1. Číselné řady

A. Součty řad

Příklad 1.1. Určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots .$$

Řešení. Rozkladem k-tého členu řady na parciální zlomky dostáváme

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}.$$

Vynásobením jmenovatelem k^2+k dostáváme rovnost

$$1 = A(k+1) + Bk \qquad \Rightarrow \qquad A = 1, B = -1.$$

Odtud

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pro n-tý částečný součet řady pak platí

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

tj.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Řada je tedy konvergentní a má součet $s = 1$.

Příklad 1.2. Rozhodněte pomocí definice o konvergenci, resp. součtu následující řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2^{k+1}}{6^k} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{11}{216} + \dots .$$

Řešení. Využitím vzorce pro n-tý částečný součet geometrické řady dostáváme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 2^{k+1}}{6^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} - 2\frac{\frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^{n+1}}{\frac{2}{3}}.$$

Odtud pak

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1 - 1 = 0.$$

Daná řada tedy konverguje a má součet $s = 0$.

Příklad 1.3. Určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots .$$

Řešení. Pro n-tý částečný součet řady platí

$$s_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots - \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

příslušná řada diverguje.

Příklad 1.4. Určete součet řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2k}$.

Řešení. Protože $\mathrm{e}^{-2k} = (\mathrm{e}^{-2})^k$, jedná se o geometrickou řadu s prvním členem rovným jedné a kvocientem e^{-2}; odtud podle vzorce $s = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2-1}$.

Příklad 1.5. Určete součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky máme $\frac{1}{4k^2-1} = \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)/2$. Dosazením tohoto vztahu a rozepsáním n-tého částečného součtu dostáváme

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

a tedy

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

Příklad 1.6. Určete součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky máme

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

Odtud

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \right.$$
$$+ \frac{1}{n-5} - \frac{2}{n-4} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-4} - \frac{2}{n-3} + \frac{1}{n-2} +$$
$$\left. + \frac{1}{n-3} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Pro součet tedy máme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}.$$

Příklad 1.7. Určete součet řady $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{k^2})$.

Řešení. Pro n-tý částečný součet platí

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)] =$$
$$= 0 - 2\ln 2 + \ln 3 + \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 4 + \ln 3 - 2\ln 4 + \ln 5 + \ln 4 - 2\ln 5 + \ln 6 + \ln 5 - 2\ln 6 + \ln 7 + \dots$$
$$+ \ln(n-5) - 2\ln(n-4) + \ln(n-3) + \ln(n-4) - 2\ln(n-3) + \ln(n-2) +$$
$$+ \ln(n-3) - 2\ln(n-2) + \ln(n-1) + \ln(n-2) - 2\ln(n-1) + \ln n + \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1) =$$
$$= -\ln 2 + \ln n - 2\ln n + \ln(n+1) = -\ln 2 + \ln\frac{n+1}{n}\,.$$

Odtud

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = -\ln 2 = \ln\frac{1}{2}\,.$$

Příklad 1.8. Určete součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$ (využijte rovnosti $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$).

Řešení. Opět využijeme rozkladu na parciální zlomky.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)^2}\right]$$
$$s_n = \frac{1}{4}\left(1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots - \dots\right.$$
$$+ \frac{1}{(2n-5)^2} - \frac{1}{2n-5} + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{(2n-3)^2} + \frac{1}{(2n-3)^2} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)^2} +$$
$$\left. + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \dots \frac{2}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

Poznamenejme, že rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ bude odvozena v kapitole 4.

Příklad 1.9. Určete součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}$.

Řešení. K určení s_n užijeme vztahu $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, který platí pokud $xy < 1$. Odtud

$$s_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$
$$\vdots$$

Při pohledu na první tři částečné součty lze očekávat, že pro n-tý částečný součet platí

$$s_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\,.$$

Ověřme tuto rovnost matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme $s_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ a tvrzení tedy zřejmě platí. Nyní předpokládejme platnost tvrzení pro $n = m$, tj. že $s_m = \operatorname{arctg} \frac{m}{m+1}$ a ukažme platnost také pro $n = m + 1$ (tj. že $s_{m+1} = \operatorname{arctg} \frac{m+1}{m+2}$. Přičtením člene a_{m+1} k oboum stranám rovnice máme

$$s_{m+1} = s_m + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(m+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{m}{m+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(m+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{m}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)^2}}{1 - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2(m+1)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{m+1}{m+2},$$

což je požadovaný výsledek. Princip matematické indukce nám říká, že $s_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Součet řady tedy je

$$s = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

B. Konvergence řad

Před uvedením příkladů připomeňme dvě důležité limity, které mají při posuzování konvergence řad pomocí limitních kritérií velký význam. Platí

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \mathrm{e}, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+a}{k}\right)^k = \mathrm{e}^a \quad \text{pro každé reálné } a,$$

a dále

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^a} = 1 \quad \text{pro každé reálné } a.$$

Příklad 1.10. Zjistěte, pro která reálná p konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots .$$

Řešení. Především poznamenejme, že řada má kladné členy. Pro $p \le 0$ není splněna nutná podmínka konvergence (tj. vztah $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$) a řada diverguje. Pro $p > 0$ užijeme integrální kritérium (výpočtem se přesvědčte, že obě limitní kritéria selhávají, tj. $L = 1$). Zde je $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$. Pro $x > 0$ a $p > 0$ je to klesající a kladná funkce. Pro $p \ne 1$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{-p+1}}{1-p} + \frac{1}{p-1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} < \infty & \text{pro} \quad p > 1, \\ \infty & \text{pro} \quad p < 1. \end{cases}$$

Pro $p > 1$ tedy daná řada konverguje podle integrálního kritéria. Pro $p < 1$ pak řada diverguje podle téhož kritéria.

Případ $p = 1$ musíme z integračních důvodů posoudit zvlášť. Nejprve však poznamenejme, že pro $p = 1$ je řada tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots ,$$

což je řada harmonická. Pomocí integrálního kritéria snadno určíme divergenci této řady. Platí totiž

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t - 1 = \infty.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ tedy konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$. Přitom pro všechna $p > 0$ je splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad 1.11. Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots .$$

Řešení. Řada má opět kladné členy. Protože $k+1 > \ln(k+1)$, platí

$$\frac{1}{\ln(k+1)} > \frac{1}{k+1}\,.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ podle příkladu 1.10 diverguje, takže podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$ také diverguje.

Příklad 1.12. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots\,.$$

Řešení. Jedná se o řadu s kladnými členy. Pomocí limitního podílového kritéria určíme

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0\,.$$

Protože $L = 0 < 1$, řada konverguje.

Příklad 1.13. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\operatorname{arctg}^k\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2} + \frac{2}{\operatorname{arctg}^2 \frac{3}{2}} + \frac{3}{\operatorname{arctg}^3 \frac{4}{3}} + \dots\,.$$

Řešení. Řada má kladné členy a vzhledem ke tvaru a_k zvolíme limitní odmocninové kritérium. Nejprve vypočteme odmocninu

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{k}{\operatorname{arctg}^k\left(1+\frac{1}{k}\right)}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

a pak určíme limitu

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{k}\right)}\,.$$

Protože $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, platí

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{\operatorname{arctg} 1} = \frac{4}{\pi} > 1\,.$$

Daná řada tedy diverguje.

Příklad 1.14. Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,!}{k^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \dots\,.$$

Řešení. Pro posouzení konvergence této řady s kladnými členy zvolíme limitní podílové kritérium. Nejprve upravíme podíl

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)\,!}{(k+1)^{k+1}}\,\frac{k^k}{k\,!} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k\,.$$

Pak pomocí vztahu $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \mathrm{e}$ dostáváme

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1\,,$$

a tedy řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konverguje.

Příklad 1.15. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sin \frac{\pi}{k^2} = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{16} + \dots .$$

Řešení. Daná řada má kladné členy. Vzhledem k nerovnosti $0 < \sin x < x$ pro $x > 0$ vyzkoušíme srovnávací kritérium. Platí tedy

$$\sin \frac{\pi}{k^2} < \frac{\pi}{k^2} \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, \dots .$$

Řada $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\pi}{k^2} = \pi \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ je však konvergentní (viz příklad 1.10), a podle srovnávacího kritéria je tedy i řada $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \sin \frac{\pi}{k^2}$ konvergentní.

Příklad 1.16. Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} - \dots .$$

Řešení. Daná řada je alternující, proto ověříme předpoklady Leibnizova kritéria. Platí

$$\lim_{k \to \infty} (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 0$$

(členy řady konvergují k nule) a dále

$$\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) > \ln \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$$

(absolutní hodnoty členů řady tvoří klesající posloupnost). Podle Leibnizova kritéria tedy uvedená řada konverguje. Posoudíme absolutní konvergenci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) .$$

To je však podle příkladu 1.3 divergentní řada, a proto je konvergence původní řady pouze neabsolutní (relativní).

Příklad 1.17. Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Řešení. Užitím nerovností $\sin x \leq x$ a $\operatorname{tg} x \leq Cx$, $\forall x \in \langle 0; 1 \rangle$m, kde C je libovolná konstanta splňující $\operatorname{tg} 1 \leq C < \infty$ (načrtněte si obrázek), z porovnávacího kritéria plyne

$$\sin \frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k} \frac{C}{\sqrt{k}} = \frac{C}{k^{3/2}} .$$

Protože majoranta $C \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$ konverguje (viz příklad 1.10), daná řada také konverguje.

Příklad 1.18. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.

Řešení. Užijeme limitní podílové kritérium. Nejprve upravíme výraz $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ jako

$$\frac{[(k+1)!]^2}{[2(k+1)]!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{2(2k+1)}\,;$$

odtud $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4}$, a řada tedy konverguje.

Příklad 1.19. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{\mathrm{e}^k}$.

Řešení. Pomocí limitního odmocninového kritéria máme

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1\,,$$

řada tedy konverguje.

Příklad 1.20. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Řešení. Na základě integrálního kritéria posuzujeme konvergenci nevlastního integrálu $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Substitucí $t = \ln x$ jej převedeme na $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Konvergenci tohoto integrálu lze považovat za samozřejmou; můžeme ji ověřit např. přímým výpočtem metodou per-partes. Řada proto konverguje.

Příklad 1.21. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$.

Řešení. Nabízí se srovnání s divergentní harmonickou řadou. Provedeme proto odhad $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ pro všechna $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$ (nakreslete si obrázek). Protože $1/k \in \langle 0, \pi/2\rangle$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$, máme $\sin\frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$. Divergence dané řady tedy plyne z porovnávacího kritéria.

Příklad 1.22. Rozhodněte o konvergenci, resp. absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln k}$.

Řešení. Konvergenci řady snadno ověříme užitím Leibnizova kritéria. Konvergenci řady absolutních hodnot $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ prověříme integrálním kritériem. Integrál $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ počítáme substitucí $t = \ln x$, která jej převede na jednoduchý integrál $\int_{\ln 2}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}$, který zřejmě diverguje (viz příklad 1.10). Daná řada tedy konverguje pouze neabsolutně (relativně).

C. Přibližné součty řad

Příklad 1.23. Ukažte, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots$$

konverguje, a odhadněte chybu, které se dopustíte při náhradě součtu s této řady hodnotou s_{10}.

Řešení. Konvergenci řady lze snadno ukázat např. užitím podílového nebo odmocninového kritéria. Pro odhad chyby pak platí

$$R_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k2^k} < \frac{1}{11}\sum_{k=11}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{11}2^{-10} = 0{,}000089.$$

Aproximujeme-li tedy hodnotu součtu s dané řady hodnotou částečného součtu

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k2^k} = 0,693065\,,$$

pak chyba této aproximace nepřevýší hodnotu $0,000089 < 10^{-4}$. Poznamenejme, že přesná hodnota součtu s této řady činí $s = \ln 2 \approx 0,693147$.

Příklad 1.24. Rozhodněte, kolik členů řady je třeba sečíst, aby částečný součet s_n řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$$

aproximoval přesný součet této řady s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení. Konvergenci této řady jsme rozhodli v příkladu 1.10 pomocí integrálního kritéria. V případě užití tohoto kritéria platí odhad chyby

$$|R_n| \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}.$$

Odtud

$$\frac{1}{2n^2} < 10^{-4} \Longleftrightarrow n^2 > 5000 \Longleftrightarrow n \ge \sqrt{5000} \approx 71.$$

K naplnění požadované přesnosti je třeba sečíst alespoň 71 sčítanců dané řady.

Příklad 1.25. Určete přibližnou hodnotu součtu řady

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln k} = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \cdots$$

s chybou menší než 10^{-1}.

Řešení. Podle příkladu 1.22 tato řada konverguje, poněvadž splňuje předpoklady Leibnizova kritéria. Pak platí jednoduchý odhad chyby ve tvaru

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\,.$$

Protože

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < 10^{-1} \quad\Longleftrightarrow\quad (n+1)\ln(n+1) > 10 \quad\Longleftrightarrow\quad n \ge 5\,,$$

odtud

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln k} \approx \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \frac{1}{5\ln 5} \approx 0,5$$

s přesností na 1 desetinné místo.

Příklad 1.26. Rozhodněte, kolik členů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+1}$ je třeba sečíst, aby částečný součet s_n aproximoval přesnou hodnotu s s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení. Řada konverguje např. podle integrálního kritéria. Skutečně, platí

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2[\operatorname{arctg} x]_1^{\infty} = 2\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - 2\operatorname{arctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} < \infty$$

a tedy řada konverguje. Pak

$$|R_n| \leq \int_n^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \pi - 2\operatorname{arctg} n < 10^{-4} \quad \iff \quad n > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - 10^{-4}}{2}\right) \approx 2 \cdot 10^4.$$

K dosažení požadované přesnosti by bylo potřeba sečíst prvních 20 000 členů.

Příklad 1.27. Rozhodněte, kolik členů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}$ je třeba sečíst, aby částečný součet s_n aproximoval přesnou hodnotu s s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení. Řada konverguje podle Leibnizova kritéria (konverguje dokonce absolutně – prověřte pomocí limitního podílového kritéria!!), tedy

$$|R_n| \leq \frac{1}{[2(n+1)+1]\,!} = \frac{1}{(2n+3)\,!} < 10^{-4} \quad \iff \quad n \geq 3\,.$$

Abychom dosáhli požadované přesnosti je potřeba sečíst alespoň první 3 členy.

Příklad 1.28. Pomocí vztahu $\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$ rozhodněte, kolik členů harmonické řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je třeba sečíst, aby $s_n > 100$.

Řešení.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n} > \ln n > 100 \quad \iff \quad n > \mathrm{e}^{100} \approx 2,7 \cdot 10^{43}.$$