3. Mocninné a Taylorovy řady

A. Základní pojmy. Obor konvergence

Mocninné řady jsou nejjednodušším speciálním případem funkčních řad. Jsou to funkční řady, jejichž členy jsou mocninné funkce.

V této kapitole uvidíme, že oborem konvergence každé mocninné řady je jednobodová množina nebo interval. Ukážeme rovněž, že tyto řady konvergují stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu tohoto konvergenčního intervalu. Jak plyne z předcházející kapitoly, tato vlastnost nám umožní integrovat a derivovat mocninné řady člen po členu.

Definice 3.1. (Mocninná řada) *Mocninnou řadou se středem v bodě* x_0 rozumíme funkční řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots\ , \tag{3.1}$$

kde a_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ jsou konstanty, které nazýváme *koeficienty řady.*

Mocninná řada se středem v $x_0 = 0$ je tedy funkční řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\ . \tag{3.2}$$

Částečné součty každé mocninné řady jsou polynomy, a proto lze očekávat, že tyto řady budou mít jisté jednoduché vlastnosti.

Nejprve se budeme zabývat určením oboru (bodové) konvergence $I^\star$. Především je zřejmé, že každá mocninná řada konverguje ve svém středu, tj. $x_0 \in I^\star$ (lze prověřit přímým dosazením do řady). Následující věta ukáže, že struktura oboru konvergence mocninných řad je velmi jednoduchá: je to buď jednoprvková množina (obsahující střed řady), nebo interval konečné délky (symetrický kolem středu), nebo celá reálná osa.

Věta 3.2. (O poloměru konvergence) Ke každé mocninné řadě $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ existuje takové číslo $R \geq 0$ (připouštíme i $R = \infty$), že pro všechna $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ tato řada konverguje, a to absolutně, kdežto pro x ležící vně intervalu $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$ nekonverguje. (Zápisem $R = 0$ přitom rozumíme, že řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a hodnota $R = \infty$ znamená, že řada konverguje pro všechna reálná x). Tuto hodnotu R pak nazýváme *poloměrem konvergence.*

Poznámka 3.3. V koncových bodech oboru konvergence může řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergovat (absolutně nebo relativně), případně divergovat nebo oscilovat. Tyto případy musíme vždy vyšetřit zvlášť. Nyní uvedeme kritérium, pomocí kterého lze zjistit hodnotu poloměru konvergence R. Toto kritérium je dokazováno pomocí limitního podílového a limitního odmocninového kritéria (viz kapitola 1, oddíl A), a formálně se proto těmto kritériím podobá.

Věta 3.4. (Určení poloměru konvergence) Nechť existuje (konečná nebo nekonečná) limita

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \varrho, \quad \text{resp.} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \varrho.$$

Potom pro konvergenční poloměr mocninné řady (3.1)

$$R = \frac{1}{\varrho}.$$

Přitom pro $\varrho = +\infty$ klademe $R = 0$ a pro $\varrho = 0$ klademe $R = +\infty$.

Poznámka 3.5. Pokud jde o vzájemný vztah obou limit uvažovaných v předcházejícím tvrzení, připomeňme, že platí: Existuje-li $\lim\limits_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$, potom existuje také $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ a obě limity si jsou rovny (viz kapitola 1). Pozor!! Uvedené vzorce pro výpočet poloměru konvergence lze použít pouze v případě, že mocniny v řadě „jdou" po jedné, tedy nikoliv například v případě řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3x}}{k}$ (zde mocniny „skáčou" po třech). V takových situacích lze obor konvergence vyšetřit stejnými postupy jako v předchozí kapitole 2.

Příklad 3.6. Určeme poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k\,!} = x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{27}{3!}x^3 + \dots\,.$$

Řešení. Daná mocninná řada má střed $x_0 = 0$ a koeficienty $a_k = k^k/k!$. Její poloměr určíme pomocí věty 3.4. Nejprve upravíme výraz

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)\,!}\,\frac{k\,!}{k^k}\right| = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k.$$

Nyní připomeňme známý vztah

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+p}{k}\right)^k = \mathrm{e}^p \qquad \text{pro všechna reálná } p.$$

Pak

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \mathrm{e},$$

a tedy $R = 1/\mathrm{e}$.

Příklad 3.7. Určeme obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k8^k} = \frac{x-1}{8} + \frac{(x-1)^2}{128} + \frac{(x-1)^3}{1536} + \dots\,.$$

Řešení. Tato mocninná řada má střed $x_0 = 1$ a koeficienty $a_k = 1/(k8^k)$. Protože platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|k8^k|}} = \frac{1}{8} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{8},$$

je poloměr konvergence $R = 8$. Daná mocninná řada tedy konverguje uvnitř intervalu s krajními body $x_0 - R = -7$, $x_0 + R = 9$ a nekonverguje vně tohoto intervalu. O konvergenci v krajních bodech rozhodneme dosazením.

Pro $x = 9$ dostáváme divergentní harmonickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Pro $x = -7$ pak máme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, tedy konvergentní Leibnizovu řadu. Oborem konvergence dané mocninné řady je proto interval $\langle -7, 9)$.

B. Spojitost, derivování a integrování mocninných řad

V kapitole 2 jsme viděli, že k tomu, aby základní poznatky o spojitosti, derivaci a integrálu součtu konečně mnoha funkcí bylo možné rozšířit i na nekonečné součty, je zapotřebí zavést pojem stejnoměrné konvergence. Podle následujícího tvrzení mocninné řady konvergují stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu ležícím uvnitř oboru konvergence.

Věta 3.8. (O stejnoměrné konvergenci mocninných řad) Má-li mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ poloměr konvergence $R > 0$, potom konverguje stejnoměrně (a navíc absolutně) v každém uzavřeném intervalu $\langle x_0 - R^\star, x_0 + R^\star \rangle \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

Odtud plynou následující základní vlastnosti mocninných řad:

Věta 3.9. (O spojitosti mocninných řad) Mocninná řada $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je spojitou funkcí v každém vnitřním bodě oboru konvergence $I^\star$. Konverguje-li navíc tato řada v levém (resp. pravém) krajním bodě $I^\star$, pak je $s(x)$ spojitá v tomto bodě zprava (resp. zleva).

Příklad 3.10. Funkce $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k8^k}$ z předcházejícího příkladu je spojitá na $(-7, 9)$ a spojitá zprava v bodě $x = -7$.

Věta 3.11. (O derivování mocninných řad) Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$ a součet $s(x)$. Pak platí

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1},$$

tj.

$$(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots)' = 0 + a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots,$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má tentýž poloměr konvergence R.

Věta 3.12. (O integrování mocninných řad) Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$ a součet $s(x)$. Pak platí

$$\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \frac{(b-x_0)^{k+1}}{k+1} - a_k \frac{(a-x_0)^{k+1}}{k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(b-x_0)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(a-x_0)^{k+1},$$

tj.

$$\int_a^b (a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots)\,\mathrm{d}x = a_0[x]_a^b + \frac{a_1}{2}[(x-x_0)^2]_a^b + \frac{a_3}{3}[(x-x_0)^3]_a^b + \dots$$

pro libovolný interval $\langle a, b \rangle \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, přičemž číselná řada na pravé straně konverguje (a to absolutně).

Poznámka 3.13. Větu o integraci mocninné řady lze přeformulovat také pro případ, kdy uvažovaný integrál je funkcí horní meze: pro všechna $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ pak platí

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_k (t-x_0)^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} =$$
$$= a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_3}{3}(x-x_0)^3 + \dots$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má opět poloměr konvergence R.

Pomocí vět o derivování a integrování mocninných řad lze odvodit některé nové vztahy pro součty řad. Vyjděme např. ze vztahu

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in I^\star = (-1, 1), \tag{3.3}$$

který byl odvozen v kapitole o funkčních řadách. Derivováním této rovnosti dostáváme podle věty o derivaci mocninných řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1)\,.$$

Zdůrazněme, že se při derivování a integrování mocninné řady zachovává poloměr konvergence, nikoliv však nutně konvergence v krajních bodech oboru konvergence. Případnou konvergenci je třeba vždy prověřit přímým dosazením do řady.

Všimněme si, že řada vystupující v předcházejícím vztahu již není řada geometrická. Dosazením libovolného $x \in (-1,1)$ do tohoto vztahu lze získat vzorec pro součet negeometrické číselné řady.

Jestliže rovnost (3.3) pro změnu integrujeme, dostáváme po malé úpravě (a prověření konvergence v krajních bodech) vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \qquad x \in \langle -1,1)\,. \tag{3.4}$$

C. Rozvoje funkcí v mocninné řady (Taylorovy řady)

Vraťme se ještě ke vztahu (3.4) a upravme ho jako

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in \langle -1,1)\,.$$

Tento vzorec lze interpretovat jako rozvoj funkce $f(x) = \ln(1-x)$ do mocninné řady, a sice na intervalu $\langle -1,1)$. To je velmi zajímavá skutečnost (např. proto, že se logaritmickou funkci podařilo vyjádřit pomocí základních aritmetických operací), která nás vede k obecnější úvaze, totiž za jakých podmínek lze vyjádřit libovolnou funkci $f(x)$ pomocí nějaké mocninné řady, tj. kdy platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots, \qquad x \in I^\star\,, \tag{3.5}$$

kde x_0 a a_k jsou (zatím nespecifikované) konstanty. Předpokládáme přitom, že daná mocninná řada má kladný poloměr konvergence R (při $R=0$ totiž obor konvergence $I^\star$ obsahuje pouze střed x_0, což je nezajímavý případ.)

Dosazením $x = x_0$ do (3.5) dostáváme $f(x_0) = a_0$. Derivací (3.5) a dosazením $x = x_0$ do derivovaného vztahu máme $f'(x_0) = a_1$. Opětovným derivováním a dosazením $x = x_0$ pak máme $f''(x_0) = 2\cdot 1\cdot a_2$, $f'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3$ a obecně $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, tj.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots\,. \tag{3.6}$$

Odtud plyne, že pokud platí rozvoj (3.5), pak koeficienty a_k jsou dány vztahy (3.6).

Definice 3.14. (Taylorova řada) Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivace všech řádů. Potom *Taylorovou řadou* funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme výraz

$$T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Poznámka 3.15. (O rovnosti funkce $f(x)$ a její Taylorovy řady) Taylorovu řadu lze napsat vždy, pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci všech řádů. Vzniká však otázka, zda tato řada má za součet skutečně funkci $f(x)$. Tímto problémem se budeme nyní zabývat.

Protože Taylorova řada je limitním případem Taylorova polynomu $P_n(x)$, připomeňme v této souvislosti tento pojem, se kterým jsme se seznámili v diferenciálním počtu.

Víme, že n-krát spojitě diferencovatelnou funkci $f(x)$ můžeme v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 nahradit Taylorovým polynomem $P_n(x)$, a to se zbytkem $R_n(x)$, takže je

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{pro všechna } x \in U(x_0),$$

kde

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Odtud lze odvodit následující ekvivalentní podmínku pro to, aby Taylorova řada funkce $f(x)$ byla skutečně rovna $f(x)$:

Nechť funkce $f(x)$ má v intervalu I derivace všech řádů a nechť $x_0 \in I$ je vnitřním bodem I. Potom v tomto intervalu platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

když a jen když

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I. \tag{3.7}$$

K praktickému ověření vztahu (3.7) se obvykle používá tzv. Lagrangeův tvar zbytku $R_n(x)$ ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + (x - x_0)\vartheta) ,$$

kde ϑ je blíže neurčené číslo, přičemž $0 < \vartheta < 1$.

Taylorovy rozvoje elementárních funkcí. Naznačíme praktický postup při určování rozvojů funkcí do mocninných řad. V zásadě rozlišujeme metody přímé a nepřímé.

Přímé metody (rozvoje funkcí $f(x) = \mathrm{e}^x$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^r$): Používají se v případě, lze-li vyjádřit a_k podle vztahu (3.6), tj. jsme-li schopni určit $f^{(k)}(x_0)$ pro libovolné k. Ve všech uvedených případech volíme $x_0 = 0$.

Postup naznačíme pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Platí $f^{(k)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(k)} = \mathrm{e}^x$, takže $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, a podle (3.6) $a_k = \frac{1}{k!}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Pomocí Lagrangeova tvaru zbytku se snadno ukáže, že $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dohromady

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \qquad x \in (-\infty, +\infty) .$$

Dále analogicky:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, && x \in (-\infty, +\infty),\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, && x \in (-\infty, +\infty),\\
\ln(1 + x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, && x \in (-1, 1\rangle,\\
(1 + x)^r &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \dots, && x \in (-1, 1),
\end{aligned}$$

kde r je libovolné reálné číslo, $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$ pro $k = 1, 2, \dots$ a $\binom{r}{0} := 1$. Tato řada se nazývá *binomická*.

Nepřímé metody: V následujících příkladech ukážeme i jiné způsoby rozvojů, které vzorce (3.4) přímo nevyužívají.

Příklad 3.16. Určeme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Nejprve odvodíme rozvoj funkce $f'(x) = 1/(1+x^2)$. Snadno ověříme, že $f'(x)$ je součtem geometrické řady, kde první člen $a_1 = 1$ a kvocient $q = -x^2$. Tedy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Integrací tohoto vztahu obdržíme rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kde $x \in (-1, 1)$. Dále je třeba ještě vyšetřit konvergenci řady v krajních bodech oboru konvergence. Dosazením $x = 1$ dostáváme alternující řadu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$, která konverguje podle Leibnizova kritéria. Po dosazení $x = -1$ a následném vytknutí znaménka obdržíme tutéž řadu. Ukázali jsme tedy, že platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Příklad 3.17. Určeme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Nejprve napišme výše odvozený rozvoj funkce e^x, kde proměnnou x přeznačíme jako t:

$$\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Odtud dosazením substituce $t = -x^2$ máme

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Užití rozvojů funkcí v mocninné řady. Na závěr této kapitoly budeme na příkladech ilustrovat některé z četných aplikací rozvojů funkcí v Taylorovy řady. Kromě náhrady funkce Taylorovým polynomem (tedy částečným součtem Taylorovy řady) lze tyto rozvoje použít např. k vyjádření některých známých číselných konstant, k výpočtu limit a integrálů a také při řešení diferenciálních rovnic (o této otázce pojednáme později).

Příklad 3.18. Pomocí základních aritmetických operací vyjádřeme hodnotu e, π a $\ln 2$.

Řešení. Položíme-li $x = 1$ postupně v rozvojích funkcí e^x, $\operatorname{arctg} x$ a $\ln(1+x)$, dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}
\mathrm{e} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots, \\
\pi &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \right), \\
\ln 2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.
\end{aligned}$$

Příklad 3.19. Pomocí rozvoje funkce $f(x) = (\sin x)/x$ určeme $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ a vyjádřeme $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ve tvaru mocninné řady.

Řešení. Na základě rozvoje funkce $\sin x$ snadno určíme

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Odtud ihned plyne známý vztah
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Dále danou řadu integrujeme člen po členu, takže platí
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \,,$$
kde $x \in (-\infty, +\infty)$.

Příklad 3.20. Vypočtěme $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ a určeme, kolik členů řady je třeba sečíst, aby hodnota integrálu byla aproximována s chybou menší než 10^{-6}.

Řešení. Pomocí rozvoje funkce e^t a následnou substitucí $t = -x^2$ jsme ukázali, že platí
$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \qquad \text{pro všechna } x \in (-\infty, +\infty)\,.$$
Opět můžeme integrovat člen po členu, takže
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \right\} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \, \mathrm{d}x \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}.$$
Protože obdržená číselná řada je alternující, k odhadu velikosti zbytku využijeme vztah $|R_n| \leq a_{n=1}$ (viz kapitola 1, Leibnizovo kritérium). Odtud
$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-6} \iff n \geq 8.$$
K dosažení požadované přesnosti je tedy třeba provést následující náhradu:
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \cdots + \frac{1}{17.8!} = 0,746824\,.$$

Definice 3.21. (Eulerův vzorec) Dosaďme v Taylorově rozvoji funkce e^x za x výraz ix, kde i je imaginární jednotka. Protože $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1, \ldots$, dostaneme
$$\mathrm{e}^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$
čili
$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x\,.$$

Shrnutí poznatků o mocninných řadách

Mocninné řady jsou funkční řady, jejichž členy tvoří mocninné funkce s přirozeným exponentem (jsou tedy vlastně polynomy nekonečně velkého stupně). Oborem konvergence každé mocninné řady je buďto jednoprvková množina, nebo konečný interval symetrický kolem středu, nebo celá reálná osa. Tyto řady navíc konvergují stejnoměrně na každém uzavřeném podintervalu oboru konvergence. Tato vlastnost nám umožňuje mocninné řady derivovat a integrovat člen po členu, přičemž poloměr konvergence zůstává nezměněn.

Rozvojem funkce do mocninné řady rozumíme nalezení mocninné řady, jejímž součtem je právě daná funkce. Tato mocninná řada se pak nazývá řada Taylorova. Pro většinu elementárních funkcí umíme nalézt její rozvoj do mocninné řady, a to buď pomocí vzorce, nebo užitím jiných obratů. Tyto rozvoje se využívají především v tom smyslu, že řadu operací (vyčíslení funkční hodnoty, limity, derivace, integrálu) lze provést snadněji pro tyto rozvoje, nežli pro funkce samotné.