledem k tomu, že lze odečítanou funkci (-1)e^x "schovat"=sloučit do výrazu (cé jedna)*e^x, je výsledek ve skriptech vlastně dobře)

SC 20 ... příklady a,b,c,d,i … nehomogenní LODR-2-KK metodou neurčitých koeficientů – část 1:
Pohlédnutím do výsledku ve skriptech lze tak trochu v sadách 20 až 26 odtušit, zda vaše volba yp byla správná
(příklad d … výsledek ve skriptech je nyní opravdu špatně, správně má být y=c1*e^(-5x)+c2*e^x-1/5)

SC 21 ... příklady a,b,c,d … nehomogenní LODR-2-KK metodou neurčitých koeficientů – část 2
SC 22 ... příklady a,b,c,d … nehomogenní LODR-2-KK metodou neurčitých koeficientů – část 3

SC 23 ... příklady a,b,c … nehomogenní LODR-2-KK metodou neurčitých koeficientů – část 4
(příklad a metodou neurčitých koeficientů: volíme
Yp=(ax+b)*x*cos x + (cx+d)*x*sin x … a pak porovnáme po dosazení koeficienty u cos x na obou stranách, u x*cos x na obou stranách, u sin x na obou stranách, u x* sin x na obou stranách … tak dostaneme čtyři rovnice pro čtyři neznámé a,b,c,d, výsledek ve skriptech je dobře)
(příklad b metodou neurčitých koef: volíme
Yp=(ax+b)*cos x + (cx+d)*sin x, po dosazení porovnáme podobně jako v případě a), dostaneme čtyři rovnice pro neznámé a,b,c,d, výsledek je dobře)

SC 24/ str. 63, příklady: a,b,c,f,g … nehomogenní LODR-2-KK metodou neurč. koeficientů – část 5
(příklad a … volíme yp=a+ x*(b*cos x + c*sin x)
(příklad b … volíme yp=a*e^(-x)+ b*e^(-x)*x)
(příklad c … volíme yp=ax+b+c*e^(-x))
Ty volby yp jsou víceméně jasné z výsledků, které jsou všechny dobře
(příklad f … zkuste yp i metodou variace konstant jako v sadě 19, měl by vám vyjít stejný celkový výsledek dané počáteční úlohy, protože řešení počáteční úlohy LODR-2-KK je jediné)

Cvičení na LODR-n-KK řádu vyššího než 2:
SC 24/str.66 (mylně očíslovaná série stejným číslem), příklady a,b,g,h
SC 25/str. 68, příklady a,b,c
(příklad a … poslední člen výsledku ve skriptech má být x^4/6, nikoli x^4/16)

Otázka 17: **Eulerův vzorec – dokažte rozvojem v nekonečné řady**
… Kreyszig str.58, vzorec (11): $e^{it} = \cos t + \sin t$

Otázka 18: **Model 04 – oscilace tělesa na pružině, tlumená a netlumená volná (nevynucená) oscilace** … Kreyszig str.61-67 (včetně nějakých obrázků grafu řešení, zejména obr. 34 a obr. 38)

Otázka 19: **Existence a jednoznačnost počáteční úlohy pro ODR 2.řádu homogenní, Wronskián; věta o obecném řešení homogenní úlohy** … Kreyszig str.73-79

Otázka 20: **Řešení ODR metodou mocninné řady … spojení obou oblastí tohoto předmětu v jednu metodu!!!** … Vysvětlete na řešení jednoho příkladu Došlá,Novák: Nekonečné řady (viz IS), str.85-89.

Info ke zkoušce: zkouška bude mít teoretickou i praktickou část, podmínkou absolvování zkoušky je napsat každou z částí aspoň na 40 procent; celková doba trvání je 90 minut. Žádná ústní část se v tomto předmětu nekoná.

Otázky ke zkoušce jsou skutečně otázky, tj. student by na ně měl být schopný v písemné teoretické části patřičně = samostatně reagovat. Příklad otázky:

- Otázka 13: vysvětlete na příkladu a na obrázku řešení ODR graficky pomocí směrového pole
- Otázka 18: sestavte ODR oscilace tělesa na pružině (včetně obrázku), vysvětlete označení a uveďte řešení této ODR (včetně obrázku)