MASARYKOVA UNIVERZITA
fakulta pedagogická

Cvičení z matematické analýzy
Nekonečné řady

Jiří Hájek
Jiří Dula

Brno 1994

ISBN 80-210-0385-5

P ř e d m l u v a

Předložené skriptum je určeno pro posluchače 3.ročníku interního studia i studia při zaměstnání učitelských kombinací s matematikou.

Tématicky je rozvrženo do dvou částí, které jsou předmětem výkladu základního kursu z matematické analýzy. První z nich studuje nekonečné řady v oboru reálných čísel. Po uvedení základních pojmů si podrobněji všímé číselných řad s kladnými členy a řad alternujících. Závěr kapitoly je věnován důležitému pojmu absolutní a neabsolutní konvergence řady čísel.

Druhý tématický celek "Nekonečné řady funkcí v oboru reálných čísel" přirozeně navazuje (a v jistém smyslu zobecňuje) na celek předchozí. Po přehledném uvedení základních pojmů a vlastností posloupností a řad funkcí je pozornost věnována mocninným řadám, zvláště pak řadě Taylorově a Maclaurinově. Závěr kapitoly podává typické ukázky užití teorie mocninných řad - přibližný výpočet funkčních hodnot, možnosti integrace užitím mocninných řad. Poslední část aplikací uvádějící možnosti přibližného určování obecného případně partikulárního řešení diferenciálních rovnic navazuje a v jistém smyslu rozvíjí tématický celek o diferenciálních rovnicích, který je součástí učebního plánu matematické analýzy předchozího ročníku učitelského studia.

Závěrečný tématický celek uvádí stručnou informaci o základních pojmech a metodách práce s nekonečnými řadami v oboru čísel komplexních.

Text cvičení z matematické analýzy těsně navazuje na učební texty vydané přírodovědeckou fakultou: V.Novák: "Nekonečné řady", V.Novák: "Analýza v komplexním oboru", v nichž je podán systematický výklad základního kursu nekonečných řad. Odtud vyplynulo celkové pojetí tohoto skripta. Teoretické pasáže jsou napsány co nejstručněji, z vět jsou uváděny především ty, které se používají ve výpočtech.
V textu jsme se pokusili předvést nejužívanější postupy řešení. Příklady jsou číslovány pro každou kapitolu průběžně, případné odkazy na jednotlivé části postupu řešení jsou provedeny pro každý příklad samostatně. V poznámkách v textu jsou stručně popsána jiná možná řešení případně naznačeny souvislosti s jinými částmi textu. Soubory cvičení, průběžně zařazované a číslované v textu, jsou výchozím materiálem pro samostatnou práci i k dalšímu procvičování. Příklady cvičení jsou řešeny od jednodušších k obtížnějším. U všech jsou uvedeny výsledky, obtížnější jsou opatřeny popisem dílčích kroků výpočtu. Teprve samostatným řešením

příkladů se posluchač přesvědčí do jaké míry zvládl teorii a dovede ji použít. Úlohy důkazového a problémového charakteru jsme do učebního textu nezařazovali, jsou součástí skript V.Nováka.

V závěru vyslovujeme upřímné poděkování oběma recenzentům doc.RNDr.ing.Dr.tech.Josefu Březinovu, CSc., vědeckému pracovníkovi katedry matematiky strojní fakulty Vysokého učení technického v Brně a doc.RNDr.Janu Chvalinovi, CSc., vedoucímu katedry matematiky pedagogické fakulty UJEP v Brně, za pečlivé posouzení rukopisu i za cenné připomínky a náměty, jejichž realizace text obohatila.

Brno, květen 1987

Autoři

ÚVOD

Teorie nekonečných řad čísel i funkcí v oboru reálných čísel vznikla v druhé polovině 17.století spolu s koncipováním základů infinitezimálního počtu. Umožnila integrování funkcí, jejichž integrály nejsou elementární funkce, a stala se základním prostředkem pro výpočet tabulek důležitých elementárních funkcí (goniometrických, logaritmických, exponenciálních aj.). Řad bylo rovněž úspěšně použito k integrování diferenciálních rovnic hned v počáteční etapě jejich rozvoje. Je však z historie známo, že i někteří významní matematikové se dopustili při počítání s řadami omylů. Proto je nezbytné dokonalé zvládnutí teorie nekonečných řad pro úspěšnou práci v různých oblastech matematiky. Dnes lze říci, že teorie nekonečných řad je silným matematickým prostředkem umožňujícím řešení nejrozmanitějších úloh, zejména numerické povahy. Neztrácí nic na své aktuálnosti ani třista let po svém vzniku, spíše naopak. S použitím nejmodernější výpočetní techniky bude nepochybně její význam neustále vzrůstat.

Systematický kurs nekonečných řad je předmětem vysokoškolských učebnic matematické analýzy, například:

Banach, S.: Differencialnoe i integralnoe isčislenie.
Fichtengolc,G.M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, II, III.
Grebenča, M.K.-Novoselov, S.I.: Učebnice matematické analýzy II.
Jarník, V.: Diferenciální počet I, II.
Kluvánek, I.-Mišík, L.-Švec, M.: Matematika II.
Knichal, V.-Bašta, A.- Pišl, M.-Rektorys, K.: Matematika II.
Šalát, T.: Nekonečné řady.
Vilenkin, N.Ja.: Zadačnik po kursu matematičeskogo analiza. Tom 2.
Vorobev, N.N.: Teorija řjadov.

Skripta přírodovědecké fakulty UJEP:
Novák, V.: Nekonečné řady. Brno, UJEP 1981.
Novák, V.: Analýza v komplexním oboru. Praha, SPN 1984.

Doporučené sbírky úloh:
Berman, G.N.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza.
Demidovič, B.P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu.

N E K O N E Č N É Ř A D Y V O B O R U R E Á L N Ý CH Č Í S E L

1. ZÁKLADNÍ POJMY

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{tj.} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. \qquad (1)$$

nazýváme <u>nekonečnou číselnou řadou</u>. Čísla a_1, a_2, a_3, ...nazýváme <u>členy řady</u> (1). Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, ...<u>nazýváme posloupnost částečných součtů řady</u> (1). Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, nazveme ji součtem řady (1). Také říkáme, že <u>řada</u> (1) <u>konverguje</u>. Píšeme stručně $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, (tj. $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ neexistuje, případně $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = -\infty$), řada (1) je <u>divergentní</u> a součet nemá.

Poznámka 1. Se symbolem (1) nelze zacházet jako se součtem konečného počtu sčítanců. Tak řada $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$diverguje, protože $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, ..., $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ neexistuje.

Řada $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \ldots$ konverguje;

$s_n = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$, tedy $s = 1$. Řada $[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \ldots$.konverguje; $s_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 0$, tedy $s = 0$.

Jedná se o různé řady. První řada má členy $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, ..., druhá řada má členy $a_1 = 1$, $a_2 = (-1) + 1$, $a_3 = (-1) + 1$, ..., třetí řada má členy $a_1 = 1 + (-1)$, $a_2 = 1 + (-1)$, ...

Mezi členy nekonečné řady nelze tedy libovolně rozmísťovat závorky - u některých řad se tím mění jejich vlastnosti.

Poznámka 2. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$ tj. $1 + 2 + 4 + \ldots$ zřejmě diverguje.

Kdybychom však předpokládali, že konverguje a tedy platí $1 + 2 + 4 + \ldots = s$ a při určení součtu postupovali takto:

$$s = 1 + 2 + 4 + \dots$$

$$s = 1 + 2\,(1 + 2 + \dots)$$

$$s = 1 + 2s$$

$$s = -1 \,,$$

dostali bychom nesprávný výsledek.

Uveďme několik vět:

Věta 1.1. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s. Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}$, $b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}$, $b_3 = a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}$, ... má týž součet s.

Věta 1.2. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$. Dále nechť c, d jsou libovolná reálná čísla. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs$, $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = cs + dS$.

Věta 1.3. Nechť k je přirozené číslo. Pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ buďto obě konvergují nebo obě divergují. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, platí rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n .$$

Řada $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ se nazývá zbytek řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po k-tém členu.

Věta 1.4. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$. Dále nechť $a_n \leqq b_n$ pro každé přirozené číslo n. Pak $s \leqq S$. Jestliže alespoň pro jednu hodnotu n je $a_n < b_n$, je také $s < S$.

Věta 1.5. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obrácená věta k větě 1.5 neplatí jak ukazuje příklad 1.

Příklad 1.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Buď m přirozené číslo, $m \geq 2$. Potom

$$s_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{2^{(m-1)} \text{ sčítanců}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + (m-1)\frac{1}{2} = 1 + m\frac{1}{2}.$$

Je vidět, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá harmonická řada.

Příklad 2.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a \neq 0$, tzv. nekonečná geometrická řada,

(q je kvocient geometrické řady), konverguje pro $|q| < 1$.

Je $\quad s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \qquad (1)$

Po vynásobení rovnice (1) $q \neq 0$

$$q\, s_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \qquad (2)$$

Odečteme-li od rovnice (1) rovnici (2)

$$s_n (1 - q) = a - aq^n \quad (\text{pro } q \neq 1)$$

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$.

Pro $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, pro $q < -1$ limita q^n neexistuje.

Souhrnně lze říci, že pro $|q| > 1$ geometrická řada součet nemá.

Je-li $q = 1$, je $s_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 0. \\ -\infty & \text{pro } a < 0. \end{cases}$

Je-li $q = -1$, má geometrická řada tvar $a + (-a) + a + (-a) + \dots$,

$s_n = \begin{cases} a & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Pro $|q| = 1$ geometrická řada rovněž diverguje.

Příklad 3.

Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru číslo $0,2\overline{15}$.

Je $0,2\overline{15} = \frac{2}{10} + \left(\frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \dots \right)$

$$0,2\overline{15} = \frac{2}{10} + \frac{\frac{15}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{5} + \frac{15}{10 \cdot 99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{66} = \frac{71}{330}$$

$$0,2\overline{15} = \frac{71}{330}$$

Soubor cvičení 1.

Určete součet řady

a. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ Výsl.: $\frac{2}{3}$

b. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots$ Výsl.: $\frac{3 - \sqrt{3}}{2.}$

c. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 1 + (\sqrt{2} - 1) - (3 - 2\sqrt{2}) + \dots$ Výsl.: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ Výsl.: $\frac{3}{2}$

e. $\frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^4} + \dots$ Výsl.: $\frac{14}{15}$

f. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{2}{5^5} + \frac{3}{5^6} + \dots$ Výsl.: $\frac{19}{62}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ Výsl.: $\frac{3}{2}$

Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru

h. $-0,\overline{12}$ Výsl.: $-\frac{4}{33}$

i. $0,07\overline{8}$ Výsl.: $\frac{71}{900}$

j. $0,263\overline{25}$ Výsl.: $\frac{13031}{49500}$

Příklad 4.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2^n}{2^n}$.

Je $s_n = \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\log 2^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{\log 2^n}{2^n}$

$$s_n = \frac{\log 2}{2} + \frac{2 \log 2}{2^2} + \dots + \frac{(n-1) \log 2}{2^{n-1}} + \frac{n \log 2}{2^n}$$

$$s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \right) \log 2 \qquad (1)$$

Rovnici (1) násobme $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} s_n = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \right) \log 2 \qquad (2)$$

Odečtením (2) od (1)

$$\frac{1}{2} s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \log 2 - \frac{n \log 2}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} s_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \log 2 - \frac{n \log 2}{2^n}$$

Tedy $s = \lim_{n \to \infty} s_n = 2 \log 2 = \log 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2^n}{2^n} = \log 4$

Příklad 5.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$.

Platí

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \\
a_2 &= \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} \\
a_3 &= \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} \\
&\vdots \\
a_{n-2} &= \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} \\
a_{n-1} &= \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \\
a_n &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\
\hline
s_n &= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}
\end{aligned}$$

$s = \lim_{n \to \infty} s_n = 1 - \sqrt{2} + \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) = 1 - \sqrt{2} +$

$+ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2}.$

Poznámka 3. Vzorec pro s_n bychom měli dokázat metodou matematické indukce. Ukažme v tomto případě podrobný postup - v dalších příkladech nebudeme tento důkaz provádět.

Pro $n = 1$ je $s_1 = 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = a_1$ ..... platí

Předpokládejme, že platí $s_k = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}$, dokážeme, že platí $s_{k+1} = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}$.

Platí $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = (1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}) + (\sqrt{k+1} -$

$- 2\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}$.

Tedy pro každé přirozené číslo n platí $s_n = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$

Příklad 6.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Položíme $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$

Pak
$$1 = A(n+2) + Bn$$
$$1 = (A+B)n + 2A$$

Odtud $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

Tedy $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots +$

$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

Příklad 7.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)}$, kde k je přirozené číslo.

Položíme $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+k}$

Odtud $1 = A(n+k) + Bn$, tedy

$$A + B = 0$$
$$Ak = 1$$

$$A = \frac{1}{k}, \quad B = -\frac{1}{k}.$$

$$s_n = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{1+k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+k} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+k} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)$$

Soubor cvičení 2.

Určete součet řady

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ — Výsl.: 2

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ — Výsl.: $\frac{9}{4}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ — Výsl.: 3

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$ — Výsl.: 6

e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{2^n}$ — Výsl.: $2(a+1)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} n(\log 2)^{n-1}$ — Výsl.: $\frac{1}{(1-\log 2)^2}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin a)^{n-1}}{3^n}$ — Výsl.: $\frac{3}{(3-\sin a)^2}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3}{n^3+2n^2+3n}$ — Výsl.: diverguje

Soubor cvičení 3.

Určete součet řady

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ Výsl.: 1

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ Výsl.: $\frac{11}{18}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ Výsl.: $\frac{13}{36}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ Výsl.: $\frac{23}{90}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ Výsl.: $\frac{1}{3}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ Výsl.: $\frac{1}{2}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$ Výsl.: $\frac{1}{4}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ Výsl.: 1

i. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots$ Výsl.: $\frac{1}{4}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$ Výsl.: div.

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+2)(n+5)}$ Výsl.: $\frac{509}{900}$

2. ŘADY S KLADNÝMI ČLENY

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, /1/, kde $a_n > 0$ pro každé přirozené číslo n je číselná <u>řada s kladnými členy.</u>

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je <u>majoranta</u> (majorantní řada) řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, platí pro každé přirozené číslo n: $b_n \geqq a_n$.

Některé věty o řadách s kladnými členy.

Věta 2.1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy konverguje, existuje-li k ní konvergentní majoranta. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy divergentní, je divergentní i každá její majoranta.

Poznámka. Neexistuje řada, která by sloužila jako univerzální majoranta či minoranta pro libovolnou řadu. Majoranta případně minoranta se určuje zvlášť pro každou řadu.

Věta 2.2. Podílové kritérium konvergence - d'Alembertovo. Nechť (1) je řada s kladnými členy. Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geqq k$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, je řada (1) konvergentní. Jestliže existuje přirozené číslo m tak, že pro všechna $n \geqq m$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, pak řada (1) diverguje. Zejména existuje-li $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, pak pro $0 \leqq q < 1$ řada (1) konverguje a pro $q > 1$ řada (1) diverguje.

Věta 2.3. Odmocninové kritérium konvergence - Cauchyho. Nechť (1) je řada s nezápornými členy. Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geqq k$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$, je řada (1) konvergentní. Jestliže existuje přirozené číslo m tak, že pro všechna $n \geqq m$ je $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$, pak řada (1) diverguje. Zejména existuje-li $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, pak pro $q < 1$ je řada (1) konvergentní a pro $q > 1$ řada diverguje. Pro $q = 1$ nelze o konvergenci řady (1) podle vět 2.2, 2.3 rozhodnout.

Věta 2.4. Kritérium konvergence - Raabeovo.

Nechť (1) je řada s kladnými členy. Existuje-li číslo $r > 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geq k$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r$, je řada (1) konvergentní. Jestliže existuje přirozené číslo m tak, že pro všechna $n \geq m$ je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, pak řada (1) diverguje.

Zejména existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, pak pro $r > 1$ řada (1) konverguje a pro $r < 1$ řada /1/ diverguje.

Věta 2.5. Integrální kritérium konvergence - Cauchyho - Maclaurinovo.

Nechť pro řadu (1) s kladnými členy existuje spojitá funkce $f(x)$, pro kterou platí:

1. Na intervalu $\langle K, \infty)$, kde K je nějaké reálné číslo, je nerostoucí.
2. $f(n) = a_n$ pro $n > n_0$, kde n_0 je přirozené číslo.

Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to\infty} \int_K^t f(x)\,dx$, pak řada (1) konverguje. Je-li $\lim\limits_{t\to\infty} \int_K^t f(x)\,dx = \infty$, pak řada (1) diverguje.

Poznámka. Ukažme například divergenci harmonické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Je $f(x) = \frac{1}{x}$, potom $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^t =$

$= \lim\limits_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim\limits_{t\to\infty} \ln t = \infty.$

Tedy harmonická řada diverguje.

Příklad 8.

Dokažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5} + 3^n}$ konverguje.

Pro každé přirozené číslo n je $\frac{1}{3^n} > \frac{1}{\sqrt[n]{5} + 3^n}$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje, proto také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5} + 3^n}$ konverguje, dle věty 2.1.

Příklad 9.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n\,3^n}}$ s kladnými členy.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{(n+1)\,3^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{n\,3^n}}{4n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n-3} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n\,3^n}{(n+1)\,3^{n+1}}} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$; řada konverguje.

Příklad 10.

Vyšetřete, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,n!}{n^n}$ s kladnými členy.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\,n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\,\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$= 2\,\frac{1}{e} < 1$; řada konverguje.

Příklad 11.

Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n}\right)^n$, $a > 0$ je reálné číslo.

Je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\operatorname{arctg} n} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$

Řada diverguje pro $a > \frac{\pi}{2}$, konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Pro $a = \frac{\pi}{2}$ nelze podle odmocninového kritéria rozhodnout.

Příklad 12.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.\ \ldots\ .(2n-3)}{2.4.\ \ldots\ .(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}$ s kladnými členy.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1.3.\ \ldots\ .(2n-1)}{2.4.\ \ldots\ .2n} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2.4.\ \ldots\ .(2n-2)}{1.3.\ \ldots\ .(2n-3)} \cdot (2n-1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n} = 1.$$

Podílovým kritériem nelze o konvergenci rozhodnout. Použijeme-li větu 2.4, je

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{4n^2+2n}{4n^2-4n+1} - 1\right) = n\,\frac{6n-1}{4n^2-4n+1} = \frac{6n^2-n}{4n^2-4n+1}.$$

Ale $\frac{6n^2 - n}{4n^2 - 4n + 1} > 1$ pro skoro všechna přirozená čísla n, o čemž se přesvědčíme výpočtem limity: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2 - n}{4n^2 - 4n + 1} = \frac{3}{2} > 1$. Proto řada konverguje.

Příklad 13.

Rozhodněte o konvergenci řad s kladnými členy:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2}$, b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, kde $r > 1$ je reálné číslo.

a. Funkce $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ splňuje v intervalu $\langle 1, +\infty)$ podmínky věty 2.5.

Je: $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{2x\,dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{t\to\infty} \left[\ln (1 + x^2)\right]_1^t =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{t\to\infty} \left[\ln (1 + t^2) - \ln 2\right] = +\infty$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^2}$ diverguje.

b. Funkce $f(x) = \frac{1}{x^r}$, $r > 1$ splňuje pro $x \in \langle 1, +\infty)$ podmínky věty 2.5.

$\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^r} = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^t = \frac{1}{1 - r} \lim\limits_{t\to\infty} \left[\frac{1}{x^{r-1}}\right]_1^t =$

$= \frac{1}{1-r} \lim\limits_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t^{r-1}} - 1\right] = \frac{1}{r-1}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, $r > 1$, konverguje podle věty 2.5.

Soubor cvičení 4.

Rozhodněte o konvergenci řady

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Výsl.: pro každé přirozené číslo $n > 1$

$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$; div.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Výsl.: pro každé přirozené číslo $n > 2$

$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$; konv.

c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ Výsl.: pro každé přiroz.číslo $n > 1$ $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$; div.

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,3^n}$ Výsl.: pro každé přiroz.číslo n $\frac{1}{(n+1)\,3^n} < \frac{1}{3^n}$; konv.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ Výsl.: konv.

f. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ Výsl.: div.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ Výsl.: div.

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$ Výsl.: konv.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$ Výsl.: div.

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$ Výsl. konv.

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ Výsl.: div.

Soubor cvičení 5.

Rozhodněte o konvergenci řady

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ Výsl.: konv.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)^n}$ Výsl.: konv.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n(n+1)}$ Výsl.: konv.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$ Výsl.: konv.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ Výsl.: konv.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ Výsl.: konv.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)^{n^2}}{(n+1)^{n.n}}$ Výsl.: konv.

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ Výsl.: konv.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ Výsl.: konv.

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ Výsl.: konv.

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ Výsl.: konv.

Soubor cvičení 6.

Rozhodněte o konvergenci řady

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - 1}$ Výsl.: konv.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$ Výsl.: konv.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ Výsl.: div.

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$ Výsl.: div.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ Výsl.: konv.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ Výsl.: div.

g. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$ Výsl.: konv.

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)}$ Výsl.: konv.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000\,n+1}$ Výsl.: div.

j. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^4-9}$ Výsl.: konv.

k. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ Výsl.: div.

3. ALTERNUJÍCÍ ŘADY

Věta 3.1. Kritérium konvergence pro alternující řady - Leibnizovo

Nechť $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel.

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ se nazývá <u>alternující řada.</u>

Příklad 14.

Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{2n-3}$

a. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konverguje, protože posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ rovněž konverguje, protože posloupnost $\left\{\frac{1}{\ln(1+n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesá, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$.

c. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{2n-3}$ je divergentní, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soubor cvičení 7.

Rozhodněte o konvergenci alternující řady

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ Výsl.: konv.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ Výsl.: konv.

c. $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$ Výsl.: konv.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n - 2}$ Výsl.: div.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1.3.5 \dots . (2n - 1)}$ Výsl.: konv.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ Výsl.: div.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{\sin^2 n}{n}$. Výsl.: konv.

4. ŘADY ABSOLUTNĚ A NEABSOLUTNĚ KONVERGENTNÍ

Mějme nekonečnou číselnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. (1)

Utvořme nyní řadu sestavenou z absolutních hodnot členů řady (1)

v témže pořadí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2)

Řada (1) se nazývá <u>absolutně konvergentní</u>, konverguje-li řada (2).

V případě, že řada (1) konverguje, ale řada (2) diverguje, říkáme, že řada (1) <u>konverguje neabsolutně</u>.

Příklad 15.

Vyšetřete absolutní případně neabsolutní konvergenci řad:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$, b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$, c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

a. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konverguje, protože má konvergentní majorantu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}$ je absolutně konvergentní.

b. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ je řada s kladnými členy.

Diverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$ je alternující a diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$ diverguje.

c. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je řada s kladnými členy. Diverguje, neboť je majorantou harmonické řady $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je alternující. Protože posloupnost $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ klesá a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, je konvergentní.

Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taková posloupnost přirozených čísel, že se v ní každé přirozené číslo vyskytne právě jednou. Říkáme, že nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla <u>přerovnáním řady</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocí posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Platí:

Věta 4.1. Každá <u>absolutně</u> konvergentní řada je konvergentní.

Věta 4.2. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocí posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$.

Příklad 16.

Přerovnejte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots$ pomocí posloupnosti přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$k_n = \begin{cases} 2j - 1 & \text{pro } n = 3j \\ 4j - 2 & \text{pro } n = 3j - 1, \\ 4j & \text{pro } n = 3j - 2 \end{cases}$$ j je libovolné přirozené číslo.

Určete její součet s.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Je absolutně konvergentní a má součet $s = 1$. Jejím přerovnáním pomocí dané posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ vznikne řada $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \ldots$, která má týž součet $s = 1$, podle věty 4.2.

Věta 4.3. Kritérium Dirichletovo.

Buď $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Nechť posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

Věta 4.4. Kritérium Abelovo.

Nechť $\left\{c_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a ohraničená posloupnost a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

Příklad 17.

Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n}$, n je přirozené číslo, konverguje pro libovolné reálné číslo a.

Ukažme, že při volbě $a_n = \cos na$, $c_n = \frac{1}{n}$ jsou splněny podmínky Dirichletova kritéria. Platí:

$$\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na = \frac{\cos \frac{n+1}{2} a \cdot \sin \frac{n}{2} a}{\sin \frac{a}{2}},$$

$$|s_n| = |\cos a + \cos 2a + \dots + \cos na| = \frac{\left|\cos \frac{n+1}{2} a \cdot \sin \frac{n}{2} a\right|}{\left|\sin \frac{a}{2}\right|} \leqq \frac{1}{\left|\sin \frac{a}{2}\right|}.$$

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n}$ konverguje podle věty 4.3.

Příklad 18.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cos na}{n}$, n je přirozené číslo, a je číslo reálné.

Volme $c_n = \sqrt[n]{n}$, $a_n = \frac{\cos na}{n}$. V příkladě 17 jsme dokázali, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n}$ konverguje. Posloupnost $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, neboť $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Zbývá dokázat, že posloupnost $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní. Ale $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ právě tehdy, když $n^{n+1} > (n+1)^n$. Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností $n > (1 + \frac{1}{n})^n$ a ta je splněna pro každé přirozené číslo $n \geqq 3$, neboť posloupnost $\left\{(1 + \frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e < 3$ Proto posloupnost $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cos na}{n}$ konverguje podle věty 4.4.

Soubor cvičení 8.

Vyšetřete, které řady divergují, konvergují neabsolutně, konvergují absolutně:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$ Výsl.: konv.neabsol.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ Výsl.: konv.absol.

c. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ Výsl.: konv.neabsol.

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ Výsl.: div.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ Výsl.: konv. neabsol.

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$ Výsl.: konv.absol.

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n^2}}{n!}$ Výsl.: div.

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ Výsl.: konv.absol. pro libovolné reálné α

i. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ Výsl.: konv. absol.

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$ Výsl.: konv.absol.

Soubor cvičení 9.

Vyšetřete konvergenci řady

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$ Výsl.: konv. pro libovolné reálné α

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ Výsl.: konv. pro libovolné reálné α, a to absol.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$ Výsl.: konv.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$ Výsl.: konv.

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^s}$, $s > 0$ Výsl.: konv. pro libovolné reálné α, $\alpha \neq 2k\pi$, k celé číslo, a libovolné $s > 0$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{2^n}$ Výsl.: konv. pro libovolné reálné α

Soubor cvičení 10.

a. Určete součet řady $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ Výsl.: 1

b. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+6)(n+2)}$ Výsl.: $\frac{57}{60}$

c. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$ Výsl.: -1

d. Zjistěte, je-li splněna nutná podmínka konvergence řady

$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$ Výsl.: ano

e. Rozhodněte o konvergenci řady

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2.3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3.3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4.3^4}} + \dots$ Výsl.: konv.

f. Rozhodněte o konvergenci řady Výsl.: div.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n . n!}{n^n}$

g. Rozhodněte o konvergenci řady Výsl.: div.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln (n+1)}$

h. Vyšetřete, zda řada diverguje, konverguje neabsolutně, konverguje absolutně Výsl.: konv. abs.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

i. Vyšetřete, zda řada diverguje, konverguje neabsolutně, konverguje absolutně

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ \ln\ (n+1)}$$

Výsl.: konv.neabsol.

j. Vyšetřete, zda řada diverguje, konverguje neabsolutně, konverguje absolutně

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!}$$

Výsl.: konv.absol. pro libovolné reálné α

N E K O N E Č N É Ř A D Y F U N K C Í V O B O R U R E Á L N Ý C H Č Í S E L

1. ZÁKLADNÍ POJMY

Nejprve uvedeme definici tzv. bodové konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k limitní funkci f.

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na intervalu J. Pro libovolné pevně zvolené $x \in J$ je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ číselná posloupnost. Jestliže tato číselná posloupnost má vlastní limitu, označíme ji $f(x)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Množinu M všech $x \in J$, pro něž existuje vlastní limita posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme oborem konvergence posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Každému $x \in M$ je přiřazena jedna hodnota $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Je tak určena na množině M funkce f, kterou nazveme limitní funkcí posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, příp. $f_n \to f$.

Výraz
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots \tag{1}$$
nazýváme řadou funkcí. Funkce f_n je n-tým členem řady (1). Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_1 = f_1$, $s_2 = f_1 + f_2$, ..., $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, ... nazýváme posloupnost částečných součtů řady (1). Limitní funkci s posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme součet řady funkcí (1), obor konvergence posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme obor konvergence řady funkcí (1).

Příklad 1.

Určete obor konvergence řady funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$.

Určíme, pro která reálná čísla x, $x \neq -4$, číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$ konverguje. Užijme např. podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^{n+1}\frac{n(x+4)^n}{(2x)^n}\right| = \frac{2\,|x|}{|x+4|}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{2\,|x|}{|x+4|}$$

Řada konverguje pro každé reálné číslo x, pro něž $\frac{2|x|}{|x+4|} < 1$, tj. $2|x| < |x+4|$. Řešení této nerovnice jsou $x \in (-\frac{4}{3}, 4)$.
Pro $x = -\frac{4}{3}$ jde o číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje,
pro $x = 4$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.
Je tedy obor konvergence řady $M = \langle -\frac{4}{3}, 4)$.

Příklad 2.

Určete obor konvergence řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$.
Výraz $3x^2 + 4x + 2 = 3(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} > 0$ pro libovolné reálné x.

Vytvoříme konvergenci číselné řady (x je libovolné reálné číslo)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n} \qquad [1]$$

Je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{3x^2+4x+2} = \frac{1}{3x^2+4x+2}$.

Pro $\frac{1}{3x^2+4x+2} < 1$ řada [1] konverguje.

Řešíme nerovnici $3x^2 + 4x + 2 > 1$

$$3(x + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{1}{3} > 0$$

$$(x + \tfrac{2}{3})^2 - (\tfrac{1}{3})^2 > 0$$

$$(x+1)\,(x+ \tfrac{1}{3}) > 0, \text{ tj. } x \in (-\infty, -1) \cup (-\tfrac{1}{3}, \infty).$$

Pro $x = -1$ i pro $x = -\frac{1}{3}$ dostáváme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, která diverguje. Má tedy řada funkcí obor konvergence

$$M = (-\infty, -1) \cup (-\tfrac{1}{3}, \infty).$$

Příklad 3.

Určete obor konvergence řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n(x) = \frac{8^n}{n^2} \sin^{3n} x$.

Pro každé x reálné je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 8\,|\sin^3 x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 8|\sin^3 x|$.

Řada bude konvergovat pro $8\,|\sin^3 x| < 1$

$$|\sin x|^3 < \tfrac{1}{8}$$

$$|\sin x| < \tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2} < \sin x < \tfrac{1}{2}$$

Poslední nerovnice platí pro $x \in \bigcup_{k \in Z} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$

Pro $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ a $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ vyšetříme konvergenci číselných řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Obě řady konvergují a proto je obor konvergence původní řady funkcí $M = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle$

Pro zkoumání vlastností součtu řady funkcí, případně limitní funkce posloupnosti funkcí je třeba definovat tzv.stejnoměrnou konvergenci.

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci f, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla n, $n \geq n_0$ a každá $x \in M$, platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci s, jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů této řady konverguje stejnoměrně na množině M k funkci s.

Poznámka 1. Jestliže $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině M stejnoměrně k funkci f, konverguje také bodově k limitní funkci f. Obrácené tvrzení neplatí.

Příklad 4.

Zjistěte, zda posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

a. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

b. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$

konverguje na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ stejnoměrně.

a. Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$. Je tedy

limitní funkce $f: y = 0$, $D(f) = \langle 0, 1 \rangle$.

Pro každé x intervalu $\langle 0,1 \rangle$ platí:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}.$$

Pro $x = \frac{1}{n} \in (0, 1\rangle$ je $|f_n(x) - f(x)| = \frac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = 1.$

Proto pro $\varepsilon \in (0,1)$ nemůže platit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$, tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje k f stejnoměrně na intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

b. Pro každé $x \in \langle 0,1 \rangle$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2x}{1+x^2n^2} = 0$,

$f : y = 0$, $D(f) = \langle 0,1 \rangle$ je limitní funkcí.

Pro každé x intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2x}{1+n^2x^2} - 0 \right| =$

$= \frac{2x}{1+n^2x^2}$ a platí

$\frac{2x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n} \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{n}$, protože $\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqq 1$, (je $(nx - 1)^2 \geqq 0$

pro každé x reálné a každé n přirozené).

Budeme-li proto k libovolnému $\varepsilon > 0$ volit n_0 tak, že $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$,

bude platit pro každé přirozené číslo n, $n > n_0$, a každé reálné

číslo x intervalu $\langle 0,1 \rangle$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$,

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2x}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$ tj. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Proto posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f stejnoměrně na

množině $M = \langle 0, 1 \rangle$.

Při zjišťování toho, zda posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na množině M k funkci f, je často výhodné užít tvrzení:

Věta 1.1. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M, jestliže číselná posloupnost $\{\sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule.

Příklad 5.

Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ konverguje stejnoměrně na množině $\langle 0,1 \rangle$.

Pro každé reálné x intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $\lim\limits_{n\to\infty} (x^n - x^{2n}) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} x^n(1 - x^n) = 0$, tedy f: $y = 0$ je limitní funkcí.

Určíme lokální maximum funkcí $f_n(x)$. Je $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} =$

$= nx^{n-1} (1-2x^n)$; $f_n'(x) = 0$ pro $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Pro $x_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ je $f_n(x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $f_n(0) = 0$,

$f_n(1) = 0$.

Proto $\sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} f_n(x) = \frac{1}{4}$.

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$, nekonverguje posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f stejnoměrně na množině $\langle 0,1\rangle$.

Soubor cvičení 1.

Určete, pro která reálná čísla konverguje řada:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ Výsl.: $\langle -1, 1\rangle$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ Výsl.: $(-1, 1)$

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\, x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ Výsl.: $\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$.

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}\, x^{n+1}$ Výsl.: $\langle -1, 1)$

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}\, x^n$ Výsl.: $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

f. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ Výsl.: $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$ Výsl.: $(-\infty, \infty)$

h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$ Výsl.: $(-3, 3\rangle$

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n\, n!}{(2n)!}\, x^{2n}$ Výsl.: $(-\infty, \infty)$

j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$ Výsl.: $\langle -9, -7\rangle$

k. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{2n}\, (2x-3)^{2n-1}$ Výsl.: $(1,45;\ 1,55)$

Soubor cvičení 2.

Určete obor konvergence řady:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ Výsl.: $\langle -1, 1 \rangle$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2x}{x+4} \right)^n$ Výsl.: $\left(-\frac{4}{3}, 4 \right)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ Výsl.: $(-2, 2)$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$ Výsl.: $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ Výsl.: $(0, +\infty)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$ Výsl.: $(-2, 2)$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sqrt[3]{\sin^n x}$ Výsl.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé číslo, x reálné číslo

h. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ Výsl.: $\langle -1, 1 \rangle$

Soubor cvičení 3.

Zjistěte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k limitní funkci na daném intervalu J.

a. $f_n(x) = x^n$ α. $J = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ Výsl.: ano

β. $J = \langle 0, 1 \rangle$ Výsl.: ne

b. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $J = \langle 0, 1 \rangle$ Výsl.: ano

c. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ $J = (0, \infty)$ Výsl.: ano

d. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ $J = \langle 0, 1 \rangle$ Výsl.: ano

e. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ α. $J = \langle 0, 1 - \varepsilon \rangle$ Výsl.: ano

β. $J = \langle 1 - \varepsilon , 1 + \varepsilon \rangle$ Výsl.: ne

γ. $J = \langle 1 + \varepsilon , \infty)$ Výsl.: ano

f. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ $J = (-\infty , \infty)$ Výsl.: ano

g. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ $J = (-\infty , \infty)$ Výsl.: ano

h. $f_n(x) = \sin \left(\dfrac{x}{n}\right)$ $J = (-\infty , \infty)$ Výsl.: ne

i. $f^n(x) = \operatorname{arctg} nx$ $J = (0, \infty)$ Výsl.: ne

j. $f^n(x) = e^{-(x-n)^2}$ α. $J = (-m, m)$ m je lib.kladné číslo   Výsl.: ano

β. $J = (-\infty , \infty)$ Výsl.: ne

2. VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

Věta 2.1. Cauchy-Bolzanovo kritérium

<u>Posloupnost funkcí</u> $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>konverguje stejnoměrně na množině M</u> právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé n, m přirozené, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. <u>Řada funkcí</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>konverguje stejnoměrně na množině M</u> právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé n, m přirozené, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí:

$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$.

Řekneme, že <u>řada funkcí</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>konverguje absolutně</u>, jestliže konverguje řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

Věta 2.2. Weierstrassovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada funkcí a nechť platí $|f_n(x)| \leq a_n$ pro každé přirozené číslo n a všechna $x \in M$. Jestliže číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně a stejnoměrně na množině M.

Příklad 6.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ zřejmě konverguje pro $x = k\pi$, kde k je celé číslo. Pro každé přirozené číslo n platí:

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \quad \text{pro každé } x \in (-\infty, \infty).$$

Jelikož číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ konverguje, konverguje řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolutně a stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.

Základní význam má věta

Věta 2.3. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí, která konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $(a, a + \delta)$, kde $\delta > 0$. Nechť pro každé přiroz.číslo n existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to a+} f_n(x) = b_n .$$

Pak existují také vlastní limity $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ a platí $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{n \to} b_n$, tj.

$$\lim_{x \to a+} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to a+} f_n(x)\right]$$

Poznámka 2. Analogické tvrzení platí i pro limitu zleva a limitu v bodě a.

Věta 2.4. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu J. Jsou-li všechny funkce f_n spojité na intervalu J, je také limitní funkce f spojitá na intervalu J.

Věta 2.5. Nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně v intervalu J. Jsou-li všechny funkce f_n spojité v intervalu J, je součet řady funkcí s funkce spojitá na intervalu J.

Věta 2.6. Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$, je také funkce f integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right] dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Věta 2.7. Nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má součet s. Jestliže všechny funkce f_n jsou integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$, je také funkce s integrabilní na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\, dx\right] \quad \text{tj.}$$

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_n(x)\, dx\right]$$

Věta 2.8. Nechť všechny funkce f_n mají derivaci $f'_n(x)$ pro každé x intervalu (a,b). Nechť posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro alespoň jedno $x \in (a,b)$ a nechť posloupnost funkcí $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v intervalu (a,b).

Pak platí:

a. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v intervalu (a,b) k funkci $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

b. Funkce f má derivaci v intervalu (a,b) a platí

$f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$.

Věta 2.9. Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje pro alespoň jedno $x_0 \in (a,b)$ a nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ konverguje stejnoměrně v intervalu (a,b). Pak také řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně v intervalu (a,b) a její součet s má derivaci v intervalu (a,b) a platí $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$.

Píšeme také $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$.

Ukážeme užití těchto vět na příkladech.

Příklad 7.

Určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Uvažovaná řada zřejmě konverguje absolutně. Dále funkce $f_n(x) = x^{n-1}$ jsou integrabilní na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ pro každé n přirozené a platí

$$\int_0^{0,5} x^{n-1}\,dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^{0,5} = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ je nekonečná geometrická řada, která na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ konverguje stejnoměrně a má součet $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

Proto je podle věty 2.7 i funkce s integrabilní na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ a platí

$$\int_0^{0,5} s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{0,5} x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Ale $\int_0^{0,5} s(x)\,dx = \int_0^{0,5} \frac{1}{1-x}\,dx = \left[-\ln|1-x|\right]_0^{0,5} = -\ln(1-0,5) + $ $+ \ln 1 = -\ln 0,5 = \ln 2$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2.$$

Příklad 8.

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Řada zřejmě konverguje absolutně. Pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$, kde $f_n(x) = x^n$, $f'_n(x) = nx^{n-1}$ platí, že konvergují stejnoměrně v intervalu $(0, 1 - \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$.

Proto podle věty 2.9 platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$ pro každé x intervalu $(0, 1 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Ale $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1 - x}\right)' = \frac{(1 - x) - x(-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$

Tedy pro každé x intervalu $(0, 1 - \varepsilon)$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$

Volíme-li $x = \frac{1}{3}$, dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} =$
$= \frac{9}{4}$ a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

Porovnejme s výpočtem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots.$$

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots. = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

Soubor cvičení 4.

Užitím Weierstrassova kritéria dokažte stejnoměrnou konvergenci řady funkcí na daném intervalu:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ $\qquad x \in (-2, \infty)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ $\qquad x \in \langle 0, \infty)$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \sqrt{n}}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^3}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ $\qquad x \in \langle 0, \infty)$

j. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ $\qquad x \in \langle a, \infty),\ a > 1$

3. MOCNINNÉ ŘADY

Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, x_0 libovolné reálné číslo. Mocninnou (potenční) řadou o středu x_0 a koeficientech a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n . \qquad (1)$$

Poznámka 1. Substitucí $x - x_0 = y$ přejde řada /1/ v řadu

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n , \qquad (2)$$

která má střed v počátku. Stačí tedy vyšetřovat mocninné řady pouze v jednom z uvedených tvarů (1), (2). Získané výsledky se již naznačenou transformací převedou na případ druhý.

Všimněte si, že na rozdíl od předchozího textu o řadách funkcí začínáme zpravidla indexem $n = 0$ - mocninné řady jsou jistým zobecněním mnohočlenů a mají řadu analogických vlastností.

Platí:

Věta 3.1. Každá mocninná řada konverguje ve svém středu.

Věta 3.2. Konverguje-li řada (1) v některém čísle $x_1 \neq x_0$, konverguje absolutně pro všechna reálná čísla x z intervalu $(- |x_1 - x_0| , |x_1 + x_0|)$.

Důsledek věty 3.2.

Diverguje-li řada (2) v některém čísle $y = x_1$, diverguje pro všechna $|y| > |x_1|$.

Věta 3.3. Řada (1) konverguje

a/ jen v čísle x_0 právě tehdy, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$,

b/ pro všechna reálná čísla právě tehdy, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, c/ pro všechna reálná čísla intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$, kde

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ je-li } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty).$$

Reálné číslo R nazýváme <u>poloměr konvergence řady</u> (1), interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ je <u>konvergenční interval řady</u> (1).

Poznámka 3. V číslech $x_0 - R$, $x_0 + R$ může řada konvergovat i divergovat, takže konvergenční interval mocninné řady se obecně nekryje s oborem konvergence této řady.

Jsou-li koeficienty řady (1) takové, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ případně existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, má řada (1) poloměr konvergence $R = \frac{1}{q}$; (pokud $q = 0$, je $R = +\infty$; pokud $q = +\infty$, je $R = 0$).

Příklad 9.

Určete poloměr konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1} n^n (x - 5)^n \qquad [1]$$

Řada [1] má střed $x_0 = 5$. Zabývejme se řadou $\sum\limits_{n=1} n^n (x_1 - 5)^n$, $x_1 \neq 5$, která je hodnotou řady [1] v čísle $x = x_1$. Posloupnost $\left\{\sqrt[n]{n^n |x_1 - 5|^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n |x_1 - 5|\right\}_{n=1}^{\infty}$ není shora ohraničená, neboť skoro všechny její členy jsou větší než 1. Řada [1] diverguje pro všechna reálná čísla $x \neq 5$; $R = 0$.

Příklad 10.

Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$1 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 2^2(x - 1)^3 + 3^2(x - 1)^4 + \dots + 2^n(x - 1)^{2n-1} + 3^n(x - 1)^{2n} + \dots \qquad [1]$$

Všimněme si posloupnosti $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2^2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt[2n-1]{2^n}, \sqrt[2n]{3^n}, \dots\right\}$.

Pro každé přirozené číslo n je $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[2n]{3^n}$ tj. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt{3}$.

Proto $\limsup\limits_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=1}^{\infty} = \sqrt{3}$. Odtud $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Příklad 11.

Určete, pro která reálná čísla konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$.

Platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}} = \frac{1}{3} = q$;

$R = 3$, konvergenční interval $(-3, 3)$.

Situaci v číslech -3, 3 musíme vyšetřit zvlášť. Pro $x = -3$ dostáváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$,

která je alternující a konverguje. Pro $x = 3$ dostáváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$ konverguje pro všechna reálná čísla intervalu $\langle -3, 3)$.

Věta 3.4. Jsou-li koeficienty řady (1) takové, že existuje

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, má řada (1) poloměr konvergence $R = \frac{1}{q}$;

(pokud $q = 0$, je $R = +\infty$, pokud $q = +\infty$, je $R = 0$).

Příklad 12.

Určete, pro která reálná čísla konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{(2n)!} x^{2n}$.

Platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} =$

$= 0 = q$; $R = +\infty$.

Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} x^{2n}$ konverguje pro každé reálné číslo.

Některé vlastnosti mocninných řad.

Věta 3.5. Nechť poloměr konvergence R mocninné řady /1/ je různý od nuly. Potom pro každé číslo x_1, pro které platí $|x_1 - x_o| < R$, řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_o)^n$ absolutně konverguje.

Věta 3.6. (o spojitosti součtu mocninné řady)
Nechť poloměr konvergence R řady (1) je kladný. Nechť $s(x)$ je součet řady (1). Pak funkce $s(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Věta 3.7. (o derivování příp.integrování mocninné řady člen po členu). Nechť R je poloměr konvergence řady (1). Pak R je i poloměrem konvergence řad

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n\, a_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$
$$\dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} \tag{3}$$
$$a_0\,(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} \tag{4}$$

Říkáme, že řada (3) vznikne z řady (1) derivováním člen po členu, řada (4) vznikne z řady (1) integrováním člen po členu.

Věta 3.8. Nechť poloměr konvergence R mocninné řady (1) je kladný. Nechť $s(x)$ je součet řady (1). Pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = s'(x), \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Věta 3.9. Nechť poloměr konvergence R mocninné řady (1) je kladný. Nechť $s(x)$ je součet mocninné řady (1). Potom na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = \int s(x)dx - \left[\int s(x)dx\right]_{x=x_0}, \text{ kde}$$

$\left[\int s(x)dx\right]_{x=x_0}$ znamená hodnotu neurčitého integrálu $\int s(x)dx$ v čísle x_0.

Věta 3.10. Nechť $s(x)$ je součet mocninné řady (1), jejíž poloměr konvergence R je kladný. Nechť a, b jsou libovolná čísla z intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Potom platí :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}\right] = \int_a^b s(x)dx.$$

Věta 3.11. Nechť poloměr konvergence R mocninné řady (1) je kladný. Potom pro každé přirozené číslo k je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(x-x_0)^n\right]^{(k)} =$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k} = s^{(k)}(x), \text{ přičemž } s(x)$$

je součet mocninné řady. (1)

Věta 3.12. Nechť $s(x)$ je součet mocninné řady (1), jejíž poloměr konvergence R je kladný. Potom pro koeficienty řady (1) platí: $a_n = \frac{1}{n!} s^{(n)}(x_0)$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Věta 3.13. (o jednoznačnosti vyjádření funkce mocninnou řadou). Nechť funkce $s(x)$ je na otevřeném intervalu J součtem mocninné řady (1) a mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$.

Nechť $x_0 \in J$, pak pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí $a_n = b_n$.

Věta 3.14. Nechť $s(x)$ je součet mocninné řady (1), jejíž poloměr konvergence R je kladné číslo. Nechť řada (1) konverguje i v čísle $x_0 + R$ (případně $x_0 - R$). Potom existuje $\lim_{x \to (x_0+R)^-} s(x)$ (případně $\lim_{x \to (x_0-R)^+} s(x)$) a platí:

$$s(x_0+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to (x_0+R)^-} s(x),$$

tj. $s(x)$ je v (x_0+R) spojitá zleva,

$$s(x_0-R) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n = \lim_{x \to (x_0-R)^+} s(x),$$

tj. $s(x)$ je v (x_0-R) spojitá zprava.

Příklad 13.

Určete konvergenční interval řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$ [1] a její součet.

Platí: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n-3} = 1 = q$; $R = 1$, konvergenční interval $(-1, 1)$.

Řada [1] vznikla integrováním člen po členu řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4}$, [2] jejíž poloměr konvergence je rovněž $R = 1$. Pro každé reálné číslo intervalu $(-1, 1)$ je řada [2] geometrická s kvocientem $q = x^4$ a má součet

$s(x) = \frac{1}{1-x^4}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} = \frac{1}{1-x^4}$ pro $x \in (-1, 1)$.

Proto řada [1] má součet $\int s(x)dx = \int \frac{dx}{1-x^4}$.

Položíme $\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$.

Pak $1 = A(1+x)(1+x^2) + B(1-x)(1+x^2) + (Cx+D)(1-x^2)$.

Odtud $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$, $D = 1$.

Tedy $\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \operatorname{arctg} x$.

Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \operatorname{arctg} x$, $x \in (-1, 1)$.

Příklad 14.

Určete součet řady $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$, [1]

Řada [1] vznikla z řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, [2], tak, že ji k-krát derivujeme člen po členu. Protože $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots =$

$= \frac{1}{1-x} = s(x)$, pro $x \in (-1, 1)$, je $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,x^{n-k} =$

$= \left[s(x)\right]^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, pro $x \in (-1, 1)$.

Příklad 15.

Určete součet řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$ [1]

Řada [1] je hodnotou mocninné řady

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$ [2]

v čísle $x = 1$. Studujme podrobněji řadu [2]. Platí:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = q$; $R = 1$.

Derivováním řady [2] člen po členu dostaneme řadu

$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots$, [3]

která je geometrickou řadou s kvocientem $q = -x$. Pro všechna reálná čísla x splňující podmínku $|x| < 1$ je $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots +$

$+ (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$. Proto

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x), |x| < 1.$

Řada [1] je alternující číselná řada, která konverguje. Její součet

$$s = \lim_{x \to 1-} \ln(1 + x) = \ln 2.$$

Závěr: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} = \ln 2.$

Poznámka 4. Uvedený postup se často používá při výpočtu součtu konvergentních číselných řad.

Soubor cvičení 5.

a. Určete součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

Návod. Danou řadu si napíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$

Výsl.: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$, pro $x \in (-1, 1)$

b. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n + 1)}$

Návod. Pro $|x| < 1$ můžeme psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{n} \int x^n \, dx \right].$$

Výsl.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n + 1)} = (x+1) \cdot \ln(x+1) - x$, pro $x \in (-1,1\rangle$

c. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1}$

Výsl.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} = \operatorname{arctg} x$, pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$

d. Určete součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) x^{2n}$

Výsl.: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) x^{2n} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ pro $x \in (-1, 1)$

e. Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) x^n$

Výsl.: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) x^n = \frac{2x}{(1 - x)^3}$ pro $x \in (-1, 1)$

f. Určete součet mocninných řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{3})^n$

Výsl.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{3^n} x^n$, pro $x \in (-1, 1)$

g. Určete součet mocninných řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$

Výsl.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$, pro $x \in (-1, 1)$

Soubor cvičení 6.

Užitím derivování nebo integrování řady člen po členu určete funkci, která je součtem řady:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ Výsl.: $s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ Výsl.: $s(x) = \operatorname{arctg} x$, $|x| \leq 1$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ Výsl.: $s(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, x reálné číslo

d. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$ Výsl.: $s(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$, $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$

e. $1 + \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$

$+ \dots$ Výsl.: $s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x \in (-1,1)$

f. $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Výsl.: $s(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$, $x \in (-1,1)$

g. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ Výsl.: $s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$

h. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$ Výsl.: $s(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$

i. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$ Výsl.: $s(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$

4. TAYLOROVA A MACLAURINOVA ŘADA

Platí-li v intervalu $J = (x_0 - b, x_0 + b)$, $b > 0$, rovnice

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots , \qquad (1)$$

říkáme, že funkci $f(x)$ lze v intervalu J rozvinout v mocninnou řadu. Řadu (1) nazýváme v tomto případě <u>rozvojem funkce</u> $f(x)$ (v mocninnou řadu) v intervalu J.

Věta 4.1. Platí-li v intervalu $J = (x_0 - b, x_0 + b)$, $b > 0$, rovnice (1), pak koeficienty a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, jsou jednoznačně určeny vztahy

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \dots .$$

Věta 4.2. Nechť f je funkce, která má v čísle x_0 první, druhou, ..., n-tou derivaci. Nechť $T_n(x)$ je polynom nejvýše n-tého stupně, pro který

$$\left[T_n(x)\right]^{(k)}_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0) \text{ pro } k = 0, 1, \dots, n.$$

Potom platí:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Polynom $T_n(x)$ se nazývá <u>Taylorův polynom pro funkci</u> f v čísle x_0. Je to polynom, jehož hodnota v čísle x_0 se shoduje s $f(x_0)$, první derivace v čísle x_0 se shoduje s $f'(x_0)$, ..., n-tá derivace v čísle x_0 se shoduje s $f^{(n)}(x_0)$. Rozdíl $f - T_n(x)$ nazýváme <u>zbytkem funkce</u> f po Taylorově polynomu n-tého stupně a označíme ho $R_{n+1}(x)$.

Poznámka 5. Znalost zbytku $R_{n+1}(x)$ umožňuje zjistit, s jakou přesností aproximuje Taylorův polynom funkci f.

Nechť f je funkce, která má v reálném čísle x_0 derivace všech řádů. Taylorovou řadou funkce f v čísle x_0 rozumíme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o řadě Maclaurinově.

Poznámka 6. Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je tedy mocninnou řadou o středu x_0. Její n-tý částečný součet je totožný s Taylorovým polynomem $T_n(x)$.

Věta 4.3. Nechť f je funkce, která má v nějakém reálném čísle x_0 derivace všech řádů. Taylorova řada funkce f v čísle x_0 konverguje na nějakém intervalu J /obsahujícím číslo x_0 / k funkci f právě tehdy, když je posloupnost Taylorových zbytků $\left\{R_n(x_0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nulová.

Věta 4.4. Nechť funkce f má na otevřeném intervalu $J = (x_0 - b, x_0 + b)$, $b > 0$, derivace všech řádů a nechť posloupnost $\left\{f^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je na J stejnoměrně ohraničená. Pak Taylorova řada funkce f v libovolném bodě $x_0 \in J$ konverguje na intervalu J k funkci f.

Poznámka 7. Posloupnost $\left\{f^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je na J stejnoměrně ohraničená, existuje-li takové číslo K, že pro všechna $x \in J$ a pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots,$ je $|f^{(n)}(x)| \leq K$.

Věta 4.5. Taylorova věta.

Nechť x, x_0 jsou dvě různá reálná čísla a nechť f je funkce, která má derivace až do řádu $n + 1$ v uzavřeném intervalu J, jehož krajní body jsou čísla x, x_0. Pak platí

$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta), \quad \vartheta \text{ patří do } J,\ \vartheta \neq x, x_0.$$

Poznámka. Zbytek je v tzv. Lagrangeově tvaru.

Příklad 16.

Rozviňte funkci $f(x) = e^x$, x reálné číslo, v Maclaurinovu řadu.

Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ $(e^x)^{(k)} = e^x$, $\left[(e^x)^{(k)}\right]_{x=0} = 1$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Příklad 17.

Rozviňte funkci $f(x) = \cos x$, x reálné číslo,

a. v Taylorovu řadu v čísle $x_0 = \frac{\pi}{4}$,

b. v Maclaurinovu řadu.

a. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $\cos^{(4k)} \frac{\pi}{4} = \cos^{(4k+3)} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos^{(4k+1)} \frac{\pi}{4} = \cos^{(4k+2)} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Po dosazení:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[1 - \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots\right]$$

b. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $\left[(\cos x)^{(4k)}\right]_{x=0} = 1$, $\left[(\cos x)^{(4k+2)}\right]_{x=0} =$

$= -1$, $\left[(\cos x)^{(4k+1)}\right]_{x=0} = \left[(\cos x)^{(4k+3)}\right]_{x=0} = 0$.

Po dosazení:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \text{ reálné číslo.}$$

Příklad 18.

Rozviňte funkci $f(x) = \sin x$, x reálné číslo, v Maclaurinovu řadu.

Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ je

$$\left[(\sin x)^{(4k)}\right]_{x=0} = \left[(\sin x)^{(4k+2)}\right]_{x=0} = 0,$$

$$\left[(\sin x)^{(4k+1)}\right]_{x=0} = 1, \quad \left[(\sin x)^{(4k+3)}\right]_{x=0} = -1,$$

Po dosazení:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots ,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \text{ reálné číslo}$$

Věta 4.6. Pro každé reálné číslo α a pro každé reálné číslo $x \in (-1,1)$ platí

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{k} x^k + \dots , \qquad (2)$$

kde $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \dots$; $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Řada (2) se nazývá <u>binomická řada.</u>

Příklad 19.

Rozviňte funkci $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$ v Maclaurinovu řadu.

Víme, že $\left[\ln(1+u)\right]' = \frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$,

Pro každé reálné číslo $u \in (-1,1)$ rozvineme v binomickou řadu

$$(1 + u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + \dots \qquad [1]$$

Integrováním [1] člen po členu na intervalu $\langle 0, x \rangle$ dostáváme

$$\int_0^x \frac{du}{1+u} = \left[\ln(1 + u)\right]_0^x = \ln(1 + x) - \ln 1 = \ln (1 + x) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

Příklad 20.

Napište Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, x reálné číslo

Víme, že

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots \qquad [1]$$

Dosadíme-li do [1] $(-x)$ za x, je

$$e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n \qquad [2]$$

Řady [1], [2] konvergují pro každé reálné číslo x absolutně.

Sečteme-li [1] a [2] a násobíme-li součet $\frac{1}{2}$, dostaneme

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots , \quad x \text{ reálné číslo.}$$

Příklad 21.

Rozviňte funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ v Maclaurinovu řadu.

Položíme $-x^2 = t$, potom $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$

Pro $t \in (-1,1)$ je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}t + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}t^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}t^3 +$$

$$+ \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}t^n + \dots = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^2 -$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}t^n + \dots\dots$$

Vrátíme-li se k původní proměnné, dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots\dots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1,1).$$

Příklad 22.

Rozviňte funkci $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$ v Maclaurinovu řadu.

Pro každé reálné $u \in (-1,1)$ je $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Z předchozího příkladu víme, že

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}u^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}u^6 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}u^{2n} + \dots \qquad [1]$$

Integrací řady [1] člen po členu v intervalu $\langle 0, x \rangle$ dostáváme

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^x = \arcsin x - \arcsin 0 = \arcsin x =$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1,1).$$

Soubor cvičení 7.

a. Rozložte v Taylorovu řadu funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v čísle $x_0 = 2$.

Výsl.: $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(x+2)^3}{2^3} + \dots + \frac{(x+2)^n}{2^n} + \dots\right]$,

pro $x \in (-4, 0)$

b. Rozložte v Taylorovu řadu funkci $f(x) = \sqrt{x}$ v čísle $x_0 = 4$.

Výsl.: $\sqrt{x} = 2\left[1 + \frac{1}{2^3}(x-4) - \frac{1.3}{2!2^6}(x-4)^2 + \frac{1.3.5}{3!2^9}(x-4)^3 - \dots\right] =$

$= 2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\dots(2n-3)}{n!\,2^{3n}}(x-4)^n\right]$,

pro $x \in (0, 8)$

c. Rozložte v Taylorovu řadu funkci $f(x) = e^x$ v čísle $x_0 = -2$.

Výsl.: $e^x = e^{-2}\left[1 + \frac{x+2}{1!} + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \dots \frac{(x+2)^n}{n!} + \dots\right] =$

$= e^{-2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$, pro x reálné

d. Rozložte v Taylorovu řadu funkci $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ v čísle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Výsl.: $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{x-\frac{\pi}{2}}{1!2} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!\,2^2} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!\,2^3} - \dots \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!\,2^n} -\right.$

$\left.- \dots\right]$, pro každé x reálné

e. Napište Taylorovu řadu funkce $f(x) = \sin 2x$ v čísle $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

Výsl.: $\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{4n-1}\sqrt{2}}{(4n)!}\left[x^{4n} + 2\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - 2\frac{x^{4n+2}}{(4n+1)(2n+1)} -\right.$

$\left.- 4\frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(2n+1)(4n+3)}\right]$, pro každé x reálné

Soubor cvičení 8.

Rozviňte v Maclaurinovu řadu funkce:

a. $f(x) = e^{-x^2}$

Výsl.: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \dots$,

x reálné číslo

b. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Výsl.: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \dots$,

x reálné číslo

c. $f(x) = \ln(1-x)$

Výsl.: $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \dots - \frac{1}{n} x^n - \dots$, $x \in \langle -1, 1)$

d. $f(x) = 10^x$

Výsl.: $10^x = 1 + \frac{x \cdot \ln 10}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 10}{2!} + \dots + \frac{x^n \ln^n 10}{n!} + \dots$,

x reálné číslo

e. $f(x) = \cos(x-1)$

Výsl.: $\cos(x-1) = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)\sin 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right.$

$\left.\dots\right)\cos 1$, x reálné číslo

f. $f(x) = \frac{1}{3-2x}$

Návod: Danou funkci upravte na tvar $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x}$

Výsl.: $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} x + \frac{2^2}{3^2} x^2 + \frac{2^3}{3^3} x^3 + \dots + \frac{2^n}{3^n} x^n + \dots\right)$

g. $f(x) = \sinh x$

Výsl.: $\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, x reálné číslo

h. $f(x) = \sin x^2$

Výsl.: $\sin x^2 = x^2 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{5!} x^{10} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}$,

x reálné číslo

i. Určete první dva členy Maclaurinova rozvoje pro funkci y, která splňuje rovnici $2 \sin x + \sin y = x - y$.

Výsl.: $y = -\frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} - \ldots$

Určete první tři členy Maclaurinova rozvoje pro funkci y, která splňuje rovnici:

j. $y^3 + xy = 1$ Výsl.: $y = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{81} - \ldots$

k. $e^x - e^y = xy$ Výsl.: $y = x - x^2 + 2x^3 - \ldots$

l. $xy + e^x = y$ Výsl.: $y = 1 + 2x + \frac{5}{2} x^2 + \ldots$

m. $y' = \ln(1+x) - xy$ Výsl.: $y = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3 - \ldots$

5. UŽITÍ MOCNINNÝCH ŘAD

A. Přibližný výpočet funkčních hodnot.

Příklad 23.

Vypočtěte sin 18° s chybou menší než 10^{-4}.

Víme, že pro každé reálné číslo x je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad [1]$$

Pro pevně zvolené reálné číslo $x_0 = \frac{\pi}{10}$ je [1] alternující číselnou řadou. Proto máme-li určit $\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10}$ s chybou menší než 10^{-4}, stačí vzít v rozvoji [1] první dva členy

$$\sin\frac{\pi}{10} \doteq \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!},$$

neboť chyba δ, které se tím dopustíme, je menší než první vynechaný člen $\frac{x^5}{5!}$ rozvoje [1], (tento člen je menší než 10^{-4}):

$$\delta < \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} = \frac{\pi^5}{120.10^5} < \frac{\pi^4\cdot\pi}{10^2.10^5} < \frac{10^2\cdot\pi}{10^2.10^5} < \frac{1}{10^4}.$$

$$\sin\frac{\pi}{10} \doteq \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{6.10^3}$$

$$\sin\frac{\pi}{10} \doteq 0{,}309$$

Příklad 24.

Vypočtěte $\sqrt[7]{129}$ na 4 desetinná místa.

$$\sqrt[7]{129} = \sqrt[7]{128+1} = \sqrt[7]{2^7+1} = \sqrt[7]{2^7\left(1+\frac{1}{2^7}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}} =$$

$$= 2\left[1 + \binom{\frac{1}{7}}{1}\frac{1}{128} + \binom{\frac{1}{7}}{2}\frac{1}{128^2} + \dots + \binom{\frac{1}{7}}{n}\frac{1}{128^n} + \dots\right] =$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{7}\,\frac{1}{128} + \frac{\frac{1}{7}\left(-\frac{6}{7}\right)}{2}\,\frac{1}{128^2} + \dots + \binom{\frac{1}{7}}{n}\frac{1}{128^n} + \dots\right] =$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{7.128} - \frac{6}{2.7^2}\cdot\frac{1}{128^2} + \dots + \binom{\frac{1}{7}}{n}\frac{1}{128^n} + \dots\right] =$$

$$= 2\left[1 + 0{,}00111 - 0{,}00000373 + \dots\right] \doteq 2{,}0022$$

$$\sqrt[7]{129} \doteq 2{,}0022$$

Příklad 25.

Vypočtěte číslo ln 3 s chybou menší než 10^{-4} užitím Maclaurinova rozvoje funkce $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Víme, že $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$ pro $x \in (-1,1)$.

Dosadíme-li do [1] $(-x)$ za x, je

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \quad \text{pro } x \in (-1,1)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right)$$

Ale $\frac{1+x}{1-x} = 3$ pro $x = \frac{1}{2}$ takže

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}} + \ldots\right) \qquad [1]$$

Pro řadu [1] je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}} = \frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{1}{4} < \frac{1}{4}$$

Proto zbytek $R_n \leqq a_n \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$ tj.

$$R_n \leqq \frac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}}\,\frac{1}{3}$$

Podle zadání má být $R_n < \frac{1}{20000}$, tj.

$$\frac{1}{3.(2n+1)\, 2^{2n+1}} < \frac{1}{20000} \quad \text{čili}$$

$$3.(2n+1)\, 2^{2n+1} > 20000 ,$$

což je splněno pro $n = 5$.

Tedy $\ln 3 \doteq 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} + \frac{1}{11.2^{11}}\right)$

Soubor cvičení 9.

Užitím mocninných řad vyčíslete s požadovanou přesností:

a. $\sqrt[3]{70}$ s přesností na setiny Výsl.: 4,12

b. $\sqrt[5]{245}$ na tisíciny Výsl.: 3,005

c. $\sqrt[5]{40}$ na setiny Výsl.: 2,09

d. $(1,1)^{1,2}$ na setiny Výsl.: 1,12

e. $\sqrt{e}$ na setiny Výsl.: 1,65

f. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ na tisíciny Výsl.: 0,778

g. ln 1,2 na tisíciny Výsl.: 0,182

h. arctg 0,8 na setiny Výsl.: 0,67

i. arcsin 0,45 na tisíciny Výsl.: 0,467

j. sin 36^o na tisíciny Výsl.: 0,588

k. arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ na desetitisíciny

Výsl.: 0,5263

l. ln 2 na desetitisíciny

Výsl.: 0,6931

B. Integrace užitím mocninných řad.

Příklad 26.

Vyjádřete mocninnou řadou funkci $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

Víme, že pro každé x, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ [1]

Dosadíme-li do [1] $(-t^2)$ za x máme

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots ,$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x (1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots) dt$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3.1!} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots ,$$

x reálné číslo.

Příklad 27.

Vypočtěte určitý integrál $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Z předchozího příkladu je

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \dots \quad [1]$$

Řada [1] je alternující. Proto vezmeme-li v řadě [1] např. první tři členy, dostaneme pro chybu δ odhad

$$\delta < \frac{1}{7.3!} = \frac{1}{42}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} .$$

Zadaný integrál je určen s chybou menší než $\frac{1}{42}$.

Poznámka 8. Integrál $\int_0^x e^{-t^2} dt$ je významný v teorii chyb a v počtu pravděpodobnosti.

Příklad 28.

Vyjádřete mocninnou řadou primitivní funkci k funkci $f(x) = \sin x^2$.

Víme, že

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad [1]$$

Dosazením $u = t^2$ do [1] dostáváme:

$$\sin t^2 = t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots \qquad [2]$$

Integrováním [2] člen po členu v intervalu $\langle 0, x \rangle$ je:

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^{11}}{11.5!} - \frac{t^{15}}{15.7!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + \right.$$
$$\left. + \dots \right]_0^x$$

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} + \dots$$

Příklad 29.

Vypočtěte integrál $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ s přesností na tisíciny.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^8 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} x^{12} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^8 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} x^{12} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2.1!} x^4 + \frac{1.3}{2^2.2!} x^8 - \frac{1.3.5}{2^3.3!} x^{12} + \dots$$

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{1}{2.1!} x^4 + \frac{1.3}{2^2.2!} x^8 - \frac{1.3.5}{2^3.3!} x^{12} + \dots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{1}{2.1!} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2^2.2!} \frac{x^9}{9} - \frac{1.3.5}{2^3.3!} \frac{x^{13}}{13} + \dots \right]_0^{0,5} =$$

$$= 0,5 - \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{3.2^{12}} - \frac{5}{13.2^{17}} + \dots = 0,5 - 0,003 + 0,000081 +$$
$$+ \dots$$

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \doteq 0,497$$

Soubor cvičení 10.

Vyjádřete řadou integrál:

a. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ Výsl.: $C + x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots$,

x reálné číslo

b. $\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$ Výsl.: $C - \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2.3!} + \dots$,

x reálné číslo nenulové

c. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$ Výsl.: $C + x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} + \dots$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$

d. $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ Výsl.: $C + x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots$,

x reálné číslo

e. $\int_0^x \sqrt{1 + x^3}\,dx$ Výsl.: $C + x + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2.4}\frac{x^7}{7} + \dots$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Vyjádřete řadou a vypočtěte s požadovanou přesností:

f. $\int_0^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$ s přesností na tisíciny Výsl.: 32, 831

g. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ s přesností na tisíciny Výsl.: 0,494

h. $\int_0^{1} \cos x\,dx$ s přesností na setiny Výsl.: 0,76

i. $\int_1^{1,5} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{4}\,dx$ s přesností na setiny Výsl.: 0,12

Vyjádřete řadou a vypočtěte:

j. $\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ Výsl.: $\frac{\pi^2}{12}$

C. Přibližné řešení diferenciálních rovnic.

Příklad 30.

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = 0 \qquad [1]$$

ve tvaru mocninné řady.

Obecné řešení rovnice [1] hledejme ve tvaru řady:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots. \qquad [2]$$

Předpokládejme, že řada [2] konverguje v jistém intervalu J. Pak platí:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots.$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + 5.4a_5x^3 + \dots + n(n-1)\,a_nx^{n-2} + \dots.$$

Po dosazení do rovnice [1] a úpravě

$$(2a_2 + a_0) + (3.2a_3 + a_1)\,x + (4.3a_4 + a_2)\,x^2 + (5.4a_5 + a_3)\,x^3 + \dots =$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$$

Odtud $2a_2 + a_0 = 0$ $\quad a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!}$

$3.2a_3 + a_1 = 0$ $\quad a_3 = -\frac{a_1}{3.2.1} = -\frac{a_1}{3!}$

$4.3a_4 + a_2 = 0$ $\quad a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = \frac{a_0}{4.3.2.1} = \frac{a_0}{4!}$

$5.4a_5 + a_3 = 0$ $\quad a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_1}{5!}$

Po dosazení do [2] je tedy

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \dots.$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.\right)$$

Je vidět, že řady v závorkách jsou Maclaurinovy řady pro funkce $\cos x$ a $\sin x$, lze tedy psát

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x,$$

což je obecné řešení rovnice [1]. Víme, že v tomto případě lze řešení rovnice [1] určit z charakteristické rovnice. Určení přibližného řešení diferenciálních rovnic užitím mocninných řad provádíme zejména v těch případech, kdy nelze určit obecné řešení pomocí elementárních funkcí konečným počtem operací.

Příklad 31.

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + kxy = 0 \qquad [1]$$

k reálné číslo, užitím Maclaurinovy řady.

Řešení rovnice [1] hledejme ve tvaru řady

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots \qquad [2]$$

Rovnice [1] je druhého řádu. Její obecné řešení bude obsahovat dvě nezávislé konstanty A,B. Zavedeme označení $y(0) = A$, $y'(0) = B$; řada [2] nabývá tvar

$$y = A + Bx + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots \qquad [3]$$

Derivováním vztahu [3] dostáváme:

$$y' = B + \frac{y''(0)}{1!}x + \frac{y'''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(4)}(0)}{3!}x^3 + \ldots ,$$

$$y'' = y''(0) + \frac{y'''(0)}{1!}x + \frac{y^{(4)}(0)}{2!}x^2 + \ldots .$$

Dosadíme do levé strany rovnice [1] za y, y'' a obě strany rovnice upravíme

$$y''(0) + \frac{y'''(0)}{1!}x + \frac{y^{(4)}(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(5)}(0)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ kx(A + Bx + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots) = 0 + 0.x + 0.x^2 + \ldots \qquad [4].$$

Porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin x na obou stranách rovnice [4] dostáváme

$$y''(0) = 0,$$

$$\frac{y'''(0)}{1!} + kA = 0, \quad y'''(0) = -kA ,$$

$$\frac{y^{(4)}(0)}{2!} + kB = 0, \quad y^{(4)}(0) = -2kB, \quad \text{atd.}$$

Obecné řešení rovnice [1] je pak

$$y = A + Bx - \frac{kA}{3!}x^3 - \frac{2kB}{4!}x^4 + \frac{4k^2A}{6!}x^6 + \ldots .$$

Příklad 32.

Určete partikulární řešení rovnice

$$y' = 1 + x - y^2 \qquad [1]$$

při počáteční podmínce $y(0) = 1$.

Dosadíme-li podmínku do rovnice [1] , máme

$$y'(0) = 1 - 0 - 1^2, \text{ odtud } y'(0) = 0.$$

Postupnými derivacemi rovnice [1] dostáváme:

$$y'' = 1 - 2yy'$$

$$y''' = -2y'^2 - 2yy''$$

$$y^{(4)} = -4y'y'' - 2y'y'' - 2yy''' = -6y'y'' - 2yy'''$$

$$\vdots$$

Odtud po dosazení:

$y''(0) = 1,\ y'''(0) = -2,\ y^{(4)}(0) = 4, \ldots.$

Partikulární řešení rovnice [1] hledejme např. ve tvaru Maclaurinovy řady $y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}}{4!}x^4 + \ldots.$

Po dosazení

$$y = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \ldots,$$

což je partikulární řešení rovnice [1] při dané podmínce.

Příklad 33.

Určete partikulární řešení rovnice

$$xy^{(4)} + 4y''' - xy - 1 = 0 \qquad [1]$$

při počátečních podmínkách $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = -2$, $y'''(1) = 6$.

Řešení hledejme ve tvaru Taylorovy řady

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \qquad [2]$$

$$+ \ldots.$$

Dosazením podmínek do rovnice [1] máme

$y^{(4)}(1) + 4.6 - 1(-1) - 1 = 0$ čili $y^{(4)}(1) = -24.$

Po dosazení do [2] a úpravě

$$y = -1 + (x-1) + \frac{(-2)}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + \frac{(-24)}{4!}(x-1)^4 + \dots.$$

$$y = -1 + (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4 + \dots,$$

což je partikulární řešení rovnice [1] při uvedených podmínkách.

Soubor cvičení 11.

a. Dokažte, že řada $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ vyhovuje rovnici $y^{(4)} = y$.

b. Dokažte, že řada $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ vyhovuje rovnici $xy'' + y' - y = 0$.

Vyjádřete řadou partikulární řešení diferenciální rovnice při daných počátečních podmínkách:

c. $y' - y^2 - x(x+1) = 0$, při podmínce $y(0) = 1$.

Výsl.: $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \dots.$

d. $y' + xy^2 - 2\cos x = 0$, při podmínce $y(0) = 1$.

Výsl.: $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \dots.$

e. $y'' + a^2y = 0$, při podmínkách $y(0) = 0$, $y'(0) = a$.

Výsl.: $y = ax - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \frac{a^7}{7!}x^7 + \dots$

f. $y'' - e^x y = 0$, při podmínkách $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Výsl.: $y = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots.$

g. $y'' - y\cos x - x = 0$, při podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Výsl.: $y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$

h. $y'' = x^2y$, při podmínkách $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Výsl.: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.3.6.7\dots(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!} x^{4n+1}$

i. $xy'' + y' + xy = 0$, při podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Výsl.: $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

Soubor cvičení 12.

Vyjádřete řadou obecné řešení diferenciální rovnice:

a. $(1-x^2)\,y'' - xy' - 2 = 0$

Výsl.: $y = A + B\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} + \ldots\right) + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} + \right.$

$\left. + \frac{64x^6}{6!} + \ldots .\right)$

b. $y'' + xy' + y = 0$

Výsl.: $y = A\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \ldots\right) + B\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \ldots\right)$

c. $y'' + xy = 0$

Výsl.: $y = A\left(1 - \frac{1}{2.3}\,x^3 - \frac{1}{2.3.5.6}\,x^6 + \ldots\right) +$

$+ B\left(x - \frac{1}{3.4}\,x^4 + \frac{1}{3.4.6.7}\,x^7 - \ldots .\right)$

d. $y'' + ax^2y = 0$, a reálné číslo

Výsl.: $y = A\left(1 - \frac{1.2}{4!}\,ax^4 + \frac{1.2.5.6}{8!}\,a^2x^8 - \ldots\right) +$

$+ Bx\left(1 - \frac{2.3}{5!}\,ax^4 + \frac{2.3.6.7}{9!}\,a^2x^8 - \ldots\right)$

e. $4xy'' + 2y' + y = 0$

Výsl.: $y = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}\,,\ x > 0$

NEKONEČNÉ ŘADY V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Pro podrobné studium řad v oboru komplexní proměnné jsou nezbytné znalosti z teorie funkcí komplexní proměnné. V této kapitole pouze nastíníme, jak je možné uvést základní pojmy pro řady komplexních čísel.

1. ČÍSELNÉ ŘADY V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Buď $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel. Symbol

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tag{1}$$

nazýváme nekonečnou řadou s komplexními členy.

O nekonečné řadě (1) řekneme, že je konvergentní, jestliže konverguje posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\sigma_1 = \alpha_1$, $\sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots,$ $\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \dots$, kterou nazýváme posloupnost částečných součtů řady (1). Číslo $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ nazýváme součet řady (1).

Připomeňme některé vlastnosti posloupností komplexních čísel:

Posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu α, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé n přirozené, $n > n_0$, platí $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$.

Poznámka 1. Je-li $\alpha_n = a_n + b_n i$, $\alpha = a + bi$, je $|\alpha_n - \alpha| =$

$$= \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}.$$

Posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ohraničená, existuje-li takové reálné číslo $K > 0$, že platí $|\alpha_n| \leqq K$ pro všechna přirozená čísla n.

Věta 1.1. Posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\alpha_n = a_n + b_n i$, je ohraničená právě tehdy, když jsou ohraničené obě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel.

Věta 1.2. Posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\alpha_n = a_n + b_n i$, je konvergentní a má limitu $\alpha = a + bi$, existují-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Věta 1.3. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n = a_n + b_n i$, je konvergentní právě tehdy, když jsou konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Přitom, jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S$, je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = s + iS$.

Je tedy vidět, že pro vyšetřování konvergence či divergence nekonečné řady s komplexními členy můžeme užít obdobná kritéria jako pro řady s reálnými členy. Tyto věty zde nebudeme znovu uvádět, ukážeme jejich použití na příkladech.

Příklad 1.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$. [1]

Obecný člen řady [1] je komplexní číslo, jehož reálná část $a_n = \dfrac{3}{1+\sqrt{n}}$, imaginární část $b_n = \dfrac{-2}{1+\sqrt{n}}$. Obě řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3}{1+\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{-2}{1+\sqrt{n}}$ jsou číselné řady s členy z oboru reálných čísel a divergují- stačí, srovnáme-li je s harmonickou řadou o níž víme, že diverguje.

Proto řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$ diverguje.

Příklad 2.

Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$.

Je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right| = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{n\to\infty} 2 =$

$= \dfrac{1}{2} < 1$, proto řada konverguje podle odmocninového kritéria.

Mějme nekonečnou řadu s komplexními členy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. (1)

Utvořme nyní řadu sestavenou z absolutních hodnot členů řady (1) v témže pořadí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. (2)

Řada (1) se nazývá <u>absolutně konvergentní</u>, konverguje-li řada (2). V případě, že řada (1) konverguje, ale řada (2) diverguje, říkáme, že řada (1) <u>konverguje neabsolutně</u>.

Věta 1.4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$, kde $\alpha_n = a_n + b_n i$, konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Příklad 3.

Vyšetřete absolutní případně neabsolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(3i-1)^n}{5^n}.$$

Použijeme podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n\,(3i-1)^n}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$$

Vyčíslíme: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right| = \frac{|3i-1|}{5} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} =$

$$= \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{5} \cdot 1 = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1 .$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$ absolutně konverguje.

Příklad 4.

Vyšetřete absolutní případně neabsolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1}\right) \qquad [1]$$

Obecný člen řady [1] je komplexní číslo s reálnou částí $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$, s imaginární částí $\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ jsou alternující číselné řady a obě konvergují podle Leibnizova kritéria: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ konverguje, protože posloupnost $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ rovněž konverguje; posloupnost $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesá, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

Podle věty 1.3. řada [1] konverguje.

Všimněme si nyní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right) \right|$ [2]

Platí $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1}$.

Ale pro každé přirozené čísla n je $\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{\sqrt{8n^2}}{4n^2}$ tj. $\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a protože je minorantní řadou [2], řada [2] diverguje.

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right)$ je neabsolutně konvergentní.

2. MOCNINNÉ ŘADY V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Uvedeme pouze základní pojmy pro mocninné řady v oboru komplexních čísel.

Mocninnou řadou o středu $z_0 = x_0 + iy_0$ a koeficientech $\alpha_n = a_n + b_n i$ nazýváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, (3)

kde $z_n = x_n + y_n i$. Opět se můžeme zabývat pouze řadami, kde $z_0 = 0$, tj. řadami $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$. (4)

Věta 2.1. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ je mocninná řada v oboru komplexních čísel. Označme $a = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$. Je-li $a = 0$, konverguje řada (4) pro libovolné komplexní číslo, je-li $a = \infty$, konverguje řada (4) pouze pro $z = 0$.
Pro $0 < a < \infty$ položme $r = \frac{1}{a}$. Pak řada (4) konverguje pro libovolné komplexní číslo, pro něž $|z| < r$ a diverguje pro libovolné komplexní číslo pro něž $|z| > r$. Číslo r se nazývá poloměr konvergence řady (4). Pro komplexní čísla, pro která $|z| = r$, je nutné konvergenci vyšetřit zvlášť.

Poznámka 2. Je užitečné uvědomit si geometrickou interpretaci uvedených pojmů. Zobrazíme-li komplexní číslo $\alpha = a + bi$ v Gaussově rovině komplexních čísel, pak množina komplexních čísel, v nichž mocninná řada (4) konverguje, vyplňuje vnitřek kruhu se středem v počátku a s poloměrem r; r je poloměr konvergence řady (4). Je-li $r = 0$, konverguje řada (4) pouze v počátku systému souřadnic, je-li $r = \infty$, konverguje řada (4) ve všech bodech Gaussovy roviny. Obrazy komplexních čísel z, splňující podmínku $|z| = r$, vyplňují kružnici se středem v počátku a poloměrem r. Na ní mohou ležet obrazy komplexních čísel, v nichž řada (4) konverguje, ale i obrazy komplexních čísel, v nichž řada (4) diverguje. Vyšetřování zde musíme provádět zvlášť.

Příklad 5.

Určete poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Zde $\alpha_n = 1$ pro každé přirozené číslo n.

$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$, tedy $r = 1$.

Řada konverguje pro libovolné komplexní číslo, které splňuje podmínku

$|z| < 1$.

Jinak: Řada je také geometrickou řadou, kde $a_1 = 1$, $q = z$. Konverguje pro $|q| < 1$ tj. $|z| < 1$. Součet této řady je funkce komplexní proměnné $\sigma(z) = \frac{1}{1-z}$, definiční obor této funkce $\mathcal{D}(\sigma) = \{z \in \mathcal{C} ; |z| < 1\}$.

Příklad 6.

V praktických aplikacích mají velký význam níže uvedené tři řady:

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje pro každé komplexní číslo. Je totiž

$$a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Pro $z = x + 0.i$ jde o řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ o níž víme, že je Maclaurinovou řadou pro funkci $y = e^x$. Můžeme tedy definovat pro komplexní číslo z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Pro $z = 0 + y.i$, y reálné číslo, dostáváme

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = \cos y + i \sin y$$

Dostáváme tak důležitý vztah

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \text{ , } y \text{ reálné číslo.} \qquad (5)$$

Analogicky dostaneme

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y,\ y \text{ reálné číslo} \qquad (6)$$

a z rovností (5) a (6) plyne

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} , \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} .$$

Je přirozené rozšířit definici funkcí sinus a kosinus pro komplexní argument z takto:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Můžeme se snadno přesvědčit, že pak

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Vyšetřovat vlastnosti takto definovaných funkcí komplexní proměnné nemůžeme bez znalosti teorie funkcí komplexní proměnné.
Nemůžeme proto ani podrobněji studovat řady v komplexním oboru.

Poznámka 3. Je jistě překvapující, že např. $\cos i = \frac{e^{i.i} + e^{-i.i}}{2} =$

$= \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \doteq 1{,}543 > 1$. Je tedy vidět, že vlastnosti funkcí komplexní proměnné mohou být velmi zajímavé.

O B S A H

Cvičení z matematické analýzy
Nekonečné řady
doc. RNDr. Jiří Hájek, CSc., RNDr. Jiří Dula

Vydavatelství Masarykovy univerzity pro posluchače Pedagogické fakulty MU
Vedoucí katedry doc. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
1. dotisk 2. vydání (1992), 1994 náklad 200 výtisků
AA - 4,37 VA - 4,49 76 stran
Tisk Vydavatelství MU, Brno - Kraví hora, ofsetový tisk
Tematická skupina a podskupina 17/31
Pořadové číslo 2320
ISBN 80-210-0385-5

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou v redakci vydavatele.