Irena Budínová

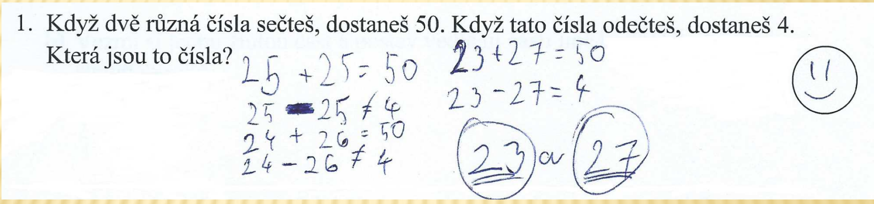
VSTUP DO ALGEBRY. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

POSTUPNÉ ROZVÍJENÍ ALGEBRAICKÉHO MYŠLENÍ, ETAPA 1

- Na 1. stupni ZŠ řeší žáci úlohy **intuitivně**.
- Nejdříve volíme **úlohy s malými čísly**:
  - *David a Michal měli dohromady 15 modelů autíček. Michal měl dvakrát tolik a ještě o tři více než David. Kolik autíček měl David?*
  - *Myslím si číslo. Když ho vynásobím třemi a přičtu k němu 3, dostanu 15. Které číslo si myslím?*
- Žáci používají různé **strategie řešení**.

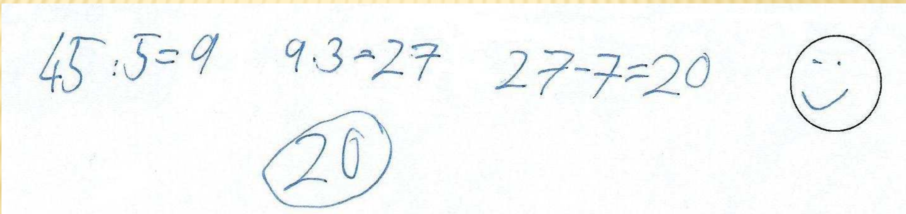
UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Na 1. stupni žáci nejčastěji volí metodu pokusu a omylu


1. Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 50. Když tato čísla odečteš, dostaneš 4. Která jsou to čísla?

UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Sofistikovanější metodou je metoda od konce, která se objevuje méně často. Žák řeší úlohu „myslím si číslo…“



UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Již na 1. stupni se můžeme setkat s algebraickým řešením. Všimněme si nezvládnuté gramatiky zápisu. (Žák řeší „myslím si číslo…“)

$$X + 7 : 3 \cdot 5 = 45 \qquad x = 20$$
$$45 : 5 \cdot 3 - 7 = X$$

- Úlohy s většími čísly:
  - *Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a přičtu k němu 45, dostanu 119. Které číslo si myslím?*
- Velká čísla pro mnoho dětí představují problém.
- Děti se u těchto úloh mohou poprvé setkat s písmenem jakožto neznámou veličinou (4. – 5. ročník ZŠ):

$$2a + 45 = 190$$

ÚLOHY S VELKÝMI ČÍSLY NA 2. ST. ZŠ

- Neexistuje transfer mezi metodou pokusu a omylu a algebraickým způsobem myšlení. Žákyně počítá úlohu: Když dvě čísla sečteš, dostaneš 15, když odečteš od většího menší, dostaneš 3, metodou pokusu a omylu.

$15=14+1$
$15=13+2$
$15=12+3$
$15=11+4$
$15=10+5$
$15=9+6$
$15=8+7$
$15=9+6$ √ jsou to čísla 9 a 6.

- Stejná žákyně (9. ročník) řeší analogickou úlohu s velkými čísly – sestaví soustavu rovnic, není ji schopna řešit.

$$x_1+x_2=10\,000$$
$$x_1-x_2=6666$$

- Žák 9. ročníku řeší úlohu pomocí logické úvahy. (Všimněme si implikačního způsobu zápisu.)

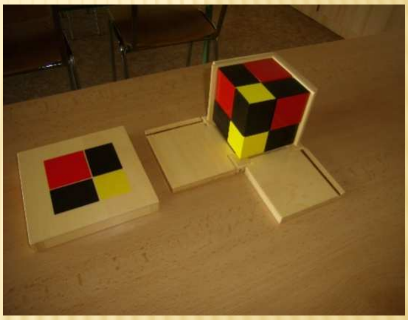
$$15 - 3 = 12 : 2 = \underline{6}$$
$$6 + 3 = \underline{9}$$

- Stejný žák používá stejnou úvahu na velká čísla, není schopen je odečíst a vydělit.

$$10000 - 6666 = 4444 : 2 = \underline{\underline{2222}}$$
$$6666 + 2222 = \underline{\underline{8888}}$$

POMŮCKA BINOMICKÁ KRYCHLE

- 1. fáze – mateřská škola, manipulace s kostkou. Rozvíjí spíše prostorovou představivost než algebraické myšlení.
- 2. fáze – 5. ročník, pojmy obsah rovinného obrazce a objem tělesa. Geometrické pojmy čtverec, obdélník, krychle, kvádr

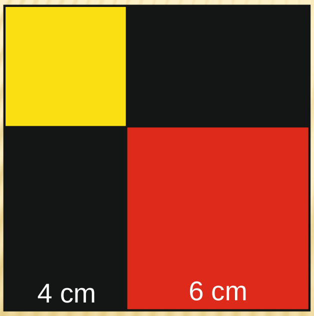


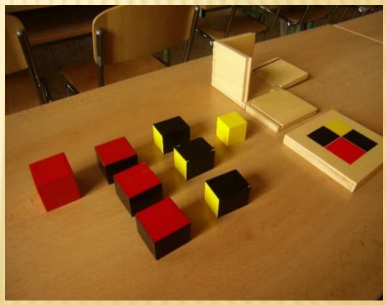
FORMÁLNÍ (AVŠAK NÁZORNÉ) ZAVÁDĚNÍ ALGEBRAICKÝCH VZORCŮ, ETAPA 2

- Třetí fáze práce s binomickou krychlí: předchází zavedení vzorců $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$ v devátém ročníku.
- Žáci nejdříve pracují se stěnou krychle a později s celou krychlí.
- Výhodná je práce se čtverečkovaným papírem

ODVOZENÍ VZORCŮ POMOCÍ BINOMICKÉ KRYCHLE

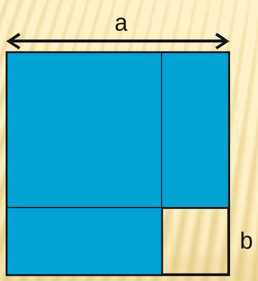
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

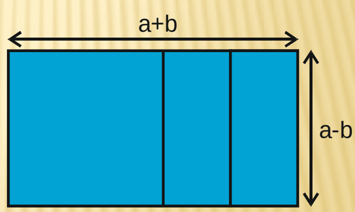




ODVOZOVÁNÍ DALŠÍCH ALGEBRAICKÝCH VZORCŮ POMOCÍ ČTVEREČKOVANÉHO PAPÍRU

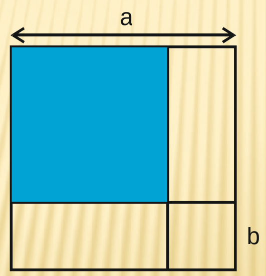
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$





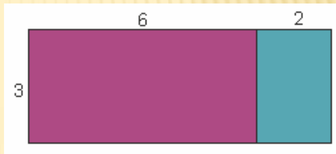
- Nejvíce náročné je vytvořit geometrickou představu pro vzorec

$(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

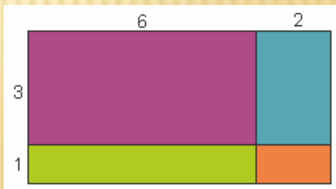


ROZNÁSOBOVÁNÍ ZÁVOREK

- 3.(6+2)=3.6+3.2
- Zobecnění: a(b+c)=ab+ac



- (3+1).(6+2)=3.6+3.2+1.6+1.2
- Zobecnění: (a+b)(c+d)=
=ac+ad+bc+bd



- Po fázi **modelování** musí následovat fáze **zapamatování** a **fixace.**
- Pro efektivní fixaci mohou sloužit různé didaktické hry, jako např. práce s kartičkami:

$\boxed{a^2 - b^2}$ $\boxed{(a+b)^2}$ $\boxed{(a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a-b)(a-b)}$ $\boxed{(a-b)^2}$

$\boxed{a^2 - 2ab + b^2}$ $\boxed{a^2 + 2ab + b^2}$

$\boxed{(a+b)(a+b)}$

- Děti mohou mít i přes názorný úvod do algebry později problémy s interpretací algebraických výrazů. Stávají se jim potom chyby typu $a^2 + 2a = 3a^2$ apod. Těmto chybám lze předcházet dvěma způsoby:
  - opakovaně se vracet k dosazování číselných hodnot, např. $(2+5)^2$
  - algebraickým zápisům přisuzovat **geometrický význam**, tj. **a** je úsečka, **a**^{2} je čtverec, **ab** je obdélník, **a**^{3} je krychle.

PROČ POTŘEBUJEME POČÍTAT S OBECNÝM VYJÁDŘENÍM A KDE SE S NÍM SETKÁME

- Ve školské matematice – zobecňování vztahů:
  - Vztahy pro výpočty obsahů, obvodů, povrchů a objemů geometrických útvarů;
  - V rovnicích;
  - Ve funkčních závislostech;
- V ostatních předmětech – fyzika, biologie, chemie;
- V běžném životě.

POUŽÍVÁNÍ PÍSMEN VE VÝZNAMU ČÍSEL

- Písmena mohou mít v matematice význam proměnné veličiny, konstanty, neznámé veličiny, nebo čísel, jejichž hodnotu nedokážeme vyjádřit – π, e, i.

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Zhruba od roku 2000 př. n. l. začíná **verbalistické období** – vztahy mezi čísly byly vyjadřovány slovně.
- Úloha z tohoto období (Egypt, Rhindův papyrus, 1650 př. n. l.): *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15. Jak velká je hromada?* Úloha byla řešena **metodou falešného předpokladu.**

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Kolem roku 500 př. n. l. nastává **geometrická algebra Řeků.**
- Úloha z tohoto období: *Obdélník, jehož jedna strana je o jednotku kratší než druhá strana, má obsah plochy 12 jednotek. Jak dlouhé strany?* Lze řešit aritmeticky, rozkladem na součin.

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- 250 př. n. l. Diofantos z Alexandrie –zahájil **synkopické období:** některé vztahy byly zapisovány větami, jiné speciálními symboly.
- Diofantův epitaf: *Zde tento náhrobek přikrývá Diofanta – zázrak na pohled! Aritmetickým uměním sděluje kámen jeho věk. Šestinu života popřál mu Bůh být chlapcem, když pak dvanáctina uplynula, nechal mu vyrašit vous. Ještě sedmina, tu rozžehl mu svatební pochodeň, a pět let nato mu dal synáčka. Běda nešťastné dítě! Dosáhlo teprve poloviny otcova věku, když přijal ho Hádes, ten strašný. Ještě čtyři roky snášel Diofantos bolest, žije vědě. A nyní řekni věk, kterého dosáhl.*

HISTORICKÁ POZNÁMKA

- Nejvýznamnějším matematikem synkopického období byl Al Chovarizmi (9. st. n. l.). Spis Aljabr v‘almukabala obsahuje nauku o rovnicích.
- 13. st. – Leonardo Pisánský používal písmena k označení čísel ve spisu Liber Abaci.
- Od 15. století začíná **období symbolické**
  - Francois Viéte ve spisu Logistica speciosa navrhuje označovat známé veličiny souhláskami, neznámé samohláskami.
  - René Descartes (17. st.) – zdokonalení symboliky

LITERATURA

- Balada, F. (1959). *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN
- Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H. (2003). *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus
- Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky2.* Bratislava: SPN